

УДК 534.38

## «Нетрадиционные» решения уравнения Матье-Дуффинга: существование и устойчивость

Беловодский В.Н., Сухоруков М.Ю.

*Рассматривается уравнение Матье-Дуффинга  $\ddot{x} + \beta \dot{x} + (1 - 2\mu \cos 2t)x + \delta x^3 = 0$  в зоне главного параметрического резонанса. На базе полигармонических разложений изучаются вопросы существования и устойчивости его гармонических решений с периодом равным периоду параметрического возбуждения.*

**Постановка задачи.** В работе [1] изучаются гармонические решения уравнения Матье с симметричной жесткой кубической характеристикой в зоне главного параметрического резонанса. С использованием метода усреднения устанавливается принципиальная возможность существования двух типов таких решений, – с периодом равным и периодом удвоенным периоду параметрического возбуждения. Основное внимание уделяется колебаниям первого типа, т.к. они не описаны в известной литературе. Для отдельных наборов значений параметров получены две пары таких режимов, однако существование одной из них не удалось подтвердить численным моделированием.

Целью данной работы является установление окончательных заключений в вопросе существования этих колебаний.

**Уравнение, изучаемые решения.** Рассматривается уравнение

$$\ddot{x} + \beta \dot{x} + (1 - 2\mu \cos 2t)x + \delta x^3 = 0, \quad (1)$$

где  $\beta, \delta > 0$ . В силу выбранного соотношения частот, система, описываемая уравнением (1) ориентирована, примерно, на середину главной зоны неустойчивости.

В [1] получены системы соотношений, определяющих две пары «нетрадиционных», –  $\pi$ -периодических решений. При численном анализе этих соотношений и значениях параметров уравнения  $\beta = 0,001$ ,  $\mu = 0,3$ ,  $\delta = 1/3$  были получены две пары таких решений

$$x = \pm(0,1478 + 3,4662 \cos(2t - 0,0783)) \quad (2)$$

и

$$x = \pm(0,0116 + 3,4641 \cos(2t - 1,4927)).$$

Одной из характерных особенностей этих колебаний, пожалуй, является то обстоятельство, что решения первой пары практически синфазны (или противофазны) параметрическому возбуждению, в то время как начальные фазы второй пары близки к  $\pm \frac{\pi}{2}$ .

Существование первой пары режимов подтвердилось и при непосредственном численном интегрировании уравнения (1). Однако, при задании начальных условий, соответствующих второй паре решений, осуществлялся численный переход на один из режимов первой пары.

Естественное стремление объяснить такое поведение неустойчивостью второй пары полученных решений наталкивается на не менее естественные сомнения в их существовании вообще.

Поэтому в качестве первого этапа исследования проведем параллельные расчеты альтернативным методом, по-прежнему считая, что колебания являются чисто гармоническими, и оценим последствия допускаемых допущений.

**Моногармонический анализ, результаты.** Используем метод гармонического баланса. Ограничиваясь учетом младших составляющих, решение будем искать в виде

$$x_{an}(t) = A_0 + A_1 \cos 2t + B_1 \sin 2t. \quad (3)$$

Подставим (3) в (1), выполним операции понижения степени и сравним коэффициенты при 1,  $\cos 2t$ ,  $\sin 2t$ . В результате получим систему уравнений для определения коэффициентов разложения (3)

$$\begin{cases} A_0 - \mu A_1 + \delta \left( A_0^3 + \frac{3}{2} A_0 A_1^2 + \frac{3}{2} A_0 B_1^2 \right) = 0, \\ -3 A_1 + 2 \beta B_1 - 2 \mu A_0 + \delta \left( 3 A_0^2 A_1 + \frac{3}{4} A_1^3 + \frac{3}{4} A_1 B_1^2 \right) = 0, \\ -3 B_1 - 2 \beta A_1 + \delta \left( 3 A_0^2 B_1 + \frac{3}{4} A_1^2 B_1 + \frac{3}{4} B_1^3 \right) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Внешние отличия этой системы от полученной ранее [1] не отразились на основных результатах. При указанных выше значениях параметров  $\beta$ ,  $\mu$ ,  $\delta$  получены (с использованием процедуры solve пакета Matlab) две пары противоположных режимов

$$x_1 = 0,1478 + 3,4556 \cos 2t + 0,2710 \sin 2t,$$

$$x_2 = -x_1,$$

и

$$x_3 = 0,0116 + 0,2703 \cos 2t + 3,4536 \sin 2t,$$

$$x_4 = -x_3,$$

(5)

которые, будучи представлены в эквивалентной форме записи, совпадают с решениями (2). Таким образом, использование метода гармонического баланса дает, по существу, дублирование полученных ранее результатов.

Оценим погрешность аналитического решения. Представим решение уравнения (1) в виде

$$x(t) = x_{an}(t) + \varepsilon(t),$$

где  $x_{an}(t)$ , – одно из соотношений (5). Тогда  $\varepsilon(t)$  определяется членами, опущенными при формировании системы (4), и описывается уравнением

$$\begin{aligned} \ddot{\varepsilon} + \beta \dot{\varepsilon} + (a_0 + a_1 \cos 2t + b_1 \sin 2t + a_2 \cos 4t + b_2 \sin 4t) \varepsilon + \\ + 3 \delta (A_0 + A_1 \cos 2t + B_1 \sin 2t) \varepsilon^2 + \delta \varepsilon^3 = p_2 \cos 4t + q_2 \sin 4t + p_3 \cos 6t + q_3 \sin 6t, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\varepsilon(0) = 0, \quad \dot{\varepsilon}(0) = 0,$$

$$\begin{aligned}
 a_0 &= 1 + 3\delta A_0^2 + \frac{3}{2}\delta A_1^2 + \frac{3}{2}\delta B_1^2, \\
 a_1 &= 6A_0A_1\delta - 2\mu, & b_1 &= 6\delta A_0B_1, \\
 a_2 &= \frac{3}{2}\delta(A_1^2 - B_1^2), & b_2 &= 3\delta A_1B_1, \\
 p_2 &= \mu A_1 - \frac{3}{2}\delta A_0(A_1^2 - B_1^2), & q_2 &= B_1(\mu - 3\delta A_0A_1), \\
 p_3 &= -\frac{1}{4}\delta A_1(A_1^2 - 3B_1^2), & q_3 &= -\frac{1}{4}\delta B_1(3A_1^2 - B_1^2).
 \end{aligned}$$

Уравнение (6) имеет уже смешанное возбуждение. Результаты численных экспериментов, приведенных с ним и с уравнением (1) для режима  $x_{an}(t) = x_3(t)$ , представлены на рис. 1. А именно, на рис. 1а приводятся графики  $x_{an}(t)$  и  $\varepsilon(t)$ , на рис. 1б, – решение  $x(t)$  уравнения (1), полученное численно, и результат наложения  $x_{an}(t) + \varepsilon(t)$ . Первый из них дает представление об относительной величине  $\varepsilon(t)$ , второй, – иллюстрирует практическое совпадение численного решения и суммы  $x_{an}(t) + \varepsilon(t)$  и имеет, по существу, контрольный характер.

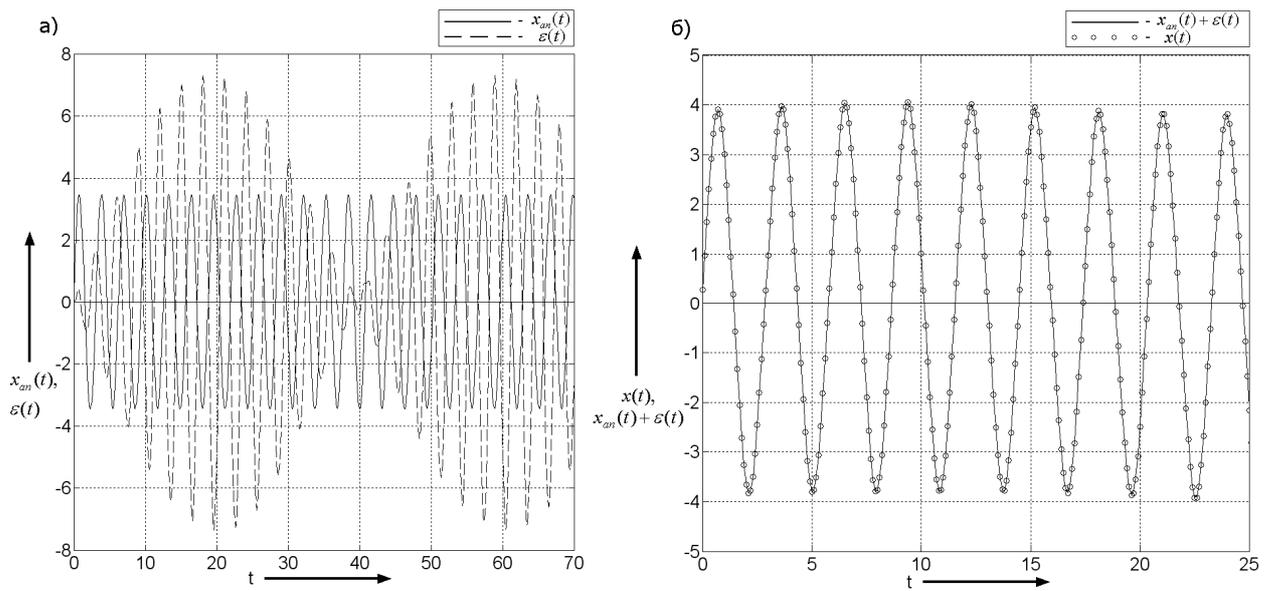


Рис. 1 – Оценка адекватности решения  $x_3(t)$  уравнению (1)

Таким образом, существенная относительная величина отклонения  $\varepsilon(t)$  и ранее отмеченное отсутствие численной наблюдаемости режимов  $x_{3,4}$  усиливают сомнение в их существовании. Однако, теоретически, пожалуй, сохраняется, еще и следующая возможность: режимы вида  $x_{3,4}$  все-таки существуют, однако при моногармоническом анализе определяются грубо и, в силу малого запаса устойчивости, не наблюдаются численно. Анализ этой гипотезы требует более тонких исследований и может быть выполнен с учетом фактической полигармоничности изучаемых колебаний, он проводится ниже.

**Полигармонический анализ.** Уравнение (1) имеет нелинейность полиномиального типа. Если принять во внимание характер проводимых преобразований, а также желаемую алгоритмизацию этого процесса используем комплексную форму ряда Фурье. Решение уравнения (1) будем искать в виде

$$x_{an}(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i2nt}, \quad (7)$$

где  $N$  – число гармоник, учитываемых в разложении, а связь комплексно-сопряженных коэффициентов  $c_n$  и  $c_{-n}$  с коэффициентами  $A_n$ ,  $B_n$  при  $\cos 2nt$ ,  $\sin 2nt$  обычного ряда Фурье устанавливается соотношениями

$$A_n = c_n + c_{-n}, \quad B_n = (c_n - c_{-n})i. \quad (8)$$

Подставим (7) в (1). После очевидных преобразований получим

$$\sum_{n=-N}^N (1 - 4n^2 + i2\beta n) c_n e^{i2nt} - \mu \sum_{n=-N+1}^{N+1} c_{n-1} e^{i2nt} - \mu \sum_{n=-N-1}^{N-1} c_{n+1} e^{i2nt} + \delta \sum_{n=-3N}^{3N} f_n e^{i2nt} = 0,$$

где

$$f_n = \sum_{\substack{k=-N \\ n-k-m \in \{-N; N\}}}^N \sum_{m=-N}^N c_k c_m c_{n-k-m}.$$

Приравнявая теперь коэффициенты при степенях  $e^{i2t}$ , получим систему  $(2N+1)$  уравнений относительно коэффициентов  $c_{-N}, \dots, c_0, \dots, c_N$  разложения (7)

$$\begin{cases} (1 - 4N^2 - i2\beta N)c_{-N} - \mu c_{-N+1} + \delta f_{-N} = 0, \\ (1 - 4n^2 + i2\beta n)c_n - \mu c_{n-1} - \mu c_{n+1} + \delta f_n = 0, \quad n = \overline{-N+1, N-1}, \\ (1 - 4N^2 + i2\beta N)c_N - \mu c_{N-1} + \delta f_N = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Дальнейший анализ уравнений (9) выполнен с использованием пакета Maple (процедура `fsolve`), необходимые для этого начальные приближения определялись с использованием  $x_3(t)$ . В результате были отмечены определенные тенденции при последовательном увеличении параметра  $N$ . А именно, по сравнению с  $x_3(t)$  происходит заметное, до 40%, уточнение младших коэффициентов  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $B_1$ . А амплитуды старших гармонических составляющих убывают с увеличением номера гармоники и постепенно “исчезают”. Для иллюстрации приведем решение, полученное при  $N=10$ , переводя его в обычную тригонометрическую форму, используя соотношения (8), сохранив в коэффициентах пять знаков после запятой (значения параметров  $\mu$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  прежние)

$$\begin{aligned} x_{an}(t) = & 0,00884 + 0,19389 \cos 2t + 3,39108 \sin 2t - 0,01156 \cos 4t - 0,10594 \sin 4t - \\ & - 0,01887 \cos 6t - 0,10917 \sin 6t + 0,00142 \cos 8t + 0,00612 \sin 8t + \\ & + 0,00096 \cos 10t + 0,00327 \sin 10t - 0,00010 \cos 12t - 0,00028 \sin 12t - \\ & - 0,00004 \cos 14t - 0,00009 \sin 14t + 0,00001 \cos 16t + 0,00001 \sin 16t. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, характер решения остается практически гармоническим, однако амплитуды младших составляющих существенно корректируются.

Более высокий уровень совпадения наблюдается в данном случае и с численными результатами. Их сравнительный анализ для  $N = 1, 3, 10$  показан на рис. 2. Достаточно высокая корреляция решений на начальной стадии движения (случай  $N = 3, 10$ ), на наш взгляд, подтверждает факт наличия колебаний рассматриваемого типа и дает основания для исследования их устойчивости.

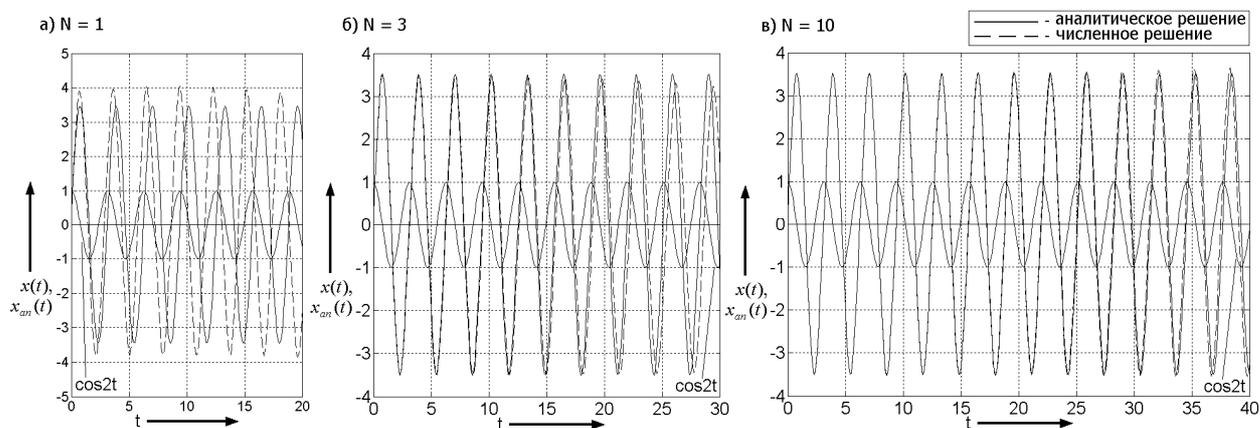


Рис. 2 – Сравнение численного решения  $x(t)$  уравнения (1) и аналитического  $x_{an}(t)$  для различных значений  $N$

**Анализ устойчивости решений.** Проведем в первом приближении анализ устойчивости полученных решений  $x_{an}(t)$ . Обозначим через  $\tilde{x}(t) = x_{an}(t) + \xi(t)$  возмущенное решение, тогда, подставив  $\tilde{x}(t)$  в (1), получим уравнение в вариациях

$$\ddot{\xi} + \beta \dot{\xi} + (1 - 2\mu \cos 2t)\xi + 3\delta x_{an}^2(t)\xi = 0. \quad (11)$$

Напомним, что устойчивость решения  $x_{an}(t)$  определяется устойчивостью тривиального решения уравнения (11), что, в свою очередь, согласно теории Флоке-Ляпунова, – значениями его мультипликаторов [2]. Их расчет был проведен в среде пакета Matlab с использованием специально разработанных программ. На рис. 3 для решений  $N = 1, 3, 10$  показано расположение мультипликаторов уравнения (11) относительно единичной окружности на комплексной плоскости. Так, при  $N = 10$ , т.е. для решения  $x_{an}(t)$ , описываемого выражением (10), значения мультипликаторов равны  $\rho_1 = 1,3510$ ,  $\rho_2 = 0,7394$ . Таким образом, вследствие  $|\rho_1| > 1$  данное решение является неустойчивым, что вполне согласуется и с поведением численного решения (рис. 2). Отметим, что уменьшение значения  $N$ , т.е. числа учитываемых гармоник в разложениях (7) отражается и на результатах анализа устойчивости. Так, если при  $N = 3$  значения  $\rho_{1,2}$  равны 1,325, 0,7538, соответственно, то при  $N = 1$  значения  $\rho_{1,2} = 0,8167 \pm 0,5759i$ , т.е. уже  $|\rho_{1,2}| = 0,9987 < 1$ . Таким образом, соответствия результатов численного интегрирования уравнения (1) и его аналитических решений удастся достичь лишь при полигармоническом анализе.

**Замечание.** Аналогичный анализ был выполнен и для решений  $x_{1,2}$  (5). В этом случае учет полигармоничности исследуемых колебаний не приводит к заметному уточнению коэффициентов  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $B_1$  в (3), полученных из их моногармонических приближений. Так, при изменении параметра  $N$  от 1 до 10 они изменяются в пределах 5%. Также остаются стабильными и выводы относительно устойчивости. Если при  $N=10$  значения  $\rho_{1,2} = 0,9514 \pm 0,3065i$ , т.е.  $|\rho_{1,2}| = 0,9991 < 1$ , то при  $N=1$  значения  $\rho_{1,2} = 0,5717 \pm 0,8194i$ , т.е. также  $|\rho_{1,2}| = 0,9983 < 1$ .

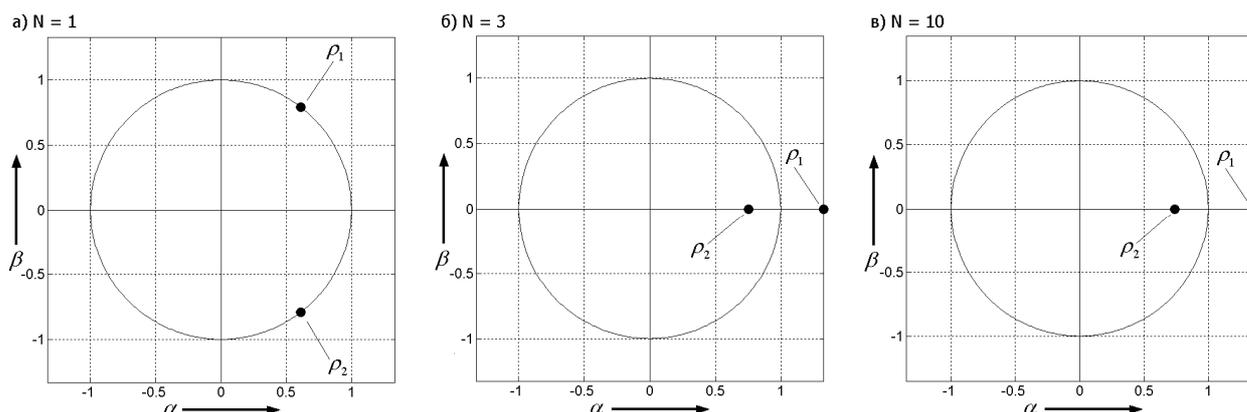


Рис. 3 – Расчет мультипликаторов  $\rho = \alpha + i\beta$  уравнения (11)

**Выводы.** Выполненный анализ делает обоснованными следующие заключения. Кубическое уравнение Матье-Дуффинга с симметричной жесткой характеристикой допускает в зоне главного параметрического резонанса две пары противоположных между собой почти гармонических решений с периодом равным периоду параметрического возбуждения. Одним из характерных различий этих колебаний является начальный сдвиг фаз. При малом уровне сопротивления одна пара режимов практически синфазна относительно параметрического возбуждения, вторая пара имеет сдвиг фаз близкий к  $\frac{\pi}{2}$ . Лишь первая пара решений обладает определенным запасом устойчивости. Несмотря на практически гармонический характер режимов качественного понимания и соответствия с численными результатами удается достичь лишь при учете старших гармонических составляющих в аналитических разложениях.

#### Литература

1. Беловодский В.Н., Сухоруков М.Ю. «Нетрадиционные» гармонические решения уравнения Матье с симметричной характеристикой Дуффинга. – ISSN 1683-4720. Труды ИПММ НАН Украины, 2006. Том 12. – с. 19-26.
2. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. – М.: Наука, 1972. – 720 с.