УДК 62-50

СТАБИЛИЗАЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ С ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ВО ВРЕМЕНИ ЗАДЕРЖКОЙ

Никитенко Д.Г., студент; Хорхордин А.В., проф., к.т.н. (Ph.D.)
(*ГВУЗ «Донецкий национальный технический университет», г.Донецк, Украина*)

Исследуется устойчивость дискретных систем с нестационарным запаздыванием. Разработаны новые зависимые от задержки критерии устойчивости, которые зависят от минимальной и максимальной границы задержки. Первоначальный анализ приводит к критерию в зависимости от неравенства с участием определенных матриц, которые могут быть выбраны произвольно. Тщательно выбирая их, чтобы отразить соответствующие отношения между состояниями в разное время, получен более строгий критерий. Кроме того, новые результаты для зависимых от задержки робастных систем с изменяющимися во времени задержкой предоставляются на основе линейного матричного неравенств (ЛМН). Так как условия, полученные для существования допустимых регуляторов не выражаются с помощью строгих условий ЛМН, линеаризация используется для поиска подходящего контроллера. Наконец, полученные результаты, в том числе анализ устойчивости, статическая стабилизация обратной связью по выходу и динамическая стабилизации обратной связью по выходу расширяется на дискретные системы с запаздыванием, имеющие неопределенные, но ограниченные по норме параметры. Численные примеры показывают обоснованность предлагаемого подхода.

Временные задержки часто возникают в системах управления и часто являются источником нестабильности и колебаний в таких системах. Оценка и контроль устойчивости таких систем с запаздыванием имеют теоретическое и практическое значение. Повышенное внимание было уделено проблеме обратной связи для стабилизации систем с задержкой по состоянию. Большинство полученных результатов были получены с использованием независимых от задержки подходов. Так как время задержки не принимается во внимание при использовании этих подходов к разработке регуляторов, результат получается, как правило, более консервативный, чем при использовании подхода с учетом задержки. Тем не менее, более ранние методы с зависимостью от задержки для систем с нестационарными задержками в основном применяются к непрерывным системам. Сравнительно мало работ рассматривает изменяющиеся во времени задержки в случае систем с дискретным временем. Недавно была исследована стабилизация системы по обратной связи по выходу при учете зависмости от задержки с изменяющимися во времени задержками по состоянию. Новое условие устойчивости было предложено, которое зависит от пределов изменения задержки. Их результаты основаны на неравенстве со скалярным произведением двух векторов доказанном Муном. Для заданного состояния $x(k)$, где k - дискретное временем, с зависящей от времени задержкой $d(k)$, это неравенство, как правило, используется для оценки ограничений на взвешенное векторное произведение между $x(k)$ и разностью $x(k)-x(k-d(k))$, необходимая для анализа устойчивости в зависимости от задержки. Использование этого неравенства приводит к консерватизму в полученных условий устойчивости зависимых от задержки.

Эта статья представляет собой новый подход к созданию более строгого критерия устойчивости для нестационарных систем с запаздыванием зависимого от задержки, используя отношения между всеми состояниями системы $x(k)$, не требуя необходимости преобразования какой-либо модели системы. Начальный критерий находится на основе неравенства, включающего различные матриц, которые могут быть свободно выбраны, и улучшенный критерий затем находится тщательно выбирая эти матрицы с учетом корреляции между состояниями системы при различных задержках. Неравенства Муна не нужны в нашем подходе. Наше новое условие устойчивости является очень простым. используются, чтобы мы могли решать неравенства, необходимые для обеспечения статической и динамической обратной связи по выходу для стабилизации таких систем.

Рассмотрим следующую дискретную систему с нестационарной задержкой по состоянию (1):

$$\begin{aligned} & x(k+1) = Ax(k) + A_1 x(k-d(k)) + Bu(k) \\ & y(k) = Cx(k) + C_1 x(k-d(k)) \\ & x(k) = \phi(k) \;\; for \;\; k = -d_{\max}, -d_{\max}+1, \ldots, 0 \end{aligned} \tag{1}$$

где k - это дискретное время, $x(k) \in R^n$ вектор состояния, $y(k) \in R^m$ - измеряемые переменные и $u(k) \in R^l$ - управляемый вход систеы, A, A1, C и C1 - матрицы системы с соответствующими измерениями. d(k), упоминающийся как в уравнениях динамических и статических измерений, является задержкой состояния, как это часто наблюдается в различных инженерных системах. $\phi(k)$, $k = -d_{\max}, -d_{\max}+1, \ldots, 0$ - заданная последовательность начальных условий. Естественное предположение по $d(k)$ может быть сделано:

Предположение 1. Время задержки d(k) предполагается, что меняется со временем в некоторых пределах, удовлетворяющих $d_{\min} \le d(k) \le d_{\max}$, где $d_{\min}$ и $d_{\max}$ - положительные константы представляют минимальные и максимальные задержки, соответственно.

Изменяющаяся во времени задержка $d(k)$ сводится к постоянной задержке d, когда $d_{\min} = d_{\max} = d$.

В данной статье предполагается, что переменные состояния не в полной мере измеримы, то есть, мы знаем только частичную информацию о $x(k)$, например, некоторые компоненты $x(k)$, и что мы заинтересованы в создании регулятора обратной связи по выходу, такого, что полученная замкнутая система является асимптотически устойчивой. Для того, чтобы проанализировать эффективность дискретных систем с запаздыванием, введем следующие определения устойчивости и асимптотической устойчивости для дискретных систем [1].

Определение 1: Дискретная система с задержкой приведенная в (1), когда $u(k) = 0$, считается устойчивой, если для любого $\varepsilon > 0$, есть такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что $|x(k)|^2 < \varepsilon, k > 0$, при

$$\sup_{-d_{\max} \le s \le 0} |\phi(s)|^2 < \delta(\varepsilon)$$

В дополнение, если $\lim_{k\to\infty} |x(k)|^2 = 0$ при любых начальных условиях, то система заданная в (1) при $u(k) = 0$ считается асимптотически устойчивой.

Предположение 2: Мы предполагаем, что матрицы A и A1 в системе приведенной в (1) имеют следующий вид:

$$A = A_0 + \Delta A, \quad A_1 = A_{10} + \Delta A_1,$$

где A_0 и A_{10} - известные постоянные матрицы соответствующих размеров, а ΔA и ΔA_1 - вещественные нестационарные матричные функции, представляющие ограниченная по норме допустимых неопределенностей.

Определение 2. Система с неопределенной временной задержкой приведенная в (1) в предположении 2 считается робастно устойчивой, если тривиальное решение $x(k) = 0$ функционального дифференциального уравнения связанное с системой приведенной в (1) с $x(k) = 0$ - глобально равномерно асимптотически устойчиво для всех допустимых неопределенностей [2].

Рассмотрим простую сеть связи, в которой имеется несколько узлов коммутации (УК) соединенные между собой дуплексными соединительными линиями с пропускной способностью d_{kl} байт/сек. между k и l узлами (рисунок 1). Если линия связи между узлами k и l отсутствует, то $d_{kl} = 0$.

Каждый УК имеет буфер неограниченной емкости. Среднюю длину пакета положим равной $L_p = \frac{1}{\mu}$ байт. Также для простоты будем полагать, что поток данных, возникающий в узле i и предназначенный узлу j, является простейшим со средней интенсивностью λ_{ij} пакетов/сек. Соответственно, полная средняя интенсивность трафика в сети определяется по формуле

$$\lambda = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij} \tag{2}$$

где N - общее число УК. Величины λ_{ij} считаются известными, т.к. их можно либо измерить, если сеть находится в режиме эксплуатации, либо оценить путем моделирования. Действительно, при эксплуатации сети для каждого узла i можно подсчитать число переданных сообщений C_{ij} узлу j за время наблюдения T сек. Тогда оценка интенсивности определяется как $\hat{\lambda}_{ij} = \frac{C_{ij}}{T}$.

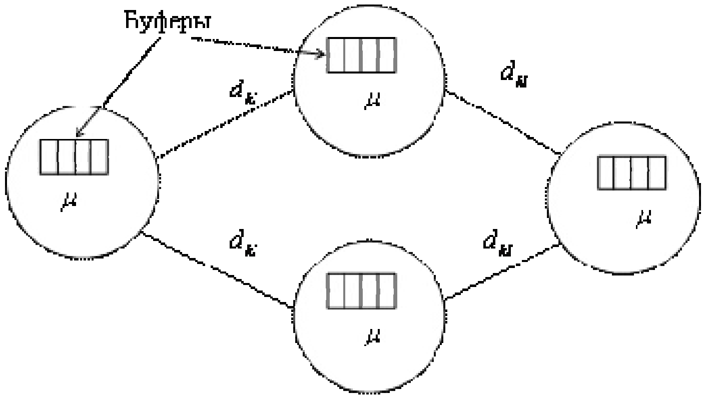

Рисунок 1 – Упрощенная схема сети связи

Так как пакеты из узла i в узел j могут передаваться разными маршрутами, то средняя интенсивность использования канала не равна в точности λ_{ij}. Однако, зная коэффициенты использования той или иной линии связи, можно определить данную характеристику по формуле

$$\gamma_{kl} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}x_{kl}^{(i,j)}, \tag{3}$$

где $x_{kl}^{(i,j)}$ - доля потока λ_{ij}, проходящая по линии (k,l). Величины $x_{kl}^{(i,j)}$ подобны весовым коэффициентам $p_{i,v}^{(j)}$ в игровом методе построения ПРИ и выбора маршрутов. Основное их отличие заключается в том, что они являются характеристикой потока строго заданного маршрута между узлами i и j в то время как весовые коэффициенты характеризуют распространение потока в целом, не привязываясь к конкретному маршруту. Поэтому величины $x_{kl}^{(i,j)}$ дают более полную информацию о сети связи и могут быть определены экспериментально подобно коэффициентам $p_{i,v}^{(j)}$.

Важной характеристикой качества функционирования сети является среднее время T доставки пакета, которая определяется как математическое ожидание от временных задержек Z_{ij} доставки пакетов между узлами i и j:

$$T = M\{Z\} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} Z_{ij}\, p_{ij}, \tag{4}$$

где p_{ij} - вероятность передачи сообщения от узла i к узлу j. Данную вероятность можно выразить через интенсивность потоков λ_{ij}, если предварительно выполнить их нормировку, т.е.

$$p_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{\lambda}. \tag{5}$$

Тогда выражение для средней задержки пакета в сети можно записать в виде:

$$T = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} Z_{ij}\lambda_{ij} \tag{6}$$

Применение формулы Литтла к данному выражению приводит к общему, и в то же время чрезвычайно простому результату, впервые полученному Л. Клейнроком [3]:

$$T = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} \gamma_{kl} t_{kl}, \tag{7}$$

где t_{kl} - среднее время пребывания сообщений в линии.

В общем случае получить аналитические выражения для t_{kl} невозможно, однако, учитывая сделанные предположения о пуассоновском потоке заявок, каждую линию связи можно рассмотреть как независимую цифровую систему типа M/M/1 и воспользоваться ранее выведенной формулой для определения среднего времени нахождения пакета в системе:

$$t_{kl} = \overline{x_{kl}} + W_{kl}, \tag{8}$$

где $\overline{x_{kl}} = \frac{1}{\mu d_{kl}}$ - среднее время передачи пакета по каналу (k,l); $W_{kl} = \frac{Z}{\mu d_{kl}(1-Z)}$ - среднее время пребывания пакета в буфере. Величина нагрузки в данном случае определяется как $Z = \frac{\gamma_{kl}}{\mu d_{kl}}$. Таким образом, получаем следующее выражение для среднего времени пребывания пакета в системе:

$$t_{kl} = \frac{1}{\mu d_{kl}} + \frac{1}{\mu d_{kl}}\frac{\gamma_{kl}}{\mu d_{kl} - \gamma_{kl}} = \frac{1}{\mu d_{kl} - \gamma_{kl}} \tag{9}$$

и приходим к окончательной формуле для вычисления средней задержки передачи пакета в цифровой системе:

$$T = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} \frac{\gamma_{kl}}{\mu d_{kl} - \gamma_{kl}}. \tag{10}$$

Полученное выражение для средней задержки пакета в сети связи позволяет поставить обратную задачу: найти величины $x_{kl}^{(i,j)}$, при которых средняя задержка T минимальна. Причем на основе вычисленных величин $x_{kl}^{(i,j)}$ можно сформировать матрицы весовых коэффициентов $P^{(j)}$, используемые в игровом методе при формировании маршрутов движения заявок. К сожалению, на сегодняшний день отсутствует общее решение данной задачи, но известны ее частные решения [4].

Перечень ссылок

1. Fridman E, Seuret A, Richard J-P. Robust sampled data stabilization of linear systems: an input delay approach. Automatica 2004; 40: 1441–1446

2. Hale JK, Verduyn-Lunel, SM. Introduction to functional differential equations. Springer Verlag, NewYork, 1993

3. Kleinrock L. Queueing Systems.Vol. 1, John Wiley and Sons, 1975.

4. Вишневский В.М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. М.: Техносфера, 2003. – 512 с.