УДК 571.926

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОНТПРИМЕРОВ И СОФИЗМОВ КАК МЕТОД АКТИВИЗАЦИИ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТУДЕНТОВ.

Улитин Геннадий Михайлович,

ДонНТУ, кафедра высшей математики;

Гладун Алексей Владимирович,

ДонНТУ, кафедра высшей математики.

Розглянуто деякі питання активізації навчального процесу викладання вищої математики в технічному університеті. Звернено увагу викладачів на застосування контрприкладів і софізмів при вивчанні курсу вищої математики. Наведені приклади, які можуть визвати інтерес у студентів.

I. Вступление. Общеизвестно, что математика занимает важное место в воспитании научного и логического мышления инженера. При этом все методы обучения основаны на активизации резервных возможностей личности, на ее заинтересованности в учебном процессе. Это может достигаться различными способами, как например, применением игровых ситуаций, использованием мультимедийных средств, приложением математики в реальных задачах практики.

Все эти элементы стимулируют дополнительный интерес, проявляют чувства азарта, соревнования, интереса. Остановимся в частности, на примере использования контрпримеров и софизмов в учебном процессе при изучении высшей математики. Контпримеры и софизмы нарушают спокойное однообразное течение лекции, наполненной иллюстративными примерами. Они будоражат ум студентов, заставляя их по-новому взглянуть на то или иное понятие из высшей математики, глубже разобраться в нем. Это, естественно, способствует лучшему усвоению курса.

Контпримеры, опровергая ложные утверждения, имеют доказательную силу и поэтому активно используются в математике. В то же время они разбросаны по ее различным разделам и часто рассчитаны на серьезную математическую подготовку. Отдельными авторами предпринимались попытки собрать наиболее важные, по их мнению, контпримеры в одном пособии. Так еще в середине прошлого века появилась книга “Контпримеры в анализе” американских математиков Б. Гелбаума и Дж. Олмстеда [1]. Среди современных авторов можно указать на Владимира Шибинского [2] и В. Босса [3]. Двенадцатый том лекций В. Босса по высшей математике посвящен контпримерам и парадоксам. Однако содержание этих пособий шире, чем современный курс высшей математики в техническом университете [1, 3] или рассчитано на студентов математических факультетов [2]. В то же время, существует потребность в отборе таких примеров, которые могли бы быть использованы в современном курсе высшей математики технических университетов, и были бы доступны для понимания среднего студента.

II. Постановка задания. На примере изучения курса высшей математики [4] рассмотрим контпримеры и софизмы, которые могут быть использованы при последовательном изучении разделов курса в техническом университете.

III. Результаты. При изложении раздела «Линейная алгебра» целесообразно на контпримере показать, что в общем случае произведение матриц не обладает коммутативным свойством [4]. Сразу после изучения тем «Матрицы» и «Определители», или позже, для повторения этих тем, можно использовать софизм, который требует четкого разграничения свойств определителей и свойств матриц:

$$12 = 21 - 9 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (9 - 4) = 15 .$$

Понятно, что в нем два свойства определителей перепутаны со свойствами матриц. Его решение позволяет обратить внимание на отличия операций с определителями от операций с матрицами.

При изложении раздела «Дифференциальное исчисление» остается за «кадром» такой факт. Всегда ли дифференцируемая функция имеет непрерывную производную? Здесь уместно привести пример непрерывной функции [3]

$$f(x)=\begin{cases} x+x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

для которой $f'\left(0\right)=1$ и $f'\left(x\right)=2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}+1$ при $x\neq 0$. Таким образом, производная разрывна в точке $x=0$.

Часто у студентов из условия знака производной в определенной точке следует утверждение о монотонности функции в окрестности этой точки. Опять же из этого примера следует, что функция не является монотонной, так как ее производная принимает в любой окрестности точки значения разных знаков (сколь угодно большие!).

При изучении теорем игнорируются условия их применимости, а основное внимание обращается на заключительную часть формулировки или соответствующую формулу. Этот недостаток можно проиллюстрировать, например, на теореме Ролля, пояснив необходимость условий непрерывности, дифференцируемости и равенства значений функций на концах отрезка [5].

При изучении неопределенного интеграла можно привести следующий софизм [4]. Вычислим интеграл

$$\int\sin 2x\,dx=-\frac{\cos 2x}{2}+C.$$

С другой стороны, используя замену, получаем

$$\int\sin 2x\,dx=2\int\sin x\cos x\,dx=\begin{pmatrix} t=\sin x\\ dt=\cos x\,dx\end{pmatrix}=2\int t\,dt=$$

$$=t^2+C=\sin^2 x+C.$$

Сравнивая полученные результаты, приходим к равенству

$$-\frac{\cos 2x}{2}=\sin^2 x\ ?$$

Пример обращает внимание на то, что нельзя игнорировать произвольную постоянную C.

Для темы «Определенный интеграл» можно использовать хорошо известный софизм о длине диагонали квадрата. Рассмотрим квадрат со стороной равной единице и построим на диагонали квадрата ломанную, соединяющую две его вершины, звенья которой параллельны его сторонам. Нетрудно заметить, что длина этой линии не зависит от числа звеньев и равна 2. Теперь устремим число звеньев к бесконечности. В пределе мы получим «диагональ» квадрата, длина которой равна $\sqrt{2}$!? Приведен пример линии, не дифференцируемой в каждой точке и, следовательно, известная формула $\ell = \int_a^b \sqrt{1+\left(y'\right)^2}\,dx$ не применима. А действительная длина этой линии, сломанной в каждой точке, равна 2, что легко показать и непосредственно, вводя ΔS_i – длины звеньев и переходя к пределу.

В теории рядов мы сталкиваемся с диалектикой конечного и бесконечного. Ряд – это «сумма» бесконечного числа слагаемых, поэтому нельзя безоговорочно пользоваться законами коммутативности и ассоциативности, что может привести к неверным результатам. Разграничение рядов на абсолютно и условно сходящиеся позволяет устранить эти трудности. На следующем примере покажем к чему приводит игнорирование этих понятий.

Обозначим через S сумму ряда [6]

$$S = 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \cdots, \text{ где } p > 0.$$

Очевидно, что $S > 0$.

Представим сумму в виде

$$S = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots - 2\left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{6^p} + \cdots\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2^{p-1}}\right)\sigma, \text{ где } \sigma = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots > 0.$$

При $0 < p < 1$ получаем $S < 0$! При $p = 1$ $S = 0$! При $p > 1$ получаем верный результат, который, кстати, выражается через дзета-функцию Римана $\xi(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. А при $0 < p < 1$ ряд является условно сходящимся и следовательно такие операции не допустимы.

При рассмотрении вопросов интегрирования уравнений с разделяющимися переменными и однородных уравнений полезно привести примеры на потерю решений и объяснить их происхождение [4].

IV. Выводы. Очевидно, все рассмотренные здесь примеры не исчерпывают широкой возможности использования контпримеров и софизмов в учебном процессе. Необходима дальнейшая работа по их отбору из существующих и по составлению новых для курса высшей математики в техническом университете. Главный смысл такой работы в том, что они вызывают живой интерес у студентов, что позволяет более прочно усваивать учебный материал и стимулировать их логическое мышление.

Литература.

1. *Гелбаум Б., Олистед Дж. Контрпримеры в анализе. – М.: Мир, 1967. – 252с.*
2. *Шибинский В.М. Примеры и контрпримеры в курсе математического анализа. − М.: Высшая школа, 2007. – 544с.*
3. *Босс В. Лекции по математике. Т 12: Контрпримеры и парадоксы. Учебное пособие. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 216с.*
4. *Улитин Г.М. Гончаров А.Н. Курс лекций по высшей математике. – Учебное пособие. – Донецк, ДонНТУ, 2011. – 351с.*
5. *Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Наука, т.1, 1969. – 606с.*
6. *Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Наука, т.2, 1969. – 800с.*