О прикладных задачах в курсе высшей математики

Тю Н.С., Локтионов И.К., Медовникова А.А.
Донецкий национальный технический университет

Викладено принципи відбору прикладних задач, які можуть бути використані при читанні курсу "Вища математика".

Многолетний опыт преподавания математики студентам инженерных и экономических специальностей вузов показывает, что решение математических задач с практическим содержанием вызывает значительный интерес у учащихся. Удачно подобранные примеры расширяют кругозор студентов, формируют их целостное естественнонаучное мировоззрение, а также демонстрируют значение и роль математики для избранной ими специальности.

Изучение математики, обычно, начинается с первого курса обучения, поэтому какими-либо знаниями по избранной специальности студенты, как правило, ещё не обладают. В связи с этим, выбираемая для изложения на лекции задача, безусловно, должна быть достаточно простой, доступной для понимания вчерашних школьников. После формулировки задачи, перед тем как приступить к её решению, целесообразно пояснить и уточнить специальные понятия, которые встречаются в задаче. Далее, при решении поставленной задачи необходимо использовать те математические методы, положения и выводы, которые только что были изложены на лекции. Кроме того, предварительные математические сведения, требуемые для решения задачи и выходящие за рамки школьного курса математики, должны быть уже изучены на предыдущих лекциях и проработаны на практических занятиях. И, наконец, после решения задачи полезно кратко сформулировать положения и выводы, вытекающие из этого решения.

Рассмотрим в качестве иллюстрации две задачи. Первая из них может быть изложена в разделе «Дифференциальные уравнения» и связана с изучением временной зависимости численности популяций в различных ситуациях. Что касается второй задачи, то она относится к оптимальному планированию производства и является по существу задачей нелинейного математического программирования. Она может быть рассмотрена на лекции по теме «Абсолютный экстремум функции многих переменных».

Задача I. Динамика популяций. Пусть $x(t)$ - численность популяции в момент времени $x(t)$. За время Δt её изменение Δx будет пропорционально $x(t)$ и этому промежутку времени, поэтому

$$\Delta x = k\,x(t)\Delta t\,, \tag{1}$$

где k - относительное изменение численности в единицу времени. Если обе части (1) поделить на Δt и перейти к пределу $\Delta t \to 0$, то получится дифференциальное уравнение (ДУ) первого порядка

$$\dot{x} = k\;x(t). \tag{2}$$

При достаточно малых Δt коэффициент k можно считать постоянным. Тогда уравнение (2) легко интегрируется и его решением будет экспоненциальная функция $x(t) = x_0 \exp\; k(t - t_0)$, где x_0 – численность популяции в момент времени t_0. Если $k > 0$, то численность популяции растет; при $k < 0$ - уменьшается, а при $k = 0$ остается неизменной.

В общем случае k является функцией $x(t)$, причем, как показывает опыт, убывающей. В линейном приближении правую часть уравнения (2) можно представить в виде:

$$f(x) = k\,x = (k_0 - \varepsilon\,x)\,x\;, \tag{3}$$

где k_0 и ε - некоторые положительные константы. Качественный анализ решения этого уравнения приведен на рис. 1, 2. Точкам ***A*** и ***B*** соответствуют два стационарных устойчивых решения $x_{\mathbf{A}}$=0 и $x_{\mathbf{B}} = k_0 / \varepsilon$. Если начальное значение численности популяции x_0 меньше $x_{\mathbf{B}}$, то скорость её роста $\dot{x}$ положительна и с течением времени она эволюционирует к своему предельному значению $x_{\mathbf{B}}$. Точка максимума функции f $x_{max} = k_0 / 2\varepsilon$ является точкой перегиба *логистической* кривой, изображенной на рис.1 сплошной линией. Если же $x_0 > x_{\mathbf{B}}$, то $\dot{x} = f$ отрицательна (рис.2): численность популяции
уменьшается и асимптотически стремится к значению $x_{\mathbf{B}}$

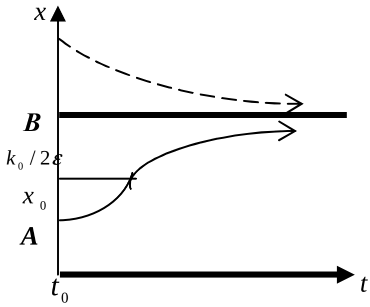

Рис.1.

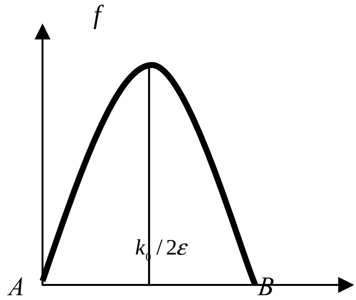

Рис.2.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда из популяции удаляются особи с интенсивностью c, так что скорость изменения численности популяции определяется функцией

$$f(x) = k_0 x - \varepsilon x^2 - c, \qquad c > 0. \tag{4}$$

Точки пересечения графика этой функции с осью абсцисс определяют два равновесных состояния, одно из которых устойчиво (состояние ***B***), а другое (состояние ***A***) нет (рис.3,4).

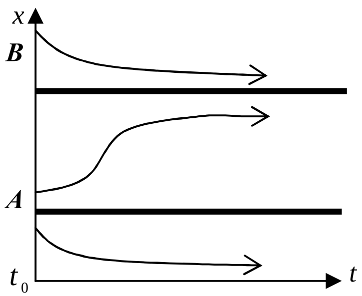

Рис.3.

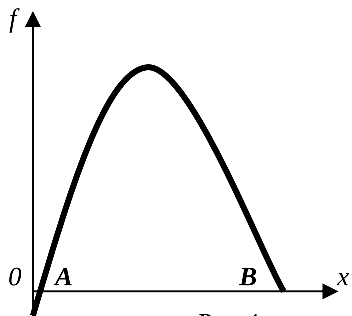

Рис.4.

Если по каким-либо причинам численность популяции окажется меньше x_A, то в дальнейшем она исчезает.

Отметим, что к ДУ (2) с правыми частями (3),(4) приводят некоторые задачи, встречающиеся в экономике, радиофизике и т.д. [1-3]. Было бы целесообразно излагать их студентам соответствующих специальностей.

Задача[1] II. Оптимальное планирование производства. Кривая производственных возможностей авиационного завода описывается уравнением $100x^2 + 25y^2 = 2500$, где x и y - количество произведённых самолётов и вертолётов. На рынке их стоимости составляют 3 млн. и 2 млн. гривень соответственно. Составить такой план производства, при котором прибыль, полученная заводом, будет максимальной.

Решение. Поделив обе части уравнения кривой производственных возможностей на 2500, приведем его к виду:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{100} = 1. \tag{5}$$

Это уравнение показывает, какое максимальное количество изделий x и y может произвести предприятие при его полной загрузке. Например, если оно построит пять самолётов $(x = 5)$, то, как следует из (5), авиазавод из-за ограниченности своих возможностей вертолеты изготовить уже не сможет $(y = 0)$. Уменьшив производство самолётов до четырёх $(x = 4)$, благодаря освободившимся ресурсам предприятие способно будет произвести шесть вертолётов $(y = 6)$. В задаче требуется составить такой план производства (x, y), чтобы прибыль авиазавода $z = 3x + 2y$ (млн. гривень) была максимальной. По своему смыслу переменные x и y должны быть неотрицательными: $x \geq 0, \quad y \geq 0$. Кроме того, предприятие по каким-либо причинам может производить продукцию ниже своих предельных возможностей, поэтому переменные x и y должны удовлетворять неравенству

1. Приведённые в задаче числовые данные являются условными.

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{100}\le 1. \qquad (6)$$

При неотрицательных значениях x, y это неравенство определяет замкнутую выпуклую область, ограниченную осями координат и частью эллипса с полуосями $a=5$ и $b=10$ (рис. 5).

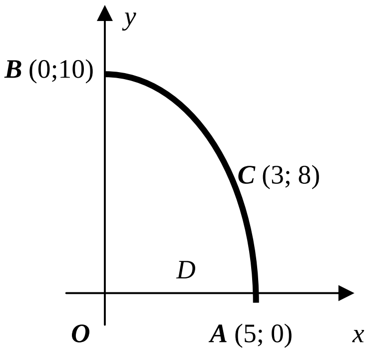

Рис. 5. Область D представляет собой множество возможных значений переменных $x,\ y$ в задаче II.

Поскольку целевая функция задачи является линейной, а область D ограниченной и замкнутой, то согласно теореме об абсолютном экстремуме линейной функции, наибольшее OA, значение функция $z=3x+2y$ может достигать или на отрезке или на отрезке OB, или на кривой производственных возможностей BCA.

На отрезке OA: $y=0$, поэтому $z=3x,\ x\in[0;5]$. Следовательно, $z_{\max}(x;\ y=0)=z(A)=15$.

На отрезке OB: $x=0$, поэтому $z=2y,\ y\in[0;10]$. Значит $z_{\max}(x=0;\ y)=z(B)=20$.

И, наконец, на кривой BCA: $y=2\sqrt{25-x^2}$, поэтому $z=3x+4\sqrt{25-x^2},\quad x\in[0;5]$. Имеем $z'=3-4x\Big/\sqrt{25-x^2}=0$. Отсюда

$x_C = 3, \quad y_C = 2\sqrt{25 - 3^2} = 8$. Подставив эти значения переменных в целевую функцию, получим $z(C) =$ 25.

Таким образом, план $(x_C = 3,\ y_C = 8)$ является оптимальным; максимальная прибыль, которую может получить предприятие, составляет 25 млн. гривень.

Примеров задач, аналогичных рассмотренным выше можно привести очень много [4]. Все они, при удачных формулировках и изложению в соответствующих местах курса математики, вызовут живой интерес у студентов, активизируют процесс их обучения и принесут им пользу в дальнейшем при изучении специальных предметов.

Вместе с тем, обучение математике, безусловно, нельзя сводить к решению только прикладных задач, как это делается в некоторых учебных пособиях [5,6]. Целью курса высшей математики является формирование базовых математических знаний студентов для дальнейшего изучения ими специальных дисциплин.

Формализованное преподавание математики без обращения к конкретным примерам, может породить у студентов ошибочное мнение, что математика представляет собой игру разума, которая не имеет отношения к реальной жизни.

Литература

1. Chiang Alpha C. Fundamental Methods of Mathematical Economics. Third Edition.- New York, Mc Graw-Hill, Inc., 1984.-788 p.
2. Горяченко В.Д. Элементы теории колебаний: Учебное пособие для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. Шк.; 2001.- 395 с.
3. Арнольд В.И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели. - М.: МЦНМО, 2004.- 32 с.
4. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах.-М.: Высшая школа, 1975. - 270 с.
5. Колесников А.Н. Краткий курс математики для экономистов: Учебное пособие. - М.: ИНФРА-М, 1997. – 208 с.

6. Ляшенко И.Н., Ляшенко Е.И. Математика для экономистов: Учебное пособие для подготовки бакалавров экономического профиля. - Донецк – 1998. - 228 с.