**Условие одного существования**
**линейного инвариантного соотношения**
**в задаче о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа.**

***М.Е. Лесина, Я.В. Зиновьева.***
*Донецкий национальный технический университет.*

*Постановка задачи о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа, соединенных идеальным сферическим шарниром, шесть различных форм уравнений движения и девять точных решений задачи указаны в монографии [1]. В предлагаемой работе изучены условия существования линейного инвариантного соотношения, для которого угол между вектором момента количества движения системы тел, сохраняющим направление в пространстве, и неизменным в теле вектором остается постоянным.*

Введем единичный неизменный в теле $S$ вектор $\mathbf{э}^*$ и обозначим $\mathbf{э}_i^*$ его компоненты в неизменно связанном с телом $S$ базисе $\mathbf{e}_1^*\mathbf{e}_2^*\mathbf{e}_3^*$

$$\mathbf{э}^* = э_1^*\mathbf{e}_1^* + э_2^*\mathbf{e}_2^* + э_3^*\mathbf{e}_3^* .$$

Момент количества движения (МКД) системы тел в полуподвижном базисе $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$

$$\mathbf{g} = G_1\mathbf{e}_1 + G_2\mathbf{e}_2 + G_3\mathbf{e}_3 \tag{1}$$

имеет компоненты[1] [1, (5.15)$_*$–(5.17)$_*$]

$$G_1 = (A - N\cos\theta)\,\omega_1 + (A_0 - N\cos\theta)\,\Omega_1 , \tag{2}$$

$$G_2 = (A - N\cos\theta)\,\omega_2 + (A_0\cos\theta - N)\,\Omega_2 - n_0\sin\theta , \tag{3}$$

$$G_3 = (A_0\Omega_2 - N\omega_2)\sin\theta + n_0\cos\theta + n . \tag{4}$$

Этот вектор сохраняет направление в пространстве, поэтому имеет интеграл, выражающий постоянство модуля МКД системы [1, ]

$$G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 = g^2. \tag{5}$$

---

[1] При ссылке на формулы монографии [1] будем снабжать их звездочкой.

Базисные векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*$ связаны соотношениями

$$\mathbf{e}_1^* = \mathbf{e}_1 \cos\varphi + \mathbf{e}_2 \sin\varphi, \quad \mathbf{e}_2^* = -\mathbf{e}_1 \sin\varphi + \mathbf{e}_2 \cos\varphi, \quad \mathbf{e}_3^* = \mathbf{e}_3, \qquad (6)$$

в которых $\varphi$ – угол собственного вращения тела $S$ относительно оси динамической симметрии. Зависимость угла $\varphi$ от времени $t$ находим из циклического интеграла [1, (5.11)$_*$]

$$\omega_3 + \dot{\varphi} = n/I = \tilde{n}. \qquad (7)$$

Компоненты вектора $\mathbf{g}$ и угловой скорости $\boldsymbol{\omega}^*$ тела $S$ в неизменно связанном с этим телом базисе, вследствие (6) имеют вид

$$G_1^* = G_1 \cos\varphi + G_2 \sin\varphi, \quad G_2^* = -G_1 \sin\varphi + G_2 \cos\varphi, \quad G_3^* = G_3, \quad (8)$$

$$\begin{gathered} \omega_1^* = \omega_1 \cos\varphi + \omega_2 \sin\varphi, \ \omega_2^* = -\omega_1 \sin\varphi + \omega_2 \cos\varphi, \\ \omega_3^* = \omega_3 + \dot{\varphi} = \tilde{n}, \end{gathered} \qquad (9)$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – компоненты вектора угловой скорости движения базиса $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$.

Так как вектор $\mathbf{g}$ сохраняет направление в пространстве, то

$$\dot{\mathbf{g}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g} = 0. \qquad (10)$$

Уравнение (10) в координатной форме принимает вид [1, (5.38)$_*$–(5.40)$_*$]

$$G_1^{\bullet} + \omega_2 G_3 - \omega_3 G_2 = 0,$$

$$G_2^{\bullet} + \omega_3 G_1 - \omega_1 G_3 = 0,$$

$$G_3^{\bullet} + \omega_1 G_2 - \omega_2 G_1 = 0.$$

Зададим инвариантное соотношение в виде

$$\mathbf{g} \cdot \text{Э}^* = \text{const}$$

и вычислим производную в силу уравнения (10) от этого соотношения

$$\text{Э}^* \cdot (\boldsymbol{\omega}^* \times \mathbf{g}) = 0. \qquad (11)$$

Если векторы $\boldsymbol{\omega}^*$ и $\mathbf{g}$ коллинеарны, (11) тождественно обращается в нуль. При этом вектор $\boldsymbol{\omega}^*$ сохраняет направление и в пространстве.

Изучим этот представляющий самостоятельный интерес случай. Изменение вектора $\mathbf{g}$ в базисе $\mathbf{e}_1^*\mathbf{e}_2^*\mathbf{e}_3^*$ получим из (11)

$$\dot{G}_1^* + \omega_2^* G_3 - \tilde{n} G_2^* = 0\,, \qquad (12)$$

$$\dot{G}_2^* + \tilde{n} G_1^* - \omega_1^* G_3 = 0\,, \qquad (13)$$

$$\dot{G}_3^* + \omega_1^* G_2^* - \omega_2^* G_1^* = 0\,. \qquad (14)$$

Выражение $\omega_1^* G_2^* - \omega_2^* G_1^*$ с учетом (8), (9) принимает вид

$$\omega_1 G_2 - \omega_2 G_1 \ ,$$

поэтому уравнение (14) теперь таково

$$G_3^{\bullet} + \omega_1 G_2 - \omega_2 G_1 = 0\,. \qquad (15)$$

Считая, что компоненты $G_1^*, G_2^*, G_3^*$ постоянны, из уравнений (15), (12), (13) имеем

$$\omega_1 G_2 - \omega_2 G_1 = 0\,,$$
$$\omega_2^* G_3^{\bullet} - \tilde{n} G_2^* = 0\,,$$
$$\tilde{n} G_1^* - \omega_1^* G_3 = 0\,.$$

Из этих соотношений находим

$$G_1^* = B\omega_1^*\,, \qquad (16)$$
$$G_2^* = B\omega_2^*\,, \qquad (17)$$
$$G_3 = B\,\tilde{n} \qquad (18)$$

и заключаем, что вектор $\boldsymbol{\omega}^*$ имеет постоянные компоненты

$$\boldsymbol{\omega}^* = \omega_{10}^* \mathbf{e}_1^* + \omega_{20}^* \mathbf{e}_2^* + \tilde{n}\,\mathbf{e}_3\ .$$

Итак, векторы $\mathbf{g}$ и $\boldsymbol{\omega}^*$ неизменны в теле и в пространстве.

Подставив (16), (17) в (8), получим

$$G_1 = B\omega_1\,, \qquad (19)$$

$$G_2 = B\omega_2. \tag{20}$$

Учитывая соотношения (2)–(4), запишем выражения (18)–(20) таким образом

$$(A - B - N\cos\theta)\,\omega_1 + (A_0 - N\cos\theta)\,\Omega_1 = 0\,, \tag{21}$$

$$(A - B - N\cos\theta)\,\omega_2 + (A_0\cos\theta - N)\,\Omega_2 = n_0\sin\theta\,, \tag{22}$$

$$(A_0\Omega_2 - N\omega_2)\sin\theta = B\,\tilde{n} - n_0\cos\theta - n\,. \tag{23}$$

Из уравнений (22), (23) находим $\omega_2$, $\Omega_2$ в виде

$$\omega_2 = \frac{A_0 n_0 + N n_* - (A_0 n_* + N n_0)\cos\theta}{(H - A_0 B)\sin\theta}\,, \tag{24}$$

$$\Omega_2 = \frac{N n_0 + (A - B)\,n_* + [(A - B)\,n_0 + N n_*]\cos\theta}{(H - A_0 B)\sin\theta}\,, \tag{25}$$

где $n_* = B\tilde{n} - n$, $H = AA_0 - N^2$,

а из (21) с учетом [1, (5.6)*]

$$\Omega_1 = \dot\theta + \omega_1 \tag{26}$$

находим

$$\dot\theta = -\frac{A + A_0 - B - 2N\cos\theta}{A_0 - N\cos\theta}\,\omega_1\,. \tag{27}$$

Подставив (18)–(20) в интеграл (5), получим

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 + \tilde{n}^2 = g_*^2\,, \tag{28}$$

где

$$g_*^2 = g^2/B^2\,.$$

Из (28) следует выражение для $\omega_1$

$$\omega_1 = \sqrt{g_*^2 - \tilde{n}^2 - \omega_2^2}\,, \tag{29}$$

которое с учетом (24) принимает вид

$$\omega_1 = \sqrt{g_*^2 - \tilde{n}^2 - \frac{[A_0 n_0 + N n_* - (A_0 n_* + N n_0)\cos\theta]^2}{(H - A_0 B)^2 \sin^2\theta}} \,. \qquad (30)$$

Учитывая, что

$$\omega_1^* = \omega_{10}^* \,, \quad \omega_2^* = \omega_{20}^* \,, \qquad (31)$$

из соотношений (9) имеем

$$\omega_1 = \omega_{10}^* \cos\varphi - \omega_{20}^* \sin\varphi \,, \qquad (32)$$

$$\omega_2 = \omega_{10}^* \sin\varphi - \omega_{20}^* \cos\varphi \,. \qquad (33)$$

Продифференцируем по времени выражение (33), учтем (32), и получим

$$\omega_2' \dot{\theta} = \omega_1 \dot{\varphi} \,. \qquad (34)$$

Подставив в (34) выражения (27), (7), находим

$$\tilde{n} = \omega_3 - \frac{A + A_0 - B - 2N\cos\theta}{A_0 - N\cos\theta}\,\omega_2^0 \,. \qquad (35)$$

Компоненты $\omega_3$, $\Omega_3$ связаны с $\omega_2$, $\Omega_2$ соотношениями [1, (5.55)$_*$]

$$\omega_3 \sin\theta = \Omega_2 - \omega_2 \cos\theta \,, \qquad (36)$$

$$\Omega_3 \sin\theta = \Omega_2 \cos\theta - \omega_2 \,. \qquad (37)$$

Внесем в (35) соотношения (36), (24), (25) и потребуем, чтобы полученное выражение обращалось в тождество. Это требование приводит к условиям

$$B = A - A_0 \,, \qquad (38)$$

$$INn_0 = (A_0 I - H)\, n \,,$$

при которых выражения (24), (25) упрощаются

$$\omega_2 = \frac{-(A - I) + N\cos\theta}{N\sin\theta}\,\tilde{n} \,, \qquad (39)$$

$$\Omega_2 = \frac{(A-I)\cos\theta - N}{N\sin\theta}\tilde{n}\,. \tag{40}$$

Вводим обозначения

$$A - I = bN,$$

$$\tilde{n} = g_* \sin\beta \tag{41}$$

и записываем теперь (39), (40), (30) так

$$\omega_2 = \frac{-b+\cos\theta}{\sin\theta} g_* \sin\beta, \tag{42}$$

$$\Omega_2 = g_* \frac{b\cos\theta - 1}{\sin\theta}\sin\beta, \tag{43}$$

$$\omega_1 = g_* \sqrt{\cos^2\beta \frac{(b-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}\sin^2\beta}\,. \tag{44}$$

При условии (38) из (27) устанавливаем

$$\dot{\theta} = -2\omega_1\,. \tag{45}$$

Зависимость угла $\theta$ от времени $t$ находим из уравнения (45) после подстановки в него (44)

$$\cos\theta = b\sin^2\beta + \sqrt{1-b^2\sin^2\beta}\ \cos\beta\cos 2\tilde{t}, \tag{46}$$

где

$$\tilde{t} = g_*(t - t_0), \tag{47}$$

$$g_*\, t_0 = -\frac{1}{2}\arccos\frac{\cos\theta_0 - b\sin^2\beta}{\sqrt{1-b^2\sin^2\beta\cos\beta}}\,.$$

Подставив (58) в (54)–(56), находим

$$\omega_2(t) = g_* \frac{\left(-b\cos\beta + \sqrt{1-b^2\sin^2\beta}\ \cos 2\tilde{t}\right)\sin\beta\cos\beta}{\sqrt{1-\left(b\sin^2\beta + \sqrt{1-b^2\sin^2\beta}\ \cos\beta\cos 2\tilde{t}\right)^2}}, \tag{48}$$

$$\Omega_2(t) = g_* \frac{\left(b^2 \sin^2 \beta - 1 + b\sqrt{1 - b^2 \sin^2 \beta}\ \cos\beta \cos 2\tilde{t}\right) \sin\beta}{\sqrt{1 - \left(b \sin^2 \beta + \sqrt{1 - b^2 \sin^2 \beta}\ \cos\beta \cos 2\tilde{t}\right)^2}}, \quad (49)$$

$$\omega_1(t) = g_* \frac{\sqrt{1 - b^2 \sin^2 \beta}\ \cos\beta \sin 2\tilde{t}}{\sqrt{1 - \left(b \sin^2 \beta + \sqrt{1 - b^2 \sin^2 \beta}\ \cos\beta \cos 2\tilde{t}\right)^2}}. \quad (50)$$

Из соотношения (26) с учетом (45) имеем

$$\Omega_1(t) = -\omega_1(t). \quad (51)$$

Представим уравнение (34) в виде

$$\dot{\omega}_2 = \dot{\varphi}\, \omega_1$$

и, подставив в него (29), (41), получим

$$\dot{\varphi} = \frac{\dot{\omega}_2}{\sqrt{g_*^2 \cos^2 \beta - \omega_2^2(t)}}.$$

В результате интегрирования находим зависимость угла $\varphi$ от времени

$$\varphi(t) = \varphi_* - \arccos \frac{\omega_2(t)}{g_* \cos\beta},$$

где

$$\varphi_*(t) = \varphi_0 + \arccos \frac{\omega_{20}}{g_* \cos\beta}.$$

Теперь можно представить

$$\cos(\varphi - \varphi_*) = \frac{\omega_2(t)}{g_* \cos\beta}, \quad \sin(\varphi - \varphi_*) = -\frac{\omega_1(t)}{g_* \cos\beta}.$$

Определив из этих соотношений $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ и, подставив их в (9), получим

$$\omega_{10}^* = g_* \sin\beta \sin\varphi_*, \quad \omega_{20}^* = g_* \sin\beta \cos\varphi_*.$$

Зависимость от времени угла $\Phi$ собственного вращения тела $S_0$ вокруг оси его динамической симметрии найдем из циклического интеграла [1, (5.11)*]

$$\dot{\Phi} + \Omega_3 = n_0 / I_0 = \tilde{n}_0 . \tag{52}$$

Предполагая вначале, что

$$b \neq 1$$

из (52) с учетом (37), (42), (43), (46), (47) находим

$$\begin{gathered} \Phi(t) = \Phi_* + (\tilde{n}_0 + b\, g_* \sin\beta)\, t + \\ + 2\,(1-b)\mu_* \sin\beta \operatorname{arctg}(\mu \operatorname{tg} g_*(t-t_0)) + \arccos\frac{\omega_2(t)}{g_* \cos\beta}, \end{gathered} \tag{53}$$

где

$$\mu_* = \frac{1 - b\sin^2\beta + \sqrt{1 - b^2\sin^2\beta}\ \cos\beta}{(1-b)}, \tag{54}$$

$$\Phi_* = \Phi(0) - \arccos\frac{\omega_{20}}{g_* \cos\beta}. \tag{55}$$

Таким образом, компоненты векторов угловых скоростей тел $S$ и $S_0$ в полуподвижных базисах $\omega_1$, $\omega_2$, $\Omega_1$, $\Omega_2$ определены соотношениями (48)–(51).

Заметим, что из (31) следует, что тело $S$ равномерно вращается со скоростью

$$\boldsymbol{\omega}^* = \omega_{10}^* \mathbf{e}_1^* + \omega_{20}^* \mathbf{e}_2^* + \tilde{n}\,\mathbf{e}_3 ,$$

а тело $S_0$ под действием упругого элемента движется со скоростью

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\Omega}_{(t)}^* = \left(\Omega_1^{(t)} \cos\Phi + \Omega_2^{(t)} \sin\Phi\right) \text{э}_1^* + \\ + \left(-\Omega_1^{(t)} \sin\Phi + \Omega_2^{(t)} \cos\Phi\right) \text{э}_2^* + \tilde{n}_0 \text{э}_3^*, \end{gathered} \tag{56}$$

в которой $\Phi(t)$ определено соотношениями (53)–(55).

Найдем потенциальную энергию $\Pi(\theta)$ упругого элемента, используя интеграл энергии системы [1, (5.14)*]

$$A(\omega_1^2+\omega_2^2)+A_0(\Omega_1^2+\Omega_2^2)-2N(\Omega_1\omega_1\cos\theta+\Omega_2\omega_2)+2\Pi(\theta)=2h.$$

Подставив в него (42)–(44), (51), получим

$$2\Pi(\theta)=2h_*-2Ng_*^2\cos\theta,$$

где $2h_*=2h+g_*^2[-A+A_0(b^2\sin^2\beta-1)+2N\,b\sin^2\beta].$

Рассмотрим теперь случай

$$b=1. \tag{57}$$

Зависимости (42)–(44), (46), (53) при этом таковы

$$\omega_2=\Omega_2=-g_*\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\sin\beta, \tag{58}$$

$$\omega_1=-\Omega_1=g_*\sqrt{\cos^2\beta-\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2\sin^2\beta}, \tag{59}$$

$$\cos\theta=\sin^2\beta+\cos^2\beta\cos 2\tilde{t}, \tag{60}$$

$$\Phi(t)=\Phi_*+\nu t+\arccos\frac{\omega_2(t)}{g_*\cos\beta}, \tag{61}$$

где

$$\nu=\tilde{n}_0+\tilde{n}, \tag{62}$$

$$\Phi_*=\Phi(0)-\arccos\frac{\omega_{20}}{g_*\cos\beta}. \tag{63}$$

Угловую скорость тела $S_0$ в базисе $\mathbf{э}_1^*\mathbf{э}_2^*\mathbf{э}_3$ определим из (56), подставив в них соотношения (58)–(63),

$$\Omega_1^*=g_*\cos\beta\sin(\nu t+\Phi_*), \tag{64}$$

$$\Omega_2^*=g_*\cos\beta\cos(\nu t+\Phi_*), \tag{65}$$

$$\Omega_3^*=\tilde{n}_0. \tag{66}$$

Для случая (57) найдем для тела $S_0$ уравнение подвижного и неподвижного аксоидов. Для этого введем неподвижный базис, основываясь на неизменности в пространстве вектора $\mathbf{g}$ [2],

$$\mathbf{e}_\nu = \frac{\mathbf{g}}{g}, \quad \mathbf{e}_\rho = \frac{(\mathbf{g}\times\mathbf{\Omega}_*)\times g}{g^2\Omega_\rho}, \quad \mathbf{e}_\alpha = \frac{\mathbf{g}\times\mathbf{\Omega}_*}{g\Omega_\rho} \tag{67}$$

где

$$\Omega_\rho = \frac{|\mathbf{g}\times\mathbf{\Omega}^*|}{g}. \tag{68}$$

Базис (67) повернут по отношению к неподвижному базису $C_*\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3$ на угол $\alpha$ [2]

$$\dot{\alpha} = \left(\mathbf{e}_{\nu_*}\times\mathbf{\Omega}_*\right)\boldsymbol{\cdot}\dot{\mathbf{\Omega}}_*\big/\Omega_\rho^2 , \tag{69}$$

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_\nu, \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_\rho\cos\alpha + \mathbf{e}_\alpha\sin\alpha, \quad \mathbf{E}_3 = -\mathbf{e}_\rho\sin\alpha + \mathbf{e}_\alpha\cos\alpha. \tag{70}$$

Используя формулы [1, (5.5)$_*$]

$$\text{э}_1 = \mathbf{e}_1, \quad \text{э}_2 = \mathbf{e}_2\cos\theta + \mathbf{e}_3\sin\theta, \quad \text{э}_3 = -\mathbf{e}_2\sin\theta + \mathbf{e}_3\cos\theta, \tag{71}$$

выразим из них $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ через $\text{э}_2$, $\text{э}_3$

$$\mathbf{e}_1 = \text{э}_1, \quad \mathbf{e}_2 = \text{э}_2\cos\theta - \text{э}_3\sin\theta, \quad \mathbf{e}_3 = \text{э}_2\sin\theta + \text{э}_3\cos\theta$$

и, подставив их в (1), получим представление вектора $\mathbf{g}$ в полуподвижном базисе $\text{э}_1\text{э}_2\text{э}_3$:

$$\mathbf{g} = G_1^0\text{э}_1 + G_2^0\text{э}_2 + G_3^0\text{э}_3 ,$$

где

$$G_1^0 = G_1 , \tag{72}$$

$$G_2^0 = (A\cos\theta - N)\,\omega_2 + (A_0 - N\cos\theta)\,\Omega_2 + n\sin\theta, \tag{73}$$

$$G_3^0 = -(A\omega_2 - N\Omega_2)\sin\theta + +n\cos\theta + n_0 . \tag{74}$$

Компоненты этого же вектора в неизменно связанном с телом $S_0$ базисе $\mathbf{э}_1^*\mathbf{э}_2^*\mathbf{э}_3^*$ получим, используя формулы перехода

$$\mathbf{э}_1^* = \mathbf{э}_1 \cos\Phi + \mathbf{э}_2 \sin\Phi, \quad \mathbf{э}_2^* = -\mathbf{э}_1 \sin\Phi + \mathbf{э}_2 \cos\Phi, \quad \mathbf{э}_3^* = \mathbf{э}_3, \tag{75}$$

$$\mathbf{g} = G_{10}^*\mathbf{э}_1^* + G_{20}^*\mathbf{э}_2^* + G_{30}^*\mathbf{э}_3,$$

где

$$G_{10}^* = G_1^0 \cos\Phi + G_2^0 \sin\Phi, \tag{76}$$

$$G_{20}^* = -G_1^0 \sin\Phi + G_2^0 \cos\Phi, \tag{77}$$

Подставив в (74), (76), (77) соотношения (2), (72), (73), (58)–(63), находим

$$G_{10}^* = -(A - A_0)\,\Omega_1^*, \tag{78}$$

$$G_{20}^* = -(A - A_0)\,\Omega_2^*, \tag{79}$$

$$G_{30}^* = (A - A_0)\,\tilde{n}\,. \tag{80}$$

Из (68) с учетом (64)–(66), (78)–(80) определяем

$$\Omega_\rho = (\tilde{n} + \tilde{n}_0)\cos\beta$$

и, принимая во внимание (62), запишем

$$\Omega_\rho = \nu\cos\beta\,. \tag{81}$$

Подставив соотношения (64)–(66), (78)–(81) в (67), (69), находим

$$\mathbf{e}_\nu = -\mathbf{э}_1^* \cos\beta \sin\gamma - \mathbf{э}_2^* \cos\beta \cos\gamma + \mathbf{э}_3^* \sin\beta\,,$$

$$\mathbf{e}_\rho = -\mathbf{э}_1^* \sin\beta \sin\gamma - \mathbf{э}_2^* \sin\beta \cos\gamma - \mathbf{э}_3^* \cos\beta\,,$$

$$\mathbf{e}_\alpha = -\mathbf{э}_1^* \cos\gamma + \mathbf{э}_2 \sin\alpha\,,$$

$$\dot{\alpha} = -g_*\,, \tag{82}$$

где обозначено

$$\gamma = \nu t + \Phi_*\,. \tag{83}$$

Теперь из (70) получим

$$\mathbf{E}_1 = -\text{э}_1^* \cos\beta \sin\gamma - \text{э}_2^* \cos\beta \cos\gamma + \text{э}_3^* \sin\beta, \tag{84}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_2 &= \text{э}_1^*(-\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha - \cos\gamma\sin\alpha) + \\ &+ \text{э}_2^*(-\sin\beta\cos\gamma\cos\alpha + \sin\gamma\sin\alpha) - \text{э}_3^*\cos\beta\cos\alpha,\end{aligned} \tag{85}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_3 &= \text{э}_1^*(\sin\beta\sin\gamma\sin\alpha - \cos\gamma\cos\alpha) + \\ &+ \text{э}_2^*(\sin\beta\cos\gamma\sin\alpha + \sin\gamma\cos\alpha) + \text{э}_3^*\cos\beta\sin\alpha.\end{aligned} \tag{86}$$

Отметим, что

$$\mathbf{E}_i \cdot \text{э}_j = \delta_{ij} .$$

Обозначим $E_{ij}$ матрицу вложения базиса $\text{э}_1^*\text{э}_2^*\text{э}_3^*$ в неподвижный $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3$:

$$\mathbf{E}_i = E_{ij}\text{э}_j ,$$

где

$$E_{11} = -\cos\beta\sin\gamma, \quad E_{12} = -\cos\beta\cos\gamma, \quad E_{13} = \sin\beta, \tag{87}$$

$$\begin{aligned}&E_{21} = -\sin\beta\sin\gamma\cos\gamma - \cos\gamma\sin\alpha, \\ &E_{22} = (\sin\beta s\cos\gamma\cos\alpha + \sin\gamma\sin\alpha), \quad E_{23} = -\cos\beta\cos\alpha,\end{aligned} \tag{88}$$

$$\begin{aligned}&E_{31} = \sin\beta\sin\gamma\sin\alpha - \cos\gamma\cos\alpha, \\ &E_{32} = \sin\beta\cos\gamma\sin\alpha + \sin\gamma\cos\alpha, \quad E_{33} = \cos\beta\sin\alpha.\end{aligned} \tag{89}$$

Вектор $\mathbf{r}_*$, указывающий центр сферического шарнира, как следует из [1,(5.22)$_*$] имеет вид

$$\mathbf{r}_* = -a\mathbf{e}_3 - a_0\text{э}_3 ,$$

который с учетом формул перехода (71), (75) к базисам $\text{э}_1\text{э}_2\text{э}_3$ и $\text{э}_1^*\text{э}_2^*\text{э}_3^*$ можно записать так

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_* &= \text{э}_1^* a\,[-\sin 2\alpha\cos\gamma + \sin\beta(1-\cos 2\alpha)\sin\gamma]\cos\beta + \\ &+ \text{э}_2^* a\,[\sin 2\alpha c\sin\gamma + \sin\beta(1-\cos 2\alpha)\cos\gamma]\cos\beta + \\ &+ \text{э}_3[-a_0 - a\,(\sin^2\beta + \cos^2\beta\cos 2\alpha)\,].\end{aligned}$$

Используя матрицу вложения (87)–(89), запишем траекторию шарнира неподвижном базисе $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3$

$$\mathbf{r}_* = x\mathbf{E}_1 + y\mathbf{E}_2 + z\mathbf{E}_3 \ ,$$

где

$$\begin{aligned} x &= -(a+a_0)\sin\beta = x_0 \ , \\ y &= (a+a_0)\cos\beta\cos\alpha \, , \\ z &= (a+a_0)\cos\beta\sin\alpha \, . \end{aligned} \tag{90}$$

Очевидно, что это эллипс, лежащий в плоскости $x = x_0$.

Теперь легко определить скорость шарнира $\mathbf{v}$

$$\mathbf{v} = \mathrm{v}_1\mathbf{E}_1 + \mathrm{v}_2\mathbf{E}_2 + \mathrm{v}_3\mathbf{E}_3 \ ,$$

учитывая (90), (82), находим

$$\begin{gathered} \mathrm{v}_1 = \dot{x} = 0, \quad \mathrm{v}_2 = \dot{y} = (a+a_0)g_*\cos\beta\sin\alpha, \\ \mathrm{v}_3 = \dot{z} = (a_0 - a)g_*\cos\beta\cos\alpha \, . \end{gathered} \tag{91}$$

Запишем разложение вектора $\mathbf{\Omega}_*$ в неподвижном базисе, принимая во внимание матрицу вложения (87)–(89),

$$\mathbf{\Omega}_* = p_1\mathbf{E}_1 + p_2\mathbf{E}_2 + p_3\mathbf{E}_3 \ ,$$

где

$$\begin{aligned} p_1 &= g_*(\sin\beta_0\sin\beta - \cos^2\beta)\, , \\ p_2 &= -g_*(\sin\beta + \sin\beta_0)\cos\beta\cos\alpha \, , \\ p_3 &= g_*(\sin\beta + \sin\beta_0)\cos\beta\sin\alpha \, , \\ \sin\beta_0 &= \tilde{n}_0 / g_* \, . \end{aligned} \tag{92}$$

Неподвижный аксоид тела $S_0$ [1, (12.12)*] имеет вид

$$\boldsymbol{\zeta}^0(t,\mu) = \mathbf{r}_* + \frac{\mathbf{\Omega}_* \times \mathbf{v}}{\Omega_*^2} + \mu\frac{\mathbf{\Omega}_*}{\Omega_*} = \zeta_1^0(t,\mu)\mathbf{E}_1 + \zeta_2^0(t,\mu)\mathbf{E}_2 + \zeta_3^0(t,\mu)\mathbf{E}_3 .$$

Подставив в это выражение значения (90)–(92), получим

$$\zeta_1^0(t,\mu)=\frac{g_*^2}{\Omega_*^2}(a\cos 2\alpha-a_0)\cos^2\beta\,(\sin\beta+\sin\beta_0)-$$

$$-(a+a_0)\sin\beta+\mu\frac{g_*}{\Omega_*}(\sin\beta\sin\beta_0-\cos^2\beta),$$

$$\zeta_2^0(t,\mu)=\frac{g_*^2}{\Omega_*^2}(a-a_0)(\sin\beta\sin\beta_0-\cos^2\beta)\cos\beta\cos\alpha+$$

$$+(a+a_0)\cos\beta\cos\alpha-\mu\frac{g_*}{\Omega_*}(\sin\beta+\sin\beta_0)\cos\beta\cos\alpha, \tag{93}$$

$$\zeta_3^0(t,\mu)=\frac{g_*^2}{\Omega_*^2}(a+a_0)(\sin\beta\sin\beta_0-\cos^2\beta)\cos\beta\sin\alpha+$$

$$+(a-a_0)\cos\beta\sin\alpha-\mu\frac{g_*}{\Omega_*}(\sin\beta+\sin\beta_0)\cos\beta\sin\alpha,$$

где

$$\Omega_*^2=g_*^2(\cos^2\beta+\sin^2\alpha_0).$$

Представим скорость шарнира $\mathbf{v}$, используя разложение (91) и соотношения (84)–(86), в виде

$$\begin{aligned}
&\mathbf{v}=\mathrm{v}_{10}^*\mathbf{э}_1^*+\mathrm{v}_{20}^*\mathbf{э}_2^*+\mathrm{v}_{30}\mathbf{э}_3,\\
&\mathrm{v}_{10}^*=g_*\cos\beta\,[-a_0\cos\gamma+a\,(\cos\gamma\cos 2\alpha-\sin\beta\sin\gamma\sin 2\alpha)\,],\\
&\mathrm{v}_{20}^*=g_*\cos\beta\,[a_0\sin\gamma+a\,(-\sin\gamma\cos 2\alpha-\sin\beta\cos\gamma\sin 2\alpha)\,],\\
&\mathrm{v}_{30}=-a\,g_*\cos^2\beta\sin 2\alpha.
\end{aligned} \tag{94}$$

Подвижный аксоид тела $S_0$ [3], [1, (12.9)$_*$] представим так

$$\xi^0(t,\mu)=\frac{\mathbf{\Omega}_*\times\mathbf{v}}{\Omega_*^2}+\mu\frac{\mathbf{\Omega}_*}{\Omega_*}=\xi_1^{0*}(t,\mu)\,\mathbf{э}_1^*+\xi_2^{0*}(t,\mu)\,\mathbf{э}_2^*+\xi_3^0(t,\mu)\,\mathbf{э}_3. \tag{95}$$

Внесем значения (64)–(66), (83), (94) в (95) и получим

$$\xi_1^{0*}(t,\mu)=\frac{g_*^2}{\Omega_*^2}\{-a\cos^2\beta\cos\gamma\sin2\alpha+[-a_0\sin\gamma+$$

$$+a(\sin\gamma\cos2\alpha+\sin\beta\cos\gamma\sin2\alpha)]\sin\beta_0\}\cos\beta+\mu\frac{g_*}{\Omega_*}\cos\beta\sin\gamma,$$

$$\xi_2^{0*}(t,\mu)=\frac{g_*^2}{\Omega_*^2}\{a\cos^2\beta\sin\gamma\sin2\alpha+[-a_0\cos\gamma+ \qquad (96)$$

$$+a(\cos\gamma\cos2\alpha-\sin\beta\sin\gamma\sin2\alpha)]\sin\beta_0\}\cos\beta+\mu\frac{g_*}{\Omega_*}\cos\beta\cos\gamma,$$

$$\xi_3^0(t,\mu)=\frac{g_*^2}{\Omega_*^2}(a_0-a\cos2\alpha)\cos^2\beta+\mu\frac{g_*}{\Omega_*}\sin\beta_0\ .$$

Скорость скольжения подвижного аксоида по неподвижному равна

$$\mathbf{v}_*\cdot\mathbf{\Omega}_*/\Omega_*\ ,$$

и с учетом (92), (94) имеем вид

$$-a\frac{g_*^2}{\Omega_*}(\sin\beta+\sin\beta_0)\cos^2\beta\sin2\alpha. \qquad (97)$$

При движении подвижный аксоид (96) катится по неподвижному аксоиду (93), это движение сопровождается скольжением со скоростью (97).

### *Литература*


1. *Лесина М.Е.* Точные решения двух новых задач аналитической динамики систем сочлененных тел. Донецк: ДонГТУ, 1996. 238 с.
2. *Харламов П.В.* Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку. // Прикл. математика и механика. – 1964. – 28. – №3. – С. 502–507.
3. *Харламов М.П.* О построении аксоидов пространственного движения твердого тела. // Механика твердого тела. – 1980. – Вып. 12. – С. 3–8.