О периодизации истории гиперболических уравнений в XVIII – XIX столетиях

Косолапов Ю.Ф., Маринова Е.С.
Донецкий национальный технический университет

В статті стверджується і доводиться існування трьох періодів розвитку теорії гіперболічних рівнянь з частинними похідними у XVIII – XIX сторіччях.

Изучение первоисточников, историко - математической литературы и собственные исследования относительно развития теории гиперболических уравнений с частными производными в XVIII - XIX столетиях позволяют, по нашему мнению, предложить и обосновать изложенную ниже периодизацию. Насколько нам известно, в современной историко-математической литературе имеется весьма успешный опыт периодизации истории теории эллиптических уравнений (известная книга В.С. Сологуба), но по части теории гиперболических уравнений подобных попыток еще не предпринималось.

Первый период - период зарождения первых методов интегрирования отдельных уравнений, в частности, классического уравнения гиперболического типа - волнового. Хронологически он открывается работами Даламбера и Эйлера, а заканчивается на рубеже XVIII -XIX столетий. В этот период появляется много работ, посвященных созданию методов отыскания общих интегралов рассматриваемых уравнений: методов характеристик, бесконечных рядов, интегральных представлений, символический и др. В их создании большую роль сыграли исследования Эйлера, Лапласа, Монжа, Парсеваля, Био, Бриссона.

Ко второму периоду относятся исследования ученых первой половины XIX в., в частности, Фурье, Коши, Пуассона, М.В. Остроградского, Ламе, Дюамеля, создавших некоторые из современных методов интегрирования уравнений математической физики, среди которых особо следует назвать методы разделения переменных, интегральных преобразований, операционный, методы ТФКП. Большое место в исследованиях ученых второго периода занимало рассмотрение смешанных задач и задачи Коши для отдельных уравнений. В многочисленных работах Коши изучались и более общие уравнения, в том числе линейные уравнения произвольного порядка с любым числом независимых переменных, с постоянными и отчасти переменными коэффициентами, а также системы таких уравнений. Наряду с разработкой методов интегрирования появляются и общие теоремы Коши о существовании и единственности аналитического решения задачи Коши для аналитических уравнений и систем.

Третий период начинается фундаментальной работой 1860 г. Римана, послужившей источником многочисленных изысканий по применению, обоснованию и обобщению метода Римана для решения задачи Коши. Детальным исследованиям подвергаются линейные и отдельные нелинейные уравнения, содержащие сначала две, а затем и большее количество независимых переменных. Наряду с "линией Римана" в развитии теории задачи Коши для гиперболических уравнений явственно прослеживается линия, идущая от Грина, Гельмгольца и Кирхгофа к Бельтрами и Вольтерра, а затем - к Кулону и Адамару. Связанная сначала с теорией трехмерного и двухмерного волновых уравнений, она постепенно охватывает все более общие уравнения и даже системы уравнений с частными производными. В работах Кулона, Адамара, а отчасти и Вольтерра эти две линии сливаются. Продолжаются и расширяются исследования, посвященные смешанным задачам для отдельных уравнений, ставится задача обоснования метода разделения переменных Фурье и для некоторых классов уравнений успешно решается. Видное место занимают исследования Пикара по теории задачи Коши и характеристической задаче для линейных и квазилинейных уравнений гиперболического типа второго порядка с двумя независимыми переменными.

Остановимся теперь более подробно на каждом из названных периодов.

Первый период. Как известно, обширным источником краевых задач для гиперболических уравнений и систем служат колебательные процессы. Уже в XVIII в. перед исследователями проблем колебаний было поставлено немало важных задач, таких как проблемы свободных колебаний струн, мембран, воздушных колебаний и теории звука в одномерном, двухмерном и трехмерном пространствах. Получены соответствующие гиперболические уравнения, в том числе одномерное, двумерное и трехмерное волновые уравнения, описывающие эти процессы, найдены общие уравнения гидродинамики сжимаемых жидкостей. Поставлены задача с начальными условиями (задача Коши в современной терминологии) и некоторые стационарные смешанные задачи для однородных уравнений. Решена знаменитая задала о колебаниях струны, хотя и не затихает спор о природе произвольных функций, входящих в интегралы уравнений с частными производными.

Основной путь решения краевых задач для гиперболических уравнений состоял в XVIII в. в построении общих интегралов соответствующих уравнений с последующим определением произвольных функций из дополнительных (начальных или начальных и краевых) условий. В начале XIX в. эту линию частично продолжили Коши и Пуассон. Основные усилия ученых были направлены на поиски общих решений уравнений с частными производными, были разработаны методы характеристик (Эйлер, Монж), суммируемых бесконечных рядов, метод Лапласа - Лежандра, метод плоских волн Эйлера - Бриссона. С другой стороны, уже предпринимались попытки решения краевых задач без предварительного определения общих решений. В работах Даламбера, Эйлера, Д. Бернулли, Лагранжа оформились основные элементы метода разделения переменных. Но недостаточная развитость теории разложения функций по ортогональным системам функций помешала синтезу этих элементов в рамках единого метода.

Второй период. Ученым первой половины XIX в. предстояло для решения как классических, полученных в наследство от XVIII в., так и новых задач - и в первую очередь задач создаваемой в то время теории упругости - или искать новые методы, или существенно совершенствовать старые. Именно в этот период математическая физика обогатилась многими ми методами интегрирования, вошедшими в золотой фонд современной науки. Среди таких методов видное место принадлежит методам интегральных преобразований. Некоторые из них, и прежде всего метод интеграла Фурье, появились в работах Фурье, Коши, Пуассона, Остроградского. Истоки же можно проследить и в более ранних исследованиях - у Эйлера, Лапласа, Лакруа, Бриссона. По крайней мере три варианта метода интеграла Фурье можно найти в работах Коши, посвященных интегрированию линейных уравнений произвольного порядка с постоянными коэффициентами. Коши широко пользовался методами ТФКП, в частности, разработанной им теорией вычетов. Много внимания уделили ученые первой половины XIX в. различным вариантам символического метода. В результате им удалось получить много результатов, относящихся к теории краевых задач для гиперболических уравнений, которые были бы не под силу математикам XVIII в. В работах Коши много внимания уделялось теории задачи Коши, в том числе как краевой задачи для целого класса линейных уравнений. Ему удалось доказать существование и единственность аналитического решения задачи Коши для аналитических уравнений и систем первого и высших порядков. Одним из первых серьезных успехов математической физики второго периода явилось получение Пуассоном знаменитой формулы для решения задачи Коши для трехмерного и двухмерного волновых уравнений. Этим было доказано существование неаналитического решения одной из возникающих тогда проблем. В самом начале второго периода благодаря работам Фурье было завершено создание метода разделения переменных для решения смешанных задач для уравнений в частных производных, в том числе гиперболических. Свой вариант метода был предложен также и Пуассоном. Остроградский, а затем Ламе и Дюамель сформулировали общую схему метода Фурье, сохранившуюся без изменений и в настоящее время. Исследования названных ученых знаменовали собой начало систематического рассмотрения смешанных задач для гиперболических и параболических и краевых задач для эллиптических уравнений. Много внимания уделил Коши развитию операционных методов и методов ТФКП для решения смешанных задач.

Следует отметить, что разработка вопросов методики, как правило, не сопровождалась в течение второго периода закладкой фундамента под новые открытия. За исключением названных работ Коши по существованию и единственности решения задачи Коши, пожалуй, только М.В. Остроградский ставил вопросы обоснования применяемых методов, в частности метода разделения переменных. Насколько нам известно, ни одна смешанная задача не подвергалась в тот период исследованию на существование и единственность. Не ставились и не решались другие более тонкие вопросы о функциональных свойствах решений уравнений с частными производными, например, о характере зависимости решения задачи Коши или смешанной задачи от дополнительных условий, о разрывах радений и законах их распространения. Задача обоснования методов, разработанных в первой половине XIX в. выпала частично на конец XIX в. и в основном на XX в.

Третий период. В 1860 г. в одной работе по газовой механике при решении задачи Кожи для частного случая уравнения Эйлера - Пуассона знаменитый немецкий математик Бернгард Риман предложил метод, получивший большое распространение тогда и сохранивший значение и в настоящее время. Дюбуа Реймон и Дарбу распространили метод на произвольные линейные уравнение второго порядка о двумя независимыми переменными и переменными достаточно гладкими коэффициентами. Основной задачей для всех работавших в этот период по развитию метода Римана стало решение характеристической задачи. Дарбу удалось дать общее доказательство существования функции Римана. Попытки же получить ее явное представление в общем виде натолкнулись на непреодолимые трудности, стало возникать убеждение в том, что решение характеристической задачи - дело ничуть не более простое, чем решение исходной задачи Коши и что для выхода из возникшего таким образом тупика нужны поиски новых путей. Одним из первых ученых, добившихся реальных успехов в этом направлении, был Адамар.

Уже у Римана рассматривалась общая задача Кожи, когда условия Коши задаются на произвольной нехарактеристической кривой. Эти исследования были продолжены Дюбуа Реймоном, поставившим перед собой задачу выяснить типы граничных условий, которые можно задавать, рассматривая уравнения с частными производными гиперболического типа второго и высших порядков, линейные и нелинейные. Он сформулировал для них два типа граничных условий, пришел к теореме о существовании и единственности решения задачи Коши. Вопросами разрешимости характеристической задачи занимались Дюбуа Реймон, Дарбу, а в конце XIX в. с совершенно новых позиций - Пикар и Гурса. Дюбуа Реймону принадлежит классификация линейных уравнений второго порядка о двумя независимыми переменными, сыгравшая большую роль в развитии теории уравнений с частными производными.

Наряду с работами по применению метода Римана для уравнений с двумя независимыми переменными, велись исследования по его обобщению на уравнения с любым числом независимых переменных. Важную роль сыграли исследования Кирхгофа, Бельтрами, Вольтерра, исследовавших задачу Коши для волнового уравнения. Кулон и Адамар распространили метод на произвольные линейные уравнения о любым числом независимых переменных и переменными достаточно гладкими коэффициентами. Однако и они натолкнулись на непреодолимую, в рамках методов XIX в., трудность в решении характеристической задачи. Выход был найден только в XX в. благодаря развитию концепций обобщенных решений и обобщенных функций.

Объем работ, связанных со смешанными задачами для гиперболических уравнений, достаточно большой уже в первой половине XIX в., все более увеличивался в последующие годы. В работах Гельмгольца, Стокса, Рэлея и других ученых исследовались все более сложные вопросы колебаний струн, мембран, упругих изотропных тел, газов, развивалась теория электрических, электромагнитных колебаний. И главное - росло понимание необходимости обоснования метода Фурье, одного из основных методов решения таких задач. Предпринимаются первые попытки обоснования метода для одномерного волнового уравнения (Линдеман, Гарнак), оказавшиеся неудачными. Первые обоснования метода мы находим в работах Пуанкаре, Ляпунова и Стеклова. Так, Стекловым доказываются соответствующие утверждения для гиперболического и параболического уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными, чем завершается работа, начатая во втором периоде Штурмом и Лиувиллем, а также для трехмерного уравнения теплопроводности и волнового уравнения. Если Стеклов для последних уравнений рассматривал вторую краевую задачу, то Пуанкаре добился успеха, правда, не со всей строгостью, в области первой краевой задачи.

Развивались и исследования, посвященные функциональным свойствам решений уравнений в частных производных, в том числе гиперболических (Риман, Кристоффель, Гюгонио, Адамар и другие). Однако первые серьезные успехи в этом направлении были достигнуты уже в начале XX в., и прежде всего в пионерских работах Адамара.

Детальному анализу развития теории гиперболических уравнений будут посвящены последующие статьи авторов

Литература

Косолапов Ю.Ф., Маринова Е.С. К истории теории гиперболических уравнений. // **Сучасні проблеми науки та освіти.** Матеріали 6-ї Міжнародної міждисциплінарної науково-практичної конференції 30 квітня – 9 травня 2005р., м. Алушта. /Харків: Українська Асоціація „Жінки України в науці та освіті", Харківський національний університет імені В.Н. Карабіна, 2005. – с.9.