Задача Коши для квазилинейного гиперболического уравнения в работах Пикара

Косолапов Ю.Ф., Мамичева В.Д.,
Донецкий национальный технический университет

В статті, за методом Пікара, авторами доводиться існування розв'язку задачі Коші для квазілінійного гіперболічного диференціального рівняння другого порядку. Висвітлюється історія розгляду Пікаром деяких інших крайових задач для гіперболічних рівнянь.

1. В предыдущей статье речь шла об исследовании Пикаром характеристической задачи для квазилинейного гиперболического дифференциального уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными

$$z_{xy} = F\left(x, y, z, z_x, z_y\right). \qquad (1)$$

Что касается не менее важной как для теории, так и для приложений задачи Коши, то Пикар ее решением специально не занимался, ограничившись [2] замечанием, что этот вопрос не требует особых рассуждений. В данной статье мы постараемся восполнить отсутствующие рассуждения Пикара и тем самым показать, что в работах [1, 2], при их тщательном сопоставлении, действительно создана теоретическая база, позволяющая достаточно строго доказать разрешимость задачи Коши для уравнения (1). В качестве начальных условий мы возьмем условия «в форме Пикара», то есть

$$z_x\Big|_{y=y(x)} = \varphi(x),\ z_y\Big|_{x=x(y)} = \phi(y),\ z(x_0, y_0) = z_0\ , \qquad (2)$$

где $\varphi(x), \phi(y)$ - функции, непрерывные соответственно на отрезках $[x_0, x_B], [y_0, y_B]$.

Нетрудно заметить, что достаточно ограничиться простым случаем

$$x_0 = y_0 = 0, z_0 = 0, \varphi(x) \equiv 0, \phi(y) \equiv 0$$

и рассмотреть задачу

$$\begin{cases} z_{xy} = F\left(x, y, z, z_x, z_y\right), \\ z(0; 0) = 0,\ z_x\Big|_{y=y(x)} = 0,\ z_y\Big|_{x=x(y)} = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

В самом деле, в противном случае можно было бы положить сначала

$$z(x,y)=u(x,y)+z_0+\int_{x_0}^{x}\varphi(x)dx+\int_{y_0}^{y}\phi(y)dy,$$

а затем $x=x_0+\xi, y=y_0+\eta$. На функцию $F(x,y,z,p,q)$ наложим те же два условия, что и в заметке [2], а именно, непрерывность на множестве

$$G=\{(x,y,z,u,v):(x,y)\in R,|z|\le a,|u|\le b,|v|\le b\}$$

и справедливость условия Липшица по трем последним аргументам

$$|F(x,y,z',u',v')-F(x,y,z,u,v)|<k_1|z'-z|+k_2|u'-u|+k_3|v'-v|,$$

где $0<k_i=const, i=1,2,3$.

Образуем по образцу заметки [2] итерационную последовательность задач,

$$\begin{cases} (z_1)_{xy}=F(x,y,0,0,0), \\ (z_n)_{xy}=F(x,y,z_{n-1},(z_{n-1})_x,(z_{n-1})_y), n=2,3,..., \\ z_n(0;0)=0,(z_n)_x\big|_{y=y(x)}=0,(z_n)_y\big|_{x=x(y)}=0, n=1,2,3,..., \end{cases} \qquad (4)$$

отличающуюся от задач (6) предыдущей статьи только краевыми условиями, а именно условиями

$$z_n(0;0)=0,(z_n)_x\big|_{y=y(x)}=0,(z_n)_y\big|_{x=x(y)}=0$$

вместо

$$z_n(x,0)=0, z_n(0,y)=0.$$

Теперь методом статьи [1], предполагая, как в заметке [2], выполненными условия

$$M\rho\rho'<a, M\rho<b, M\rho'<b, \qquad (5)$$

докажем равномерную сходимость рядов вида

$$z_1+\sum_{2}^{\infty}(z_n-z_{n-1}), \qquad (6)$$

$$\sum_{1}^{\infty}u_n, \sum_{1}^{\infty}(u_n)_x, \sum_{1}^{\infty}(u_n)_y, \qquad (7)$$

$$(z_1)_x+\sum_{2}^{\infty}(z_n-z_{n-1})_x, (z_1)_y+\sum_{2}^{\infty}(z_n-z_{n-1})_y, \qquad (8)$$

мажорируя их геометрическими прогрессиями с тем же, что и в предыдущей статье, знаменателем

$$q = k_1\rho\rho' + k_2\rho' + k_3\rho . \qquad (9)$$

При этом, наряду с условиями (5), мы потребуем выполнения условия $q<1$, обеспечивающего сходимость геометрической прогрессии. Остается перейти к пределу при $n \to \infty$ в уравнении

$$(z_n)_{xy} = F\left(x, y, z_{n-1}, (z_{n-1})_x, (z_{n-1})_y\right).$$

Если бы мы пожелали еще менее уклониться от рассуждений заметки [2], можно было бы перейти к последовательности задач

$$\begin{cases} (u_1)_{xy} = M, \\ (u_n)_{xy} = k_1 u_{n-1} + k_2 (u_{n-1})_x + k_3 (u_{n-1})_y, n = 2, 3, ... \\ u_n(0; 0) = 0, (u_n)_x\Big|_{y=y(x)} = 0, (u_n)_y\Big|_{x=x(y)} = 0, n = 1, 2, 3, ..., \end{cases} \qquad (10)$$

для которой, как нетрудно заметить,

$$|z_1| \le |u_1|, |(z_1)_x| \le |(u_1)_x|, |(z_1)_y| \le |(u_1)_y|, \qquad (11)$$

$$|z_n - z_{n-1}| \le |u_n|, |(z_n - z_{n-1})_x| \le |(u_n)_x|, |(z_n - z_{n-1})_y| \le |(u_n)_y|. \qquad (12)$$

Однако равномерную сходимость рядов вида (7) следовало бы доказывать не методом заметки [2], а в соответствии со статьей [1].

Таким образом, мы не уклонимся от истины, утверждая, что Пикар доказал (с некоторыми легко исправимыми погрешностями) существование (но не единственность) решения задачи Коши и характеристической задачи как для линейного, так и для квазилинейного гиперболического уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными и (для линейного случая) непрерывными коэффициентами. Он не исследовал вопроса о непрерывном примыкании решения (или его первых производных) к заданным на граничных кривых функциям, а в квазилинейном случае не доказывал, что функция, найденная им в качестве искомого решения, удовлетворяет уравнению и дополнительным условиям.

2. Кроме задачи Коши и характеристической задачи Пикар уделил некоторое внимание краевым задачам для линейного уравнения

$$z_{xy} = az_x + bz_y + cz, \qquad (13)$$

когда задаются значения искомой функции на двух прямых - на характеристике $y=0$ и биссектрисе $y=x$ (работы [2, 3]) или на двух лучах $y=\alpha x, y=\beta x$ (работа [4], где предполагается, что $|\alpha|\neq|\beta|$). В первом случае имеем условия

$$z\big|_{y=0}=f(x), z\big|_{y=x}=\varphi(x),\ f(0)=\varphi(0), \tag{14}$$

во втором – условия

$$z\big|_{y=\alpha x}=f(x), z\big|_{y=\beta x}=\varphi(x),\ f(0)=\varphi(0). \tag{15}$$

Для задачи (13), (14) в предположении непрерывности функций f и φ вместе с их первыми производными, Пикар повторяет схему метода итераций, указывает первое приближение z_1 (как решение задачи для уравнения

$$z_{xy}=0$$

при условии (14)), дает общую формулу для определения функций z_n, а именно формулу

$$u=\int_0^y d\eta\int_y^x P(\xi,\eta)d\xi,$$

дающую решение задачи

$$u_{xy}=P(x,y), u\big|_{y=0}=0, u\big|_{y=x}=0,$$

и утверждает, что ряд

$$z_1+z_2+\ldots+z_n+\ldots$$

дает решение исходной задачи. Восстановление опущенных им выкладок не представляет затруднений. Равномерная сходимость рядов

$$\sum_1^\infty z_n, \sum_1^\infty (z_n)_x, \sum_1^\infty (z_n)_y$$

устанавливается существованием мажорантной геометрической прогрессии, например, со знаменателем

$$q=k\alpha(2+\alpha),$$

меньшим единицы при

$$\alpha<\sqrt{1+\frac{1}{k}}-1,$$

где

$$k = max(A, B, C),$$

α -сторона квадрата существования решения

$$\{(x, y): 0 \le x \le \alpha, 0 \le y \le \alpha\},$$

содержащегося в квадрате

$$R = \{(x, y): 0 \le x \le \beta, 0 \le y \le \beta, \beta \ge \alpha\}$$

непрерывности коэффициентов a, b, c.

По поводу задачи (13), (15) Пикар ограничивается [3] только определением функции z_1. Нахождение произвольных функций $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$, входящих в общее решение уравнения

$$z_{xy} = 0,$$

на основании условий (15) сводится к решению функционального ура-внения

$$\Psi(\alpha x) - \Psi(\beta x) = h(x) \quad (h(x) = f(x) - \varphi(x)).$$

Полагая для простоты

$$\alpha = 1, |\beta| < 1$$ [1]

и подчиняя функцию $h(x)$ условию

$$|h(x)| < A|x|^p$$

при некоторых положительных A, p, Пикар находит решение функционального уравнения в виде ряда

$$\Psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h(\beta^n x),$$

который, очевидно, абсолютно сходится при $|x| < 1/|\beta|$, то есть внутри интервала $(-1/|\beta|, 1/|\beta|)$. Дальнейшее применение метода последовательных приближений, утверждает он, не представляет затруднений.

Итоговое утверждение Пикара справедливо (хотя о большой легкости здесь можно говорить лишь с немалой натяжкой), если прямые $y = \alpha x, y = \beta x$ не разделяются характеристиками, и становится неверным в

---

[1] При $|\alpha| \ne |\beta|$ этого всегда можно добиться заменой переменных. Например,

противном случае. Пикар мог бы сам заметить свою ошибку, если не в работе [3], то по крайней мере в более поздней статье [4], о которой речь еще впереди. Но этого не произошло.

Краевые задачи для уравнений (13), (1) с заданными значениями искомой функции на двух произвольных прямых или даже кривых стали впоследствии предметом исследований Адамара и Гурса. Решения искались как аналитические (в работах Гурса, который изучал и значительно более общие уравнения), так и неаналитические (у Адамара и того же Гурса). В первом случае на уравнение и краевые условия накладывались жесткие условия аналитичности, а в рассуждениях применялся метод мажорантных функций. Поиски неаналитических решений велись при весьма умеренных требованиях методами последовательных приближений (Гурса) или Римана (Адамар). В частности, Гурса сделал необходимые уточнения относительно задачи (13), (15). Соответствующие исследования Гурса и Адамара впоследствии будут предметом нашего рассмотрения.

Литература

1. Picard E. Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées par-tielles...- Journ. de math., 1890, **(4)6**, p. 145 – 210.

2. Picard E. Sur les méthodes...- В кн.: Darboux G. Leçons sur la théorie...des surfaces... Part 4, Paris, 1896, p. 353 – 367.

3. Picard E. Sur la detérmination des intégrales des équations aux dérivées partielles... – Bull. soc. math. de France, 1894, **22**, p. 103 – 106.

4. Picard E. Sur les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. – Bull. sci. Mathém.,1899, **(2)23**, p. 150 – 153.

при $|\alpha| > |\beta|$ можно положить $\alpha x = \xi, y = \eta$.