Уравнения аксоидов для решения задачи о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа, описывающего переходной процесс к асимптотическим равномерным вращениям тел

М.Е. Лесина, Я.В. Зиновьева

Донецкий национальный технический университет

Для решения, найденного в работе [1], получены уравнения аксоидов (подвижного и неподвижного) системы двух гироскопов Лагранжа, сочлененных идеальным сферическим шарниром. Исследована траектория шарнира для двух частных случаев, характеризующих решение. Выписаны матрицы вложения неизменно связанных с телом базисов в неподвижное пространство.

В работе [1] найдено решение, которое запишем в виде

$$\omega_1 = (\xi + 1)\kappa, \tag{1}$$

$$\omega_2 = C + Nk_0\theta, \tag{2}$$

$$\omega_3 = A_0 K + Nk_0\ ; \tag{3}$$

$$\Omega_1 = (\xi - 1)\kappa, \tag{4}$$

$$\Omega_2 = (C + Nk_0\theta)\cos\theta + (A_0 k + Nk_0)\sin\theta, \tag{5}$$

$$\Omega_3 = -(C + Nk_0\theta)\sin\theta + (A_0 k + Nk_0)\cos\theta\ ; \tag{6}$$

$$\xi(\theta) = 3 - 2\frac{Ak_0 + 2Nk + Nk_0\cos\theta}{Ak_0 + Nk + (C + Nk_0\theta)\sin\theta - (A_0 k + Nk_0)\cos\theta}. \tag{7}$$

Выделим случай $Nk_0 = 0$ (в соотношениях (2), (5)–(7) при этом отсутствуют пропорциональные углу θ слагаемые), и из трех вариантов $(N = 0,\ k_0 \neq 0;\ N \neq 0,\ k_0 = 0;\ N = 0,\ k_0 = 0\ )$ ограничимся последним

$$N = 0, \tag{8}$$

$$k_0 = 0. \tag{9}$$

Условие (8) означает, что одно из тел системы закреплено в центре масс, а условие (9) – циклическая постоянная n_0 обращается в нуль. Запишем теперь соотношение (2), (3), (5)–(7)

$$\omega_2 = C\,,\quad \omega_3 = A_0 k\,,$$

$$\Omega_2(\theta) = C\cos\theta + A_0 k\sin\theta,\quad \Omega_3(\theta) = -C\sin\theta + A_0 k\cos\theta,$$

$$\xi = 3. \tag{10}$$

Подставив (10) в (1), (4), находим

$$\omega_1 = 4\kappa, \tag{11}$$

$$\Omega_1 = 2\kappa. \tag{12}$$

С помощью замены

$$C = b\sin\beta\,,\qquad A_0 k = b\cos\beta\,,$$

где $b^2 = C^2 + A_0^2 k^2\,,\ \ tg\beta = \dfrac{C}{A_0 k}$

решение примет вид

$$\omega_2 = b\sin\beta, \tag{13}$$

$$\omega_3 = b\cos\beta, \tag{14}$$

$$\Omega_2(\theta) = b\sin(\theta+\beta)\,, \tag{15}$$

$$\Omega_3(\theta) = b\cos(\theta+\beta)\,. \tag{16}$$

Для определения $\kappa(\theta)$ используем интеграл [2][1] (5.18)$_*$, (5.15)$_*$–(5.17)$_*$

$$G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 = g^2\,, \tag{17}$$

где

[1] при ссылке на формулы работы [2] будем снабжать их звездочкой

$$
\begin{aligned}
&G_1 = (A - N\cos\theta)\omega_1 + (A_0 - N\cos\theta)\Omega_1, \\
&G_2 = (A - N\cos\theta)\omega_2 + (A_0\cos\theta - N)\Omega_2 - n_0\sin\theta, \\
&G_3 = (A_0\Omega_2 - N\omega_2)\sin\theta + n + n_0\cos\theta.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Параметры k и k_0 связаны с циклическими интегралами n, n_0

$$n = \left(AA_0 - N^2\right)k, \tag{19}$$

$$n_0 = \left(AA_0 - N^2\right)k_0. \tag{20}$$

Внесем соотношения (8), (9), (11) – (13), (15), (19), (20) в (18) и получим компоненты момента количества движения системы

$$
\begin{aligned}
&G_1 = 2(2A + A_0)\kappa, \\
&G_2 = b[A\sin\beta + A_0\sin(\theta+\beta)\cos\theta], \\
&G_3 = b[A\cos\beta + A_0\sin(\theta+\beta)\sin\theta],
\end{aligned}
\tag{21}
$$

подставив которые в интеграл (17), находим

$$
\begin{aligned}
&4(2A + A_0)^2\kappa^2 = g^2 - b^2(A + A_0)^2 + \\
&\quad + b^2A_0(2A + A_0)\cos^2(\theta+\beta).
\end{aligned}
\tag{22}
$$

параметры A, A_0, b, g должны удовлетворять неравенству

$$g^2 - b^2(A + A_0)^2 \geq 0.$$

Зависимость времени t от θ находим квадратурой из уравнения [2] (5.6)*

$$\dot{\theta} = -2\kappa$$

в виде

$$t - t_0 = -\int \frac{d\theta}{2\kappa(\theta)}. \tag{23}$$

В случае $g^2 - (A + A_0)^2 b^2 > 0$ (23) принимает вид

$$\frac{g}{2A+A_0}(t-t_0)=-\int\frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(l_0z^2+2l_1z+l_2)}}\,, \qquad (24)$$

где

$$z=tg\theta\,, \qquad (25)$$

$$l_0=1-\frac{b^2}{g^2}\left[A^2\sin^2\beta+(A+A_0)^2\cos^2\beta\right],$$

$$l_1=-\frac{(2A+A_0)A_0b^2\sin\beta\cos\beta}{g^2}\,, \qquad (26)$$

$$l_2=1-\frac{b^2}{g^2}\left[A^2\cos^2\beta+(A+A_0)^2\sin^2\beta\right].$$

Зависимость угла θ от t находим обращением эллиптического интеграла (24)–(26).

Если

$$g^2=(A+A_0)^2b^2\,, \qquad (27)$$

то соотношение (22) упрощается

$$4(2A+A_0)\kappa^2=A_0b^2\cos^2(\theta+\beta)$$

и после замены параметров

$$b^2=\frac{2A+A_0}{A_0}m^2 \qquad (28)$$

становится таким

$$2\kappa=m\cos(\theta+\beta)\,. \qquad (29)$$

Интеграл (23) также упрощается

$$m(t-t_0)=-\int\frac{d\theta}{\cos(\theta+\beta)}\,,$$

из него находим

$$u(t)=\cos(\theta+\beta)=\frac{2C_* e^{-mt}}{1+C_*^2 e^{-2mt}}, \tag{30}$$

$$\mathrm{v}(t)=\sin(\theta+\beta)=\frac{C_*^2 e^{-2mt}-1}{C_*^2 e^{-2mt}+1}, \tag{31}$$

где C_* – постоянная интегрирования.

Потенциальную энергию $\Pi(\theta)$ упругого элемента находим из интеграла энергии [2, (5.14)$_*$]

$$A\left(\omega_1^2+\omega_2^2\right)+A_0\left(\Omega_1^2+\Omega_2^2\right)-2N(\Omega_1\omega_1\cos\theta+\Omega_2\omega_2)+2\Pi(\theta)=2h.$$

После подстановки в него соотношений (11), (12), (13), (15), (8), (22)

$$\Pi(\theta)=h^*+\frac{AA_0}{2A+A_0}b^2\sin^2(\theta+\beta),$$

где

$$2h^*=2h-Ab^2\sin^2\beta-\frac{\left(g^2-A^2b^2\right)(4A+A_0)}{(2A+A_0)^2}.$$

Итак, при условии (27) основные переменные можно представить в виде явных функций времени

$$\omega_1(t)=\frac{4mC_* e^{-mt}}{C_*^2 e^{-2mt}+1}, \tag{32}$$

$$\Omega_1(t)=\frac{2mC_* e^{-mt}}{C_*^2 e^{-2mt}+1}, \tag{33}$$

$$\Omega_2(t)=\frac{b\left(C_*^2 e^{-2mt}-1\right)}{C_*^2 e^{-2mt}+1}, \tag{34}$$

$$\Omega_3(t)=\frac{2bC_* e^{-mt}}{C_*^2 e^{-2mt}+1}. \tag{35}$$

Отметим, что при $m>0$ из (32)–(35) следует

$$\lim_{t\to\infty}\omega_1(t)=0,\quad \lim_{t\to\infty}\Omega_1(t)=0,\quad \lim_{t\to\infty}\Omega_2(t)=-b,\quad \lim_{t\to\infty}\Omega_3(t)=0.$$

Дополнив эти значения условиями (13), (14), заключаем, что при $t\to\infty$ базисы $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$ стремятся совершать равномерные вращения.

Используя циклические интегралы [2, (5.11)*], найдем зависимость от времени углов собственного вращения тел

$$\dot{\varphi}=\frac{n}{J}-\omega_3, \tag{36}$$

$$\dot{\Phi}=\frac{n_0}{J_0}-\Omega_3(t). \tag{37}$$

Подставив в (36), (37) соотношения (8), (9), (14), (35), после интегрирования получим

$$\varphi(t)=\left[\left(\frac{A}{J}-1\right)b\cos\beta\right]t+\varphi_0,$$

$$\Phi(t)=2\frac{b}{m}\operatorname{arctg}C_*e^{-mt}+\Phi_0. \tag{38}$$

Из (38) заключаем, что $\lim\limits_{t\to\infty}\Phi(t)=\Phi_0$. Это означает, что при $t\to\infty$ тело S_0 стремится совершать равномерные вращения.

Подвижный аксоид тела *S*. Уравнения подвижного аксоида [2, (12.9)*] имеют вид:

$$\begin{gathered}\xi(t,\mu)=\mu\frac{\boldsymbol{\omega}_*}{\omega_*}+\frac{1}{\omega_*^2}[\boldsymbol{\omega}_*\times\mathbf{v}]=\\ =\xi_1\mathbf{e}_1+\xi_3\mathbf{e}_2+\xi_3\mathbf{e}_3=\xi_1^*\mathbf{e}_1^*+\xi_2^*\mathbf{e}_2^*+\xi_3^*\mathbf{e}_3^*.\end{gathered} \tag{39}$$

Предположим, что тело S сферически симметрично

$$A=J, \tag{40}$$

тогда из (36) имеем

$$\dot{\varphi}=0$$

и можно считать, что и

$$\varphi = 0 \tag{41}$$

Это означает, что тело S не имеет собственного вращения, то есть базисы $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ и $\overset{*}{\mathbf{e}}_1\overset{*}{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_3$ совпадают.

Циклический интеграл при этом имеет вид

$$\frac{n}{J} = \omega_3 = b\cos\beta. \tag{42}$$

Для построения аксоидов понадобятся векторы [2, (5.22)*, (5.24)*]

$$\mathbf{r}_* = -a\mathbf{e}_3 - a_0\mathbf{e}_3^0\,, \tag{43}$$

$$\mathbf{v} = -a\left(\omega_2\mathbf{e}_1 - \omega_1\mathbf{e}_2\right) - a_0\left(\Omega_2\mathbf{e}_1^0 - \Omega_1\mathbf{e}_2^0\right). \tag{44}$$

Так как имеет место условие (8), то возможны варианты

$$a_0 = 0\,, \tag{45}$$

$$a = 0\,, \tag{46}$$

которые необходимо рассматривать порознь.

Пусть имеет место условие (45), которое означает, что тело S_0 закреплено в центре масс. При этом соотношения (43), (44) таковы

$$\mathbf{r}_* = -a\mathbf{e}_3\,,$$

$$\mathbf{v} = -a\left(\omega_2\mathbf{e}_1 - \omega_1\mathbf{e}_2\right). \tag{47}$$

Подставив соотношения (47), (42) в уравнение (39), находим компоненты подвижного аксоида

$$\xi_1 = \left(\frac{\mu}{\omega_*} - \frac{a\omega_3}{\omega_*^2}\right)\omega_1\,,$$

$$\xi_2 = \left(\frac{\mu}{\omega_*} - \frac{a\omega_3}{\omega_*^2}\right)\omega_2\,,$$

$$\xi_3 = a + \left(\frac{\mu}{\omega_*} - \frac{a\omega_3}{\omega_*^2}\right)\omega_3\,,$$

которые с учетом (11), (29), (13), (14) принимают вид

$$\xi_1(\theta,\mu)=\left(\frac{\mu}{\omega_*(\theta)}-\frac{ab\cos\beta}{\omega_*^2(\theta)}\right)2m\cos(\theta+\beta),$$
$$\xi_2(\theta,\mu)=\left(\frac{\mu}{\omega_*(\theta)}-\frac{ab\cos\beta}{\omega_*^2(\theta)}\right)b\sin\beta, \tag{48}$$
$$\xi_3(\theta,\mu)=a+\left(\frac{\mu}{\omega_*(\theta)}-\frac{ab\cos\beta}{\omega_*^2(\theta)}\right)b\cos\beta,$$

где

$$\omega_*^2(\theta)=4m^2\cos^2(\theta+\beta)+b^2=$$
$$=b^2\left(1+\frac{4(2A+A_0)}{A_0}\cos^2(\theta+\beta)\right). \tag{49}$$

Явные зависимости компонент ξ_i от времени t получим, подставив в (48), (49) соотношение (30)

$$\xi_1(t,\mu)=\left(\frac{\mu}{\omega_*(t)}-\frac{ab\cos\beta}{\omega_*^2(t)}\right)\frac{4mC_*e^{-mt}}{C_*^2e^{-2mt}+1},$$
$$\xi_2(t,\mu)=\left(\frac{\mu}{\omega_*(t)}-\frac{ab\cos\beta}{\omega_*^2(t)}\right)b\sin\beta, \tag{50}$$
$$\xi_3(t,\mu)=a+\left(\frac{\mu}{\omega_*(t)}-\frac{ab\cos\beta}{\omega_*^2(t)}\right)b\cos\beta$$

в которых

$$\omega_*^2(t)=b^2\left(1+\frac{8(2A+A_0)C_*e^{-mt}}{A_0\left(C_*^2e^{-2mt}+1\right)}\right), \tag{51}$$

а параметры m и b связаны соотношением (28).

При выполнении условия (46), соотношения (43), (44) таковы

$$\mathbf{r}_*=-a_0\mathbf{e}_3^0,$$

$$\mathbf{v}=-a_0\left(\varOmega_2\mathbf{e}_1-\varOmega_1\mathbf{e}_2^0\right),$$

которые запишем в неизменно связанном с телом *S* базисе

$$\mathbf{r}_* = -a_0\left(-\mathbf{e}_2 \sin\theta + \mathbf{e}_3 \cos\theta\right),$$

$$\mathbf{v} = -a_0\left(\mathbf{e}_1 \Omega_2 - \mathbf{e}_2 \Omega_1 \cos\theta - \mathbf{e}_3 \Omega_1 \sin\Omega\right). \tag{52}$$

Внесем (52) в уравнение (39), учтем (42) и получим выражение для компонент аксоида

$$\begin{aligned}
\xi_1(\theta,\mu) &= \frac{\mu\omega_1(\theta)}{\omega_*(\theta)} + \frac{a_0}{\omega_*^2(\theta)}\left[\Omega_1(\theta)\omega_2 \sin\theta - \Omega_1(\theta)\omega_3 \cos\theta\right],\\
\xi_2(\theta,\mu) &= \frac{\mu\omega_2}{\omega_*(\theta)} - \frac{a_0}{\omega_*^2(\theta)}\left[\Omega_2(\theta)\omega_3 + \Omega_1(\theta)\omega_1(\theta)\sin\theta\right],\\
\xi_3(\theta,\mu) &= \frac{\mu\omega_3}{\omega_*(\theta)} + \frac{a_0}{\omega_*^2(\theta)}\left[\Omega_1(\theta)\omega_1(\theta)\cos\theta + \Omega_2(\theta)\omega_2\right],
\end{aligned} \tag{53}$$

в которых $\omega_*^2(\theta)$ определено соотношением (49).

Подставив выражения (11), (12), (29), (13)–(15) в (53), находим

$$\xi_1(\theta,\mu) = \mu\frac{2m\cos(\theta+\beta)}{\omega_*(\theta)} - \frac{a_0 bm\cos^2(\theta+\beta)}{\omega_*^2(\theta)},$$

$$\xi_2(\theta,\mu) = \frac{\mu b\sin\beta}{\omega_*(\theta)} - \frac{a_0}{\omega_*^2(\theta)}\left\{2m^2\cos^2(\theta+\beta)\sin\theta + \right.$$
$$\left. + b^2\sin(\theta+\beta)\cos\beta\right\},$$

$$\xi_3(\theta,\mu) = \frac{\mu b\cos\beta}{\omega_*(\theta)} + \frac{a_0}{\omega_*^2(\theta)}\left\{2m^2\cos^2(\theta+\beta)\cos\theta + \right.$$
$$\left. + b^2\sin(\theta+\beta)\sin\beta\right\}.$$

Представим их также в зависимости от времени

$$\xi_1(t,\mu)=\frac{\mu 2m\,u\,(t)}{\omega_*(t)}-\frac{a_0 bmu^2(t)}{\omega_*^2(t)},$$

$$\xi_2(t,\mu)=\frac{\mu b\sin\beta}{\omega_*(t)}-\frac{a_0}{\omega_*^2(t)}\left\{2m^2u^2(t)[\mathrm{v}(t)\cos\beta-u(t)\sin\beta]+\right.$$

$$\left.+b^2\,\mathrm{v}(t)\cos\beta\right\}, \tag{54}$$

$$\xi_3(t,\mu)=\frac{\mu b\cos\beta}{\omega_*(t)}+\frac{a_0}{\omega_*^2(t)}\left\{2m^2u^2(t)[u(t)\cos\beta+\mathrm{v}(t)\sin\beta]+\right.$$

$$\left.+b^2\,\mathrm{v}(t)\sin\beta\right\}.$$

Здесь $u\,(t)=\cos(\theta+\beta)$ и $\mathrm{v}\,(t)=\sin(\theta+\beta)$, $\omega_*(t)$ известные функции времени (30), (31), (51).

Неподвижный аксоид тела *S*. В работе [2] получено уравнение неподвижного аксоида тела S $(12.12)_*$ в виде

$$\zeta(t,\mu)=\mathbf{r}_*(t)+\mu\frac{\boldsymbol{\omega}_*(t)}{\omega_*(t)}+\frac{\boldsymbol{\omega}_*(t)\times\mathbf{v}(t)}{\omega_*^{\mathbf{2}}(t)}. \tag{55}$$

В неподвижном базисе $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3$ этот вектор имеет координаты ζ_1,ζ_2,ζ_3. Введем сначала цилиндрическую систему координат [3], [4], [5] $\mathbf{e}_\nu\mathbf{e}_p\mathbf{e}_\alpha$ с началом в центре масс системы тел.

$$\mathbf{e}_\nu=\frac{\mathbf{g}}{g},\quad \mathbf{e}_\rho=\frac{g\boldsymbol{\omega}_*-\omega_\nu\mathbf{g}}{g\omega_\rho},\quad \mathbf{e}_\alpha=\frac{\mathbf{g}\times\boldsymbol{\omega}_*}{g\omega_\rho}, \tag{56}$$

$$\omega_\nu=\boldsymbol{\omega}_*\bullet\frac{\mathbf{g}}{g}, \tag{57}$$

$$\omega_\rho=\boldsymbol{\omega}_*\bullet\mathbf{e}_\rho=\sqrt{\omega_*^2-\omega_\nu^2}\,, \tag{58}$$

$$g\omega_\rho^2\dot{\alpha}=\mathbf{g}\bullet(\boldsymbol{\omega}_*\times\dot{\boldsymbol{\omega}}_*). \tag{59}$$

Связь между базисами $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3$ и $\mathbf{e}_\nu\mathbf{e}_p\mathbf{e}_\alpha$ определяют зависимости

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\nu &= \mathbf{E}_1\,, \\ \mathbf{e}_\rho &= \mathbf{E}_2\cos\alpha + \mathbf{E}_3\sin\alpha\,, \\ \mathbf{e}_\alpha &= -\mathbf{E}_2\sin\alpha + \mathbf{E}_3\cos\alpha\,. \end{aligned} \tag{60}$$

Запишем разложение вектора $\boldsymbol{\zeta}(t,\mu)$ в цилиндрической системе координат (56)

$$\boldsymbol{\zeta}(t,\mu) = \zeta_\nu(t,\mu)\,\mathbf{e}_\nu + \zeta_\rho(t,\mu)\,\mathbf{e}_\rho + \zeta_\alpha(t,\mu)\,\mathbf{e}_\alpha\,,$$

где

$$\begin{aligned} \zeta_\nu(t,\mu) &= \boldsymbol{\zeta}\bullet\mathbf{e}_\nu = \frac{\boldsymbol{\zeta}\bullet\mathbf{g}}{g}\,; \\ \zeta_\rho(t,\mu) &= \boldsymbol{\zeta}\bullet\mathbf{e}_\rho = \frac{\boldsymbol{\zeta}\bullet(g\boldsymbol{\omega}_* - \omega_*\mathbf{g})}{\mathrm{g}\omega_\rho}\,; \\ \zeta_\alpha(t,\mu) &= \boldsymbol{\zeta}\bullet\mathbf{e}_\alpha = \frac{\boldsymbol{\zeta}\bullet(\mathbf{g}\times\boldsymbol{\omega}_*)}{g\omega_\rho}\,. \end{aligned} \tag{61}$$

Подставив (21), (29), (11), (13), (14), (49), (28) в (57)–(59), находим

$$\omega_\nu(\theta) = b\left(1 + \frac{A_0}{A+A_0}\cos^2(\theta+\beta)\right), \tag{62}$$

$$\begin{aligned} \omega_\rho^2(\theta) = \frac{A_0 m^2\cos^2(\theta+\beta)}{(A+A_0)^2}\big[2\,(A+A_0) - \\ -(2A+A_0)\cos^2(\theta+\beta)\big], \end{aligned} \tag{63}$$

$$\dot{\alpha} = \frac{2m\,(A+A_0)(2A+A_0)\sin^2(\theta+\beta)}{\sqrt{A_0(2A+A_0)}\,\left[A_0 + (2A+A_0)\sin^2(\theta+\beta)\right]}, \tag{64}$$

которые с учетом (30) имеют вид

$$\omega_\nu(t) = b\left(1 + \frac{4A_0C_*^2e^{-2mt}}{(A+A_0)\left(C_*^2e^{-2mt}+1\right)^2}\right), \tag{65}$$

$$\omega_\rho^2 = \frac{4A_0 m^2 C_*^2 e^{-2mt}}{(A+A_0)^2 \left(C_*^2 e^{-2mt}+1\right)^2}\left[2(A+A_0) - \right.$$
$$\left. - \frac{(2A+A_0)4C_*^2 e^{-2mt}}{\left(C_*^2 e^{-2mt}+1\right)^2}\right], \tag{66}$$

$$\alpha(t) = bt + \operatorname{arctg}\frac{(A+A_0)C_*^2 e^{-2mt} - A}{\sqrt{A_0(2A+A_0)}}.$$

Используя зависимость $\alpha(t)$, находим

$$\cos\alpha(t) = \frac{1}{K(t)}\left\{-\left[(A+A_0)C_*^2 e^{-2mt} - A\right]\sin bt + \right.$$
$$\left. + \sqrt{A_0(2A+A_0)}\cos bt\right\}, \tag{67}$$

$$\sin\alpha(t) = \frac{1}{K(t)}\left\{-\left[(A+A_0)C_*^2 e^{-2mt} - A\right]\cos bt + \right.$$
$$\left. + \sqrt{A_0(2A+A_0)}\sin bt\right\}, \tag{68}$$

где

$$K^2(t) = (A+A_0)\left[(A+A_0)C_*^4 e^{-4mt} - 2AC_*^2 e^{-2mt} + A + A_0\right]. \tag{69}$$

С учетом значения (69) можно записать (66) в виде

$$\omega_\rho^2(t) = \sqrt{\frac{2A_0}{A+A_0}} \cdot \frac{1}{(A+A_0)} \frac{2mK(t)C_* e^{-mt}}{\left[C_*^2 e^{-2mt}+1\right]^2}. \tag{70}$$

Подставив выражение (55) в (61), запишем уравнение неподвижного аксоида в таком виде

$$\zeta_\nu(\theta,\mu) = \left(\frac{\mu}{\omega_*(\theta)} - \frac{an}{J\omega_*^2(\theta)}\right)\omega_\nu(\theta) - \frac{a_0 G_3^0}{g} +$$
$$+ \frac{a_0}{g\omega_*^2(\theta)}\left[\left(\mathbf{g}\bullet\mathbf{e}_3^0\right)\left(\mathbf{\Omega}_*(\theta)\bullet\boldsymbol{\omega}_*(\theta)\right) - g\Omega_\nu(\theta)\left(\boldsymbol{\omega}_*(\theta)\bullet\mathbf{e}_3^0(\theta)\right)\right],$$

$$\zeta_\rho(\theta,\mu)=\left(\frac{\mu}{\omega_*(\theta)}-\frac{an}{J\omega_*^2(\theta)}\right)\omega_\rho(\theta)-$$
$$-\frac{a_0}{g\omega_\rho(\theta)}\left[\omega_\nu(\theta)\left(\mathbf{g}\bullet\mathbf{e}_3^0\right)\left[1-\frac{\mathbf{\Omega}_*\cdot\boldsymbol{\omega}_*}{\omega_*^2(\theta)}\right]-g\left(\boldsymbol{\omega}_*\bullet\mathbf{e}_3^0\right)\left(1-\frac{\boldsymbol{\omega}_\nu\mathbf{\Omega}_\nu}{\omega_*^2(\theta)}\right)\right],\qquad(71)$$

$$\zeta_\alpha(\theta)=\frac{a_0}{g\omega_\rho(\theta)}\left\{-G_1\left(\frac{n}{J}-\omega_3\right)\sin\theta-\left(\mathbf{g}\bullet\mathbf{e}_2^0\right)(\Omega_1-\omega_1)+\right.$$
$$\left.+\frac{g\omega_\nu}{\omega_*^2}\left[-\omega_1\Omega_2+\Omega_1\left(\boldsymbol{\omega}_*\bullet\mathbf{e}_2^0\right)\right]\right\},$$

$$\mathbf{g}\bullet\mathbf{e}_3^0=(N\Omega_2-A\omega_2)\sin\theta+n\cos\theta+n_0\ ,$$

$$\boldsymbol{\omega}_*\bullet\mathbf{e}_2^0=\omega_2\cos\theta+\frac{n}{J}\sin\theta,\quad \boldsymbol{\omega}_*\bullet\mathbf{e}_3^0=-\omega_2\sin\theta+\frac{n}{J}\cos\theta.$$

Отметим, что уравнения (71) получены без учета ограничений (8), (9), (27), (40). С учетом условий (8), (45), (27), (40) упростим (71)

$$\zeta_\nu(\theta,\mu)=\left(\frac{\mu}{\omega_*(\theta)}-\frac{ab\cos\beta}{\omega_*^2(\theta)}\right)\omega_\nu(\theta),$$
$$\zeta_\rho(\theta,\mu)=\left(\frac{\mu}{\omega_*(\theta)}-\frac{ab\cos\beta}{\omega_*^2(\theta)}\right)\omega_\rho(\theta),\qquad(72)$$
$$\zeta_\alpha=0.$$

Компоненты неподвижного аксоида в неподвижном базисе с учетом (60) запишем так

$$\zeta_1=\zeta_\nu\ ,\quad \zeta_2=\zeta_\rho\cos\alpha-\zeta_\alpha\sin\alpha,\quad \zeta_3=\zeta_\rho\sin\alpha+\zeta_\alpha\cos\alpha\qquad(73)$$

и, подставив сюда (72), получим

$$\zeta_1(\theta,\mu)=\left[\frac{\mu}{\omega_*(\theta)}-\frac{ab\cos\beta}{\omega_*^2(\theta)}\right]\omega_\nu(\theta),$$

$$\zeta_2(\theta,\mu)=\left[\frac{\mu}{\omega_*(\theta)}-\frac{ab\cos\beta}{\omega_*^2(\theta)}\right]\omega_\rho(\theta)\cos\alpha, \qquad (74)$$

$$\zeta_3(\theta,\mu)=\left[\frac{\mu}{\omega_*(\theta)}-\frac{ab\cos\beta}{\omega_*^2(\theta)}\right]\omega_\rho(\theta)\sin\alpha.$$

Явную зависимость ζ_i от t находим, подставляя в эти равенства соотношения (51), (65), (67)–(70).

При движении подвижный аксоид (50) катится без скольжения по неподвижному (74).

Аналогично, принимая во внимание ограничения (8), (46), (27), (40) и подставляя в (71) значения (11), (12), (29), (13)–(16), (21), находим

$$\zeta_\nu(\theta,\mu)=\frac{\mu\omega_\nu}{\omega_*}-\frac{a_0m^2\cos(\theta+\beta)}{(A+A_0)A_0\omega_*^2}\big[(2A+A_0)(A+A_0)+$$
$$+2AA_0\cos^2(\theta+\beta)\big],$$

$$\zeta_\rho(\theta,\mu)=\frac{\mu\omega_\rho}{\omega_*}+\frac{a_0A_0m^2b\cos^3(\theta+\beta)}{(A+A_0)^2\omega_\rho\omega_*^2}\big[-3(A+A_0)+$$
$$+2A\cos^2(\theta+\beta)\big],$$

$$\zeta_\alpha(\theta)=\frac{a_0(2A+3A_0)m^3\cos^3(\theta+\beta)\sin(\theta+\beta)}{(A+A_0)\omega_\rho\omega_*^2}.$$

Подставив эти значения в (73), получим уравнение неподвижного аксоида, по которому катится подвижный аксоид (54). Это движение сопровождается скольжением вдоль общей образующей $\boldsymbol{\omega}_*$ со скоростью

$$\frac{a_0bm\sin(\theta+\beta)\cos(\theta+\beta)}{\sqrt{b^2+4m^2\cos^2(\theta+\beta)}}.$$

Для визуализации движения аксоидов на экране монитора необходимо иметь уравнение направляющей линии в неподвижном пространстве и матрицы вложения неизменно связанных с телом базисов в неподвижное пространство.

Параметрические уравнения направляющей линии–траектории сферического шарнира.

Сферический шарнир указывает вектор (59).

Запишем разложение этого вектора в базисе $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$

$$\mathbf{r}_* = \mathbf{e}_2 a_0 \sin\theta + \mathbf{e}_3(-a - a_0 \cos\theta), \tag{75}$$

а так же его представление в базисе $\mathbf{e}_\nu\mathbf{e}_\rho\mathbf{e}_\alpha$

$$\mathbf{r}_* = r_\nu \mathbf{e}_\nu + r_\rho \mathbf{e}_\rho + r_\alpha \mathbf{e}_\alpha\ , \tag{76}$$

$$r_\nu = \mathbf{r}_* \bullet \mathbf{e}_\nu\ , \quad r_\rho = \mathbf{r}_* \bullet \mathbf{e}_\rho\ , \quad r_\alpha = \mathbf{r}_* \bullet \mathbf{e}_\alpha\ . \tag{77}$$

Подставив (56), (75) в (77), находим компоненты вектора $\mathbf{r}_*$ в цилиндрической системе координат

$$r_* = \frac{-aG_3 - a_0 G_3^0}{g},$$

$$r_\rho = \frac{a\left(\omega_\nu G_3 - g\,\dfrac{n}{J}\right) + a_0\left[\omega_\nu G_3^0 + g\left(\omega_2 \sin\theta - \dfrac{n}{J}\cos\theta\right)\right]}{g\omega_\rho}, \tag{78}$$

$$r_\alpha = \frac{-a\,(G_1\omega_2 - G_2\omega_1) + a_0\left[\left(G_3\omega_1 - G_1\,\dfrac{n}{J}\right)\sin\theta - (G_1\omega_2 - G_2\omega_1)\cos\theta\right]}{g\omega_\rho}$$

где

$$G_3^0 = -G_2 \sin\theta + G_3 \cos\theta\,.$$

В общем случае координаты траектории шарнира, как следует из (78), удовлетворяют уравнению

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + a_0^2 + 2aa_0 \cos\theta\,.$$

Запишем значения (78) при условиях (27), (40), (45) с учетом (11), (29), (13), (14), (21)

$$r_\nu = \frac{-a\,(A\cos\beta + A_0\sin(\theta+\beta)\sin\theta)}{A+A_0},$$

$$r_\rho = \frac{-a\sqrt{2A+A_0}}{(A+A_0)}\,\frac{\left[(A+A_0)\sin(\theta+\beta)\sin\beta + A_0\cos\theta\cos^2(\theta+\beta)\right]}{\sqrt{2\,(A+A_0)-(2A+A_0)\cos^2(\theta+\beta)}},$$

$$r_\alpha = \frac{a\sqrt{A_0}\,(\sin\beta - 2\sin(\theta+\beta)\cos\theta)}{\sqrt{2\,(A+A_0)-(2A+A_0)\cos^2(\theta+\beta)}}, \tag{79}$$

Уравнения направляющей линии неподвижного аксоида в неподвижном пространстве получим, внеся (60) в (76),

$$\begin{aligned} &\mathbf{r}_* = x\mathbf{E}_1 + y\mathbf{E}_2 + z\mathbf{E}_3\,, \\ &x = r_\nu\,, \\ &y = r_\rho\cos\alpha - r_\alpha\sin\alpha\,, \\ &z = r_\rho\sin\alpha + r_\alpha\cos\alpha\,. \end{aligned} \tag{80}$$

Явную зависимость *x*, *y*, *z* от времени *t* получим, подставив в (79), (80) соответственно (30), (31), (67)–(69).

Отметим, что

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2\,,$$

то есть траектория шарнира принадлежит сфере радиуса *a* с центром в точке C_* – центре масс системы. Причем эта сферическая кривая расположена между двумя окружностями, находящимися в плоскостях

$$x = \frac{-a}{2\,(A+A_0)}\left[A_0 + (2A+A_0)\cos\beta\right]$$

и

$$x = \frac{-a}{2\,(A+A_0)}\left[-A_0 + (2A+A_0)\cos\beta\right].$$

Аналогично запишем компоненты (78) при условиях (46), (27),(40) с учетом (11), (29), (13), (14), (21)

$$r_\nu = \frac{-a_0 A}{A + A_0} \cos(\theta + \beta),$$

$$r_\rho = \frac{-a_0 \sqrt{2A + A_0}\,\left[A + A_0 - A\cos^2(\theta + \beta)\right]}{(A + A_0)\sqrt{2(A + A_0) - (2A + A_0)\cos^2(\theta + \beta)}},$$

$$r_\alpha = \frac{a_0 \sqrt{A_0}\,\sin(\theta + \beta)}{\sqrt{2(A + A_0) - (2A + A_0)\cos^2(\theta + \beta)}}.$$

В неподвижном пространстве компоненты имеют вид (80). Так же, как и в предыдущем случае, имеет место уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = a_0^2 .$$

Из ограниченности первой компоненты $\left|\frac{x}{a_0}\right| \le \frac{A}{A + A_0}$, следует, что траектория шарнира расположена между двумя окружностями сферы

$$x = \pm \frac{a_0 A}{A + A_0},$$

$$y^2 + z^2 = \frac{a_0^2 A_0 (2A + A_0)}{(A + A_0)^2}.$$

Матрица вложения неизменно связанного с телами базиса $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ в неподвижное пространство $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3$. Базисы $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ и $\overset{*}{\mathbf{e}}_1\overset{*}{\mathbf{e}}_2\overset{*}{\mathbf{e}}_3$ совпадают вследствие условия (41). Найдем соотношение, связывающее $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3$, используя формулы (60), (56)

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{g}}{g}, \quad \mathbf{E}_2 = \frac{(g\boldsymbol{\omega}_* - \omega_\nu \mathbf{g})\cos\alpha - (\mathbf{g} \times \boldsymbol{\omega}_*)\sin\alpha}{g\omega_\rho},$$

$$\mathbf{E}_3 = \frac{(g\boldsymbol{\omega}_* - \omega_\nu \mathbf{g})\sin\alpha - (\mathbf{g} \times \boldsymbol{\omega}_*)\cos\alpha}{g\omega_\rho},$$

$$\mathbf{E}_1 = \frac{G_1}{g}\mathbf{e}_1 + \frac{G_2}{g}\mathbf{e}_2 + \frac{G_3}{g}\mathbf{e}_3 ,$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_2 = &\left((g\omega_1 - G_1\omega_\nu)\cos\alpha - \left(G_2\frac{n}{J} - G_3\omega_2 \right)\sin\alpha \right)\frac{\mathbf{e}_1}{g\omega_\rho} + \\
&+ \left((g\omega_2 - G_2\omega_\nu)\cos\alpha - \left(G_3\omega_1 - G_1\frac{n}{J} \right)\sin\alpha \right)\frac{\mathbf{e}_2}{g\omega_\rho} + \\
&+ \left(\left(g\frac{n}{J} - G_3\omega_\nu \right)\cos\alpha - (G_1\omega_2 - G_2\omega_1)\sin\alpha \right)\frac{\mathbf{e}_3}{g\omega_\rho} , \\
\mathbf{E}_3 = &\left((g\omega_1 - G_1\omega_\nu)\sin\alpha + \left(G_2\frac{n}{J} - G_3\omega_2 \right)\cos\alpha \right)\frac{\mathbf{e}_1}{g\omega_\rho} + \\
&+ \left((g\omega_2 - G_2\omega_\nu)\sin\alpha + \left(G_3\omega_1 - G_1\frac{n}{J} \right)\cos\alpha \right)\frac{\mathbf{e}_2}{g\omega_\rho} + \\
&+ \left(\left(g\frac{n}{J} - G_3\omega_\nu \right)\sin\alpha + (G_1\omega_2 - G_2\omega_1)\cos\alpha \right)\frac{\mathbf{e}_3}{g\omega_\rho} .
\end{aligned} \tag{81}$$

Матрица вложения $\mathbf{E}_{ij}$ является единичной, то есть

$$\mathbf{E}_i = E_{ij} \bullet \mathbf{e}_j ,$$

$$E_{ij} \bullet E_{jn} = \delta_{in} ,$$

и, следовательно, можно записать

$$\mathbf{e}_i = E_{ij} \bullet \mathbf{E}_j .$$

Представим компоненты матрицы вложения, внеся в соотношение (81) значения (21), (29), (30), (31)

$$E_{11} = \frac{\sqrt{(2A + A_0)A_0}}{A + A_0}\frac{2C_* e^{-mt}}{\left(C_*^2 e^{-2mt} + 1\right)},$$

$$E_{12}=\frac{1}{A+A_0}\left\{A\sin\beta+A_0\,\frac{\left(C_*^2e^{-2mt}-1\right)}{\left(C_*^2e^{-2mt}+1\right)^2}\left[2C_*e^{-mt}\cos\beta+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(C_*^2e^{-2mt}-1\right)\sin\beta\right]\right\},$$

$$E_{13}=\frac{1}{A+A_0}\left\{A\cos\beta+A_0\,\frac{\left(C_*^2e^{-2mt}-1\right)}{\left(C_*^2e^{-2mt}+1\right)^2}\left[-2C_*e^{-mt}\sin\beta+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(C_*^2e^{-2mt}-1\right)\cos\beta\right]\right\}.$$

Так как явные зависимости ω_ρ, $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ от t уже определены соотношениями (67)–(70), достаточно найти шесть компонент векторов $\dfrac{g\boldsymbol{\omega}_*-\mathbf{g}\omega_\nu}{g}$ и $\dfrac{\mathbf{g}\times\boldsymbol{\omega}_*}{g}$ в зависимости от угла θ, а затем и от времени.

$$E_{21}=\frac{g\omega_1-G_1\omega_\nu}{g}=$$

$$=\frac{A_0}{(A+A_0)^2}m\cos(\theta+\beta)\left(A+A_0-(2A+A_0)\cos^2(\theta+\beta)\right),$$

$$E_{22}=\frac{g\omega_2-G_2\omega_\nu}{g}=-\frac{A_0b}{(A+A_0)^2}\cos(\theta+\beta)\left(A_0\sin\theta\cos^2(\theta+\beta)+\right.$$

$$\left.+(A+A_0)\cos\beta\sin(\theta+\beta)\right),$$

$$E_{23}=\frac{g\omega_3-G_3\omega_\nu}{g}=\frac{A_0b}{(A+A_0)^2}\cos(\theta+\beta)\left(A_0\cos\theta\cos^2(\theta+\beta)+\right.$$

$$\left.+(A+A_0)\sin\beta\sin(\theta+\beta)\right),$$

$$E_{31}=\frac{G_2\omega_3-G_3\omega_2}{g}=\frac{A_0}{A+A_0}b\sin(\theta+\beta)\cos(\theta+\beta),$$

$$E_{32}=\frac{G_3\omega_1-G_1\omega_3}{g}=-\frac{A_0}{A+A_0}m\cos(\theta+\beta)\cos(2\theta+\beta),$$

$$E_{33}=\frac{G_1\omega_2-G_2\omega_1}{g}=-\frac{A_0}{A+A_0}m\cos(\theta+\beta)\sin(2\theta+\beta).$$

Здесь $\cos(\theta+\beta)$ и $\sin(\theta+\beta)$ представлены соотношениями (30), (31), а

$$\sin(2\theta+\beta)=\frac{\left(C_*^4e^{-4mt}-6C_*^2e^{-2mt}+1\right)\sin\beta+4C_*e^{-mt}\left(C_*^2e^{-2mt}-1\right)\cos\beta}{\left(C_*^2e^{-2mt}+1\right)^2},$$

$$\cos(2\theta+\beta)=\frac{4C_*e^{-mt}\left(C_*^2e^{-2mt}-1\right)\sin\beta-\left(C_*^4e^{-4mt}-6C_*^2e^{-2mt}+1\right)\cos\beta}{\left(C_*^2e^{-2mt}+1\right)^2}.$$

Вследствие громоздкости не будем выписывать окончательные выражения для $E_{2i}(t)$ и $E_{3i}(t)$.

Подвижный аксоид тела S_0. Для построения подвижного аксоида тела S_0 необходимо все векторы задавать либо в полуподвижном базисе $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$ либо неизменно связанном с S_0 базисе $\mathbf{e}_1^{0*}\mathbf{e}_2^{0*}\mathbf{e}_3^{0*}$.

Отметим, что базисные векторы связаны соотношениями [2, (5.5)*, (5.35)*].

$$\mathbf{e}_2^0=\mathbf{e}_2\cos\theta+\mathbf{e}_3\sin\theta,\quad \mathbf{e}_3^0=-\mathbf{e}_2\sin\theta+\mathbf{e}_3\cos\theta;$$

$$\mathbf{e}_1^{0*}=\mathbf{e}_1^0\cos\Phi+\mathbf{e}_2^0\sin\Phi,\quad \mathbf{e}_2^{0*}=-\mathbf{e}_1^0\sin\Phi+\mathbf{e}_2^0\cos\Phi.$$

Потребуется представление векторов $\mathbf{r}_*,\mathbf{v},\mathbf{g}$ в базисе $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$.
Векторы

$$\mathbf{r}_*=-\mathbf{e}_2^0a\sin\theta+\mathbf{e}_3^0(-a\cos\theta-a_0), \tag{82}$$

$$\mathbf{v}=\mathbf{e}_1(-a\omega_2-a_0\Omega_2)+\mathbf{e}_2(a_0\Omega_1+a\omega_1\cos\theta)-\mathbf{e}_3^0a\omega_1\sin\theta, \tag{83}$$

$$\mathbf{\Omega}_*=\Omega_1\mathbf{e}_1+\Omega_2\mathbf{e}_2^0, \tag{84}$$

$$G_2^0=G_2\cos\theta+G_3\sin\theta,\quad G_3^0=-G_2\sin\theta+G_3\cos\theta. \tag{85}$$

Внесем значения (21), (42) в (85), получим

$$G_1^0=(2A+A_0)m\cos(\theta+\beta), \tag{86}$$

$$G_2^0=(A+A_0)b\sin(\theta+\beta), \tag{87}$$

$$G_3^0=Ab\cos(\theta+\beta). \tag{88}$$

Уравнение подвижного аксоида тела S_0 имеет вид

$$\boldsymbol{\xi}^0(\theta,\mu)=\mu\frac{\mathbf{\Omega}_*(\theta)}{\Omega_*}+\frac{\mathbf{\Omega}_*(\theta)\times\mathbf{v}(\theta)}{\Omega_*^2(\theta)}=$$
$$=\xi_1^0(\theta,\mu)\,\mathbf{e}_1+\xi_2^0(\theta,\mu)\,\mathbf{e}_2^0+\xi_3^0(\theta)\,\mathbf{e}_3^0\,. \tag{89}$$

Следствием условия (8) являются условия (45), (46), которые и рассматриваем порознь.

Если выполняется условие (45), векторы (82), (83) принимают вид

$$\begin{aligned}&\mathbf{r}_*=-a\left(\mathbf{e}_2^0\sin\theta+\mathbf{e}_3^0\cos\theta\right),\\&\mathbf{v}=a\left(-\mathbf{e}_1\omega_2+\mathbf{e}_2^0\omega_1\cos\theta-\mathbf{e}_3^0\omega_1\sin\theta\right).\end{aligned} \tag{90}$$

Внесем векторы (84), (90) в уравнение (89) и определим

$$\begin{aligned}&\xi_1^0(\theta,\mu)=\mu\frac{m\cos(\theta+\beta)}{\Omega_*}-\frac{2amb}{\Omega_*^2(\theta)}\cos(\theta+\beta)\sin(\theta+\beta)\sin\theta\,,\\&\xi_2^0(\theta,\mu)=\mu\frac{b\sin(\theta+\beta)}{\Omega_*}+\frac{2am^2}{\Omega_*^2(\theta)}\cos^2(\theta+\beta)\sin\theta\,,\\&\xi_3^0(\theta)=\frac{a}{\Omega_*^2(\theta)}\left(2m^2\cos^2(\theta+\beta)\cos\theta+b^2\sin\beta\sin(\theta+\beta)\right),\end{aligned} \tag{91}$$

где

$$\Omega_*^2(\theta)=\frac{m^2}{A_0}\left(2A+A_0-2A\cos^2(\theta+\beta)\right).$$

Представим вектор $\boldsymbol{\xi}^0(\theta,\mu)$ в неизменно связанном с телом S_0 базисе

$$\boldsymbol{\xi}^0(\theta,\mu)=\xi_1^{0*}(\theta,\mu)\,\mathbf{e}_1^{0*}+\xi_2^{0*}(\theta,\mu)\,\mathbf{e}_2^{0*}+\xi_3^0(\theta)\,\mathbf{e}_3^0\,,$$

где

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\xi}_1^{0*}(\theta,\mu)=\xi_1^0(\theta,\mu)\cos\Phi(\theta)+\xi_2^0(\theta,\mu)\sin\Phi(\theta)\,,\\&\boldsymbol{\xi}_2^{0*}(\theta,\mu)=-\xi_1^0(\theta,\mu)\sin\Phi(\theta)+\xi_2^0(\theta,\mu)\cos\Phi(\theta)\,.\end{aligned} \tag{92}$$

Причем зависимость $\Phi(t)$ найдена в виде (38). Потребуется так же

$$\Phi(\theta)=\Phi_0+\frac{b}{m}\theta\,.$$

Если же выполняется условие (46), то векторы (82), (83) имеют вид

$$\mathbf{r}_* = -a_0 \mathbf{e}_3^0 ,$$

$$\mathbf{v} = a_0 \left(-\mathbf{e}_1 \Omega_2 + \mathbf{e}_2^0 \Omega_1 \right)$$

и подвижный аксоид теперь таков

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}^0(\theta,\mu) &= \mu \frac{\boldsymbol{\Omega}_*(\theta)}{\Omega_*} + a_0 \mathbf{e}_3^0 = \\ &= \mu \frac{\Omega_1^*(\theta)}{\Omega_*} \mathbf{e}_1^{0*} + \mu \frac{\Omega_2^*(\theta)}{\Omega_*} \mathbf{e}_2^{0*} + a_0 \mathbf{e}_3^0 , \end{aligned} \tag{93}$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_1^*(\theta) &= m\cos(\theta+\beta)\cos\Phi(\theta) + b\sin s(\theta+\beta)\sin\Phi(\theta), \\ \Omega_2^*(\theta) &= -m\cos(\theta+\beta)\sin\Phi(\theta) + b\sin s(\theta+\beta)\cos\Phi(\theta). \end{aligned} \tag{94}$$

Неподвижный аксоид тела S_0. Как уже указывалось, уравнение неподвижного аксоида имеет вид

$$\boldsymbol{\zeta}^0(\theta,\mu) = \mu \frac{\boldsymbol{\Omega}_*(\theta)}{\Omega_*} + \mathbf{r}_*(\theta) + \frac{\boldsymbol{\Omega}_*(\theta)\times \mathbf{v}(\theta)}{\Omega_*^2(\theta)}$$

и должно быть записано в неподвижной системе координат $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2^0\mathbf{E}_3^0$

$$\zeta^0(\theta,\mu) = \zeta_1^0(\theta,\mu)\mathbf{E}_1 + \zeta_2^0(\theta,\mu)\mathbf{E}_2^0 + \zeta_3^0(\theta,\mu)\mathbf{E}_3^0 .$$

Вначале введем связанную с телом S_0 цилиндрическую систему координат $\mathbf{e}_\nu^0\mathbf{e}_\alpha^0\mathbf{e}_\rho^0$ с началом в центре масс системы C_*.

$$\mathbf{e}_\nu = \frac{\mathbf{g}}{g}, \quad \mathbf{e}_\rho^0 = \frac{g\boldsymbol{\Omega}_* - \Omega_*\mathbf{g}}{g\Omega_\rho}, \quad \mathbf{e}_\alpha^0 = \frac{\mathbf{g}\times\boldsymbol{\Omega}_*}{g\Omega_\rho}, \tag{95}$$

где

$$\Omega_\nu = \frac{G_1\Omega_1 + G_2^0\Omega_2}{g}, \tag{96}$$

$$\Omega_\rho^2 = \Omega_1^2 + \Omega_2^2 - \Omega_\nu^2 . \tag{97}$$

Из соотношений (95) выразим векторы базиса $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$ через $\mathbf{e}_\nu\mathbf{e}_\rho^0\mathbf{e}_\alpha^0$ в виде

$$\mathbf{e}_1(t)=\kappa_{11}\mathbf{e}_\nu+\kappa_{12}\mathbf{e}_\rho^0+\kappa_{13}\mathbf{e}_\alpha^0\,,$$

$$\mathbf{e}_2^0(t)=\kappa_{21}\mathbf{e}_\nu+\kappa_{22}\mathbf{e}_\rho^0+\kappa_{23}\mathbf{e}_\alpha^0\,,$$

$$\mathbf{e}_3^0(t)=\kappa_{31}\mathbf{e}_\nu+\kappa_{32}\mathbf{e}_\rho^0+\kappa_{33}\mathbf{e}_\alpha^0\,,$$

где

$$\kappa_{11}(t)=\frac{\sqrt{A_0(2A+A_0)}}{A+A_0}u(t),\quad \kappa_{21}(t)=v(t),\quad \kappa_{31}(t)=\frac{A}{A+A_0}u(t),$$

$$\kappa_{12}(t)=-\sqrt{\frac{A}{2(A+A_0)}}\,\frac{\left(A+A_0-(2A+A_0)u^2(t)\right)}{K(t)},$$

$$\kappa_{22}(t)=\sqrt{\frac{(A+A_0)(2A+A_0)}{2}}\,\frac{u(t)\,v(t)}{K(t)},$$

$$\kappa_{32}(t)=-\sqrt{\frac{2A+A_0}{2(A+A_0)}}\,\frac{\left(A+A_0-Au^2(t)\right)}{K(t)},$$

$$\kappa_{13}(t)=-\sqrt{\frac{(A+A_0)(2A+A_0)}{2}}\,\frac{v(t)}{K(t)},$$

$$\kappa_{23}(t)=\sqrt{\frac{A_0(A+A_0)}{2}}\,\frac{u(t)}{K(t)},$$

$$\kappa_{33}(t)=\sqrt{\frac{A_0(A+A_0)}{2}}\,\frac{v(t)}{K(t)},$$

в этих выражениях $u(t)=\cos(\theta+\beta)$, $v(t)=\sin(\theta+\beta)$, $K(t)$ определены (30), (31), (69).

Подставив (12), (29), (86)–(88) в (96), (97) находим

$$\Omega_\nu=b\left(1-\frac{A}{A+A_0}\cos^2(\theta+\beta)\right), \tag{99}$$

$$\Omega_\rho^2 = \frac{A^2 m^2}{A_0 (A + A_0)^2} \cos^2(\theta + \beta)\left[2(A + A_0) - \right. \qquad (100)$$

$$\left. - (2A + A_0)\cos^2(\theta + \beta)\right],$$

$$\Omega_*^2 = \frac{m^2}{A_0}\left(2A + A_0 - 2A\cos^2(\theta + \beta)\right).$$

Связь между базисами $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2^0\mathbf{E}_3^0$ и $\mathbf{e}_\nu\mathbf{e}_\rho^0\mathbf{e}_\alpha^0$ определяют соотношения

$$\mathbf{e}_\nu = \mathbf{E}_1 ,$$

$$\mathbf{e}_\rho^0 = \mathbf{E}_2^0 \cos\gamma + \mathbf{E}_3^0 \sin\gamma ,$$

$$\mathbf{e}_\alpha^0 = -\mathbf{E}_2^0 \sin\gamma + \mathbf{E}_3^0 \cos\gamma$$

в которых угол γ определяется квадратурой из уравнения

$$g\Omega_\rho^2 \gamma^\bullet = (\mathbf{g} \times \mathbf{\Omega}_*) \bullet \mathbf{\Omega}_*^\bullet . \qquad (102)$$

Векторы $\mathbf{\Omega}_*$ и $\mathbf{g}$ должны быть записаны в базисе $\mathbf{e}_1^{0*}\mathbf{e}_2^{0*}\mathbf{e}_3^{0*}$

$$\mathbf{g} = G_1^{0*}\mathbf{e}_1^{0*} + G_2^{0*}\mathbf{e}_2^{0*} + G_3^{0*}\mathbf{e}_3^{0*} , \qquad (103)$$

$$\begin{aligned} G_1^{0*} &= G_1^0 \cos\Phi + G_2^0 \sin\Phi , \\ G_2^{0*} &= -G_1^0 \sin\Phi + G_2^0 \cos\Phi . \end{aligned} \qquad (104)$$

Внесем соотношения (103), (104), (88), (94),(100) в (102) и получим

$$\gamma^\bullet = \sqrt{\frac{2A + A_0}{A_0}} \frac{m\,2(A + A_0)\sin^2(\theta + \beta)}{\left(A_0 + (2A + A_0)\sin^2(\theta + \beta)\right)}.$$

Сравнивая $\gamma^\bullet$ с выражением (64), замечаем, что

$$\gamma^\bullet = \alpha^\bullet ,$$

а это означает, что

$$\gamma = \alpha + \gamma_0 .$$

Для определения γ_0 вычислим угол между $\mathbf{e}_\alpha$ и $\mathbf{e}_\alpha^0$, используя соотношения

$$\mathbf{e}_\alpha \bullet \mathbf{e}_\alpha^0 = \frac{(\mathbf{g}\times\boldsymbol{\omega}_*)\bullet(\mathbf{g}\times\boldsymbol{\Omega}_*)}{g^2\omega_\rho\Omega_\rho}.$$

Воспользовавшись известным тождеством Лагранжа, получим выражение

$$\mathbf{e}_\alpha \bullet \mathbf{e}_\alpha^0 = \frac{\boldsymbol{\omega}_* \bullet \boldsymbol{\Omega}_* - \omega_\nu\Omega_\nu}{\omega_\rho\Omega_\rho},$$

внеся в которое (11), (12), (29), (13)–(15), (62), (63), (99), (100), находим

$$\mathbf{e}_\alpha \bullet \mathbf{e}_\alpha^0 = -1,$$

откуда следует, что

$$\gamma_0 = \pi,$$

то есть

$$\gamma = \alpha + \pi. \tag{105}$$

Равенство (105) позволяет находить сразу компоненты ζ^0 в базисе $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3$, заменив $\cos\gamma$ и $\sin\gamma$ на $-\cos\alpha$ и $-\sin\alpha$ соответственно.

Представим неподвижный аксоид тела S_0 в базисе $\mathbf{e}_\nu\mathbf{e}_\rho^0\mathbf{e}_\alpha^0$

$$\boldsymbol{\zeta}^0(\theta,\mu) = \zeta_\nu^0\mathbf{e}_\nu + \zeta_\nu^0\mathbf{e}_\rho^0 + \zeta_\alpha^0\mathbf{e}_\alpha^0$$

и, воспользовавшись выражения (95), запишем

$$\zeta_\nu^0(\theta,\mu) = \frac{\boldsymbol{\zeta}^0(\theta,\mu)\bullet\mathbf{g}(\theta)}{g},$$

$$\zeta_\rho^0(\theta,\mu) = \frac{\boldsymbol{\zeta}^0(\theta,\mu)\bullet\left(g\boldsymbol{\Omega}_*(\theta) - \Omega_*(\theta)\mathbf{g}(\theta)\right)}{g\Omega_\rho(\theta)},$$

$$\zeta_\alpha^0(\theta) = \frac{\boldsymbol{\zeta}^0(\theta,\mu)\bullet\left(\mathbf{g}(\theta)\times\boldsymbol{\Omega}_*(\theta)\right)}{g\Omega_\rho(\theta)}.$$

Вносим в эти уравнения величины (43), (44), (21), (86)–(88), (57), (99), (100), (11), (12), (29), (13)–(16) и находим

$$\zeta_\nu^0(\theta,\mu)=\frac{\mu\Omega_\nu(\theta)}{\Omega_*(\theta)}+$$

$$+a\frac{m^2}{A_0(A+A_0)\Omega_*^2(\theta)}\left[AA_0\cos^2(\theta+\beta)\cos(2\theta+\beta)-\right.$$

$$\left.-(A+A_0)(2A+A_0)\sin(\theta+\beta)\sin\theta\right],$$

$$\zeta_\rho^0(\theta,\mu)=\frac{\mu\Omega_\rho(\theta)}{\Omega_*(\theta)}+$$

$$+a\frac{Am^2\cos^2(\theta+\beta)}{(A+A_0)\Omega_\rho(\theta)\Omega_*^2(\theta)}\left[b\sin(\theta+\beta)-\Omega_\nu\cos(2\theta+\beta)\right],$$

$$\zeta_\alpha^0(\theta)=\frac{aAm^2\cos^3(\theta+\beta)\sin(2\theta+\beta)}{(A+A_0)\Omega_\rho(\theta)\Omega_*^2(\theta)}. \qquad (106)$$

Заметим, что ζ_ν^0, ζ_ρ^0, ζ_α^0 не зависят от a_0 (закрепление тела S_0 в центре масс не упрощает эти зависимости), а закрепление тела S в центре масс существенно упрощает выражение (106)

$$\zeta_\nu^0(\theta,\mu)=\frac{\mu\Omega_\nu(\theta)}{\Omega_*(\theta)},$$

$$\zeta_\rho^0(\theta,\mu)=\frac{\mu\Omega_\rho(\theta)}{\Omega_*(\theta)}, \qquad (107)$$

$$\zeta_\alpha^0=0.$$

В базисе $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2^0\mathbf{E}_3^0$, который совпадает с базисом $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3$, компоненты неподвижного аксоида тела S_0, с учетом (105), (101) принимают вид

$$\zeta_1^0(\theta,\mu)=\zeta_\nu^0(\theta,\mu),$$
$$\zeta_2^0(\theta,\mu)=-\zeta_\rho^0\cos\alpha+\zeta_\alpha^0(\theta)\sin\alpha, \qquad (108)$$
$$\zeta_3^0(\theta,\mu)=-\zeta_\rho^0(\theta,\mu)\sin\alpha-\zeta_\alpha^0(\theta)\cos\alpha$$

в них ζ_ν^0, ζ_ρ^0, ζ_α^0 определены выражениями (106) при условии (45) и выражением (107) при условии (46).

При движении тела S_0, подвижный аксоид (92), (91) катится по неподвижному (108), (106); это движение сопровождается скольжением вдоль общей образующей Ω_* со скоростью

$$\frac{a\sqrt{2A+A_0}\,m\sin(2\theta+\beta)\cos(\theta+\beta)}{\sqrt{2A+A_0-2A\cos^2(\theta+\beta)}}.$$

А если выполняется условие (46), то подвижный аксоид (930, (94) катится без скольжения по неподвижному (108), (107).

Матрицу вложения, неизменно связанного с телом S_0 базиса $\mathbf{e}_1^{0*}\mathbf{e}_2^{0*}\mathbf{e}_3^{0*}$ в неподвижное пространство, получим, используя формулы перехода, связывающие базисы $\mathbf{e}_1^{0*}\mathbf{e}_2^{0*}\mathbf{e}_3^{0*}$, $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$, $\mathbf{e}_\nu\mathbf{e}_\rho^0\mathbf{e}_\alpha^0$, $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3$

$$\mathbf{e}_1^{0*}=E_{11}(t)\mathbf{E}_1+E_{12}(t)\mathbf{E}_2+E_{13}(t)\mathbf{E}_3,$$
$$\mathbf{e}_2^{0*}=E_{21}(t)\mathbf{E}_1+E_{22}(t)\mathbf{E}_2+E_{23}(t)\mathbf{E}_3,$$
$$\mathbf{e}_3^{0*}=E_{31}(t)\mathbf{E}_1+E_{32}(t)\mathbf{E}_2+E_{33}(t)\mathbf{E}_3,$$

где

$$E_{11}=\kappa_{11}\cos\Phi+(\kappa_{12}\cos\alpha-\kappa_{13}\sin\alpha)\sin\Phi,$$
$$E_{12}=\kappa_{11}\sin\Phi+-(\kappa_{12}\cos\alpha+\kappa_{13}\sin\alpha)\cos\Phi,$$
$$E_{13}=-\kappa_{12}\sin\alpha-\kappa_{13}\cos\alpha;$$
$$E_{21}=\kappa_{21}\cos\Phi+(\kappa_{22}\cos\alpha-\kappa_{23}\sin\alpha)\sin\Phi,$$
$$E_{22}=\kappa_{21}\sin\Phi+(-\kappa_{22}\cos\alpha+\kappa_{23}\sin\alpha)\cos\Phi,$$
$$E_{23}=-\kappa_{22}\sin\alpha-\kappa_{23}\cos\alpha;$$

$$E_{31} = \kappa_{31}\cos\Phi + (\kappa_{32}\cos\alpha - \kappa_{33}\sin\alpha)\sin\Phi,$$
$$E_{32} = \kappa_{31}\sin\Phi + (-\kappa_{32}\cos\alpha + \kappa_{33}\sin\alpha)\cos\Phi,$$
$$E_{33} = -\kappa_{32}\sin\alpha - \kappa_{33}\cos\alpha.$$

В этих выражениях $\kappa_{ij}(t)$, $\cos\alpha(t)$, $\sin\alpha(t)$ и $\Phi(t)$ определены соответственно значениями (98),(67), (68), (38).

Отметим, что матрица $E_{ij}(t)$ единичная, поэтому легко осуществить и обратный переход (выразить базисные векторы $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3$ через $\mathbf{e}_1^{0*}\mathbf{e}_2^{0*}\mathbf{e}_3^{0*}$).

Таким образом, в работе получены уравнения аксоидов тел для решения, описывающего переходный процесс к асимптотически равномерным вращениям.

Литература

1. *Лесина М.Е., Зиновьева Я.В.* Новое точное решение задачи о движении двух гироскопов Лагранжа, сочлененных упругим сферическим шарниром
2. *Лесина М.Е.* Точные решения двух новых задач аналитической динамики системы сочлененных тел. Донецк: ДонГТУ, 1996.– 238 с.
3. *Харламов П.В.* Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку. // Прикл. математика и механика. – 1964. – 28. – № 3, – с. 502–507.
4. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск. Изд-во Новосиб. ун-та, 1965. – 221 с.
5. *Харламов П.В.* Очерки об основаниях механики. Мифы, заблуждения и ошибки. – Киев: Наукова думка, 1995. – 407 с.