К методике построения фундаментальных систем решений линейных дифференциальных уравнений

В.Н. Беловодский
Донецкий национальный технический университет

Пропонується операторний підхід до викладу методики побудови фундаментальних систем рішень диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами.

Обычно [1-3], при изложении теории линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и построении их общих решений вводят понятие характеристического многочлена, после чего, последовательно рассматривают случаи вещественных и комплексных, различных и кратных его корней. В каждом из них производят формирование линейно независимых систем решений и показывают их фундаментальность. В рамках теории линейных операторов все эти случаи рассматриваются с единых позиций.

Пусть L – линейное пространство над полем комплексных чисел K бесконечно дифференцируемых на числовой оси функций вещественной переменной x. Обозначим через

$$P_n(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n,$$

где $n \in N \cup \{0\}$, $a_i \in K$,- дифференциальный оператор, действие которого на L определим по правилу

$$P_n(D) y(x) = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y^{(1)} + a_n y,$$

для $\forall y(x) \in L$. Очевидно, что оператор $P_n(D)$ является линейным, т.к. $P_n(D)(\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)) = \alpha_1 P_n(D) y_1(x) + \alpha_2 P_n(D) y_2(x)$, для $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in K, \quad y_1, y_2 \in L$.

При $n = 1, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 0$ оператор $P_n(D)$ совпадает с операцией дифференцирования, при $n = 0, \quad a_0 = 1,$ - представляет собой тождественный оператор.

Определим, далее, сумму и произведение операторов естественным образом, а именно,-

$$(P_n(D) \cdot P_m(D)) y = P_n(D)(P_m(D) y)$$

и

$$(P_n(D) + P_m(D)) y = P_n(D) y + P_m(D) y.$$

В силу соответствующих свойств дифференцирования эти операции являются коммутативными и в техническом плане результирующие операторы находятся по известным правилам сложения и умножения многочленов переменной D.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y^{(1)} + a_n y = 0, \tag{1}$$

где $a_0 \neq 0, \quad a_i \in R$. В операторной форме оно имеет вид

$$P_n(D) y = 0, \tag{2}$$

откуда следует, что множество решений уравнения (1) представляет собой ядро оператора $P_n(D)$.

Назовем алгебраическое уравнение

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0, \tag{3}$$

- характеристическим уравнением дифференциального уравнения (1). Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$,- его корни кратностей $r_1, \ldots, r_m$, соответственно. Тогда оператор $P_n(D)$, очевидно, можно представить в виде произведения

$$P_n(D) = a_0 (D - \lambda_1)^{r_1} (D - \lambda_2)^{r_2} \ldots (D - \lambda_m)^{r_m}. \tag{4}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что произвольное значение $\lambda \in K$ является собственным значением оператора D, а функции $y(x) = Ce^{\lambda x}$, - соответствующими собственными векторами. Пусть $y_1(x)$, - собственный вектор оператора D, соответствующий собственному значению λ_1. Тогда $Dy_1 = \lambda_1 y_1, \quad (D - \lambda_1) y_1 = 0, \quad (D - \lambda) y_1 = (\lambda_1 - \lambda) y_1$ и $(D - \lambda)^k y_1 = (\lambda_1 - \lambda)^k y_1$.

Отсюда следует, что

1. собственные векторы оператора D, соответствующие различным собственным значениям , линейно независимы и
2. собственные векторы оператора D, соответствующие собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, принадлежат ядру оператора (4).

Справедливость первого утверждения следует от противного.

Действительно, пусть $y_1, \ldots, y_к$, - собственные векторы с собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_к$, соответственно. Предположим, что существует ненулевой набор $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_к$ такой, что

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots \alpha_к y_k = 0.$$

Пусть, для определенности, $\alpha_k \neq 0$. Тогда, действуя оператором $D-\lambda_1$ на обе части последнего соотношения, имеем

$$\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)y_2+...+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)y_k=0.$$

Продолжая аналогичным образом, а именно, действуя на получающиеся соотношения операторами $D-\lambda_2$, ..., $D-\lambda_{k-1}$ последовательно, получим

$$\alpha_k(\lambda_k-\lambda_{k-1})(\lambda_k-\lambda_{k-2})...(\lambda_k-\lambda_1)y_k=0.$$

Отсюда или $\alpha_k=0$ или $\lambda_i=\lambda_j$, но то и другое противоречит предположению.

Второе утверждение, с учетом коммутативности произведения операторов, устанавливается непосредственной подстановкой.

Рассмотрим теперь последовательно множители $(D-\lambda_i)^{r_i}$ из разложения (4) и для каждого из них образуем жорданову цепочку векторов [4]

$$(D-\lambda_i)y_{i1}=0, \quad (D-\lambda_i)y_{i2}=y_{i1}, ...(D-\lambda_i)y_{ir_i}=y_{i,r_i-1}. \tag{5}$$

В качестве первого вектора цепочки возьмем $y_{i1}=e^{\lambda_i x}$ и полагая, далее, равными нулю, появляющиеся при интегрировании постоянные, получим

$$y_{i1}=e^{\lambda_i x}, y_{i2}=xe^{\lambda_i x}, ..., y_{ir_i}=\frac{1}{(r_i-1)!}x^{r_i-1}e^{\lambda_i x}. \tag{6}$$

Каждый вектор каждой цепочки принадлежит ядру оператора (4) и справедливой оказывается

Теорема. Система векторов $y_{ij_i}(x),\ i=\overline{1,m},\quad j_i=\overline{1,r_i}$, составленная из векторов (6) цепочек (5), является линейно независимой и образует базис ядра оператора (4).

Доказательство. Рассмотрим систему векторов (6)

$$y_{11}, y_{12}, ..., y_{1,r_1},$$

$$y_{21}, y_{22}, ..., y_{2,r_2},$$

$$. \quad . \quad . \quad .$$

$$y_{m1}, y_{m2}, ..., y_{m,r_m}$$

Её линейная независимость вытекает от противного.

Действительно, пусть

$$\alpha_{11},\alpha_{12},\dots,\alpha_{1,j_1},$$
$$\alpha_{21},\alpha_{22},\dots,\alpha_{2,j_2},$$
$$. \quad . \quad . \quad .$$
$$\alpha_{m1},\alpha_{m2},\dots,\alpha_{m,j_m}.$$

где $0 \le j_i \le r_i$, $\alpha_{i,j_i} \ne 0$ - ненулевой набор коэффициентов, такой, что

$$\alpha_{11}y_{11} + \dots \alpha_{1j_1} y_{1j_1} + \dots + \alpha_{m_1} y_{m_1} + \dots + \alpha_{mj_m} y_{mj_m} = 0 \cdot \qquad (7)$$

Подействуем на равенство (7) последовательно операторами $(D-\lambda_1)^{j_1-1}, \quad (D-\lambda_2)^{j_2-1},\dots,(D-\lambda_m)^{j_m-1}$.

В результате этого получим линейную комбинацию

$$\alpha_{1j_1}(\lambda_1-\lambda_2)^{j_2-1}\dots(\lambda_1-\lambda_m)^{j_m-1}y_{11} + \alpha_{2j_2}(\lambda_2-\lambda_1)^{j_1-1}\dots(\lambda_2-\lambda_m)^{j_m-1}y_{21}$$
$$+\dots+\alpha_{mj_m}(\lambda_m-\lambda_1)^{j_1-1}\dots(\lambda_m-\lambda_{m-1})^{j_{m_1}-1}y_{m1} = 0$$

собственных векторов, соответствующих различным собственным значениям, с отличными от нуля коэффициентами. А это означает их линейную зависимость, что невозможно.

Справедливость второй части утверждения теоремы вытекает из единственности решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения.

Действительно, пусть $y(x)$, - произвольное решение уравнения (1) и оно удовлетворяет начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0',\dots,y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \qquad (8)$$

Рассмотрим функцию $\bar{y}(x) = \sum_{i,j} c_{ij} y_{ij}$, где y_{ij}, - система линейно-независимых решений (5), (6). Потребуем, чтобы $\bar{y}(x)$ удовлетворяла условиям (8). Тогда для определения коэффициентов c_{ij} получим систему линейных алгебраических уравнений, определитель $W[y_{ij}(x_0)]$ которой, где $W[y_{ij}(x)]$,- определитель Вронского, не равен нулю. Поэтому набор c_{ij} определяется единственным образом и, в силу единственности решения задачи Коши, $\bar{y}(x) \equiv y(x)$. Таким образом, система решений $y_{ij}(x)$ действительно образует базис, что и требовалось доказать.

Далее, учтем, что система линейно независимых векторов остается таковой, если ее векторы умножить на числа не равные нулю или отдельные пары векторов заменить на сумму и разность этих векторов. Это дает возможность упростить фундаментальную систему (6), убрав из нее факториалы, заменить комплексно сопряженные жордановы цепочки, соответствующие собственным значениям $\lambda = \alpha \pm i\beta,$ линейно независимыми системами действительных векторов вида

$$e^{\alpha t}\cos\beta t,\quad te^{\alpha t}\cos\beta t, \ldots, t^{r-1}e^{\alpha t}\cos\beta t \quad \text{и}$$

$$e^{\alpha t}\sin\beta t,\quad te^{\alpha t}\sin\beta t, \ldots, t^{r-1}e^{\alpha t}\sin\beta t, \tag{9}$$

и, на основании этого, сформулировать следующее правило:

Для построения фундаментальной системы решений уравнения (1) необходимо найти корни $\lambda_k = \alpha_k \pm i\beta_k$ его характеристического уравнения (3) и выбрать те из них, которые имеют неотрицательную мнимую часть, т.е. $\beta_k \geq 0$. Для каждого такого корня в фундаментальную систему необходимо включить совокупность функций вида (9), опустив при этом нулевые, где r -кратность корня.

Литература

1. Романко В.К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. - М.: Лаборатория базовых знаний, 2002,-344 с.
2. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения: Учеб.: Для вузов. –М.: Физматлит, 2002.-256 с.
3. Смирнов В.И. Курс высшей математики. т.2 – М.: Наука, 1974. – 656с.
4. Блох Э.Л., Лошинский Л.И., Турин В.Я. Основы линейной алгебры и некоторые ее приложения.- М.: Высшая школа, 1971.-256 с.