УДК 004.932.2+004.932.72'1

Ю.В.Косенко
Донецкий национальный технический университет, г. Донецк
кафедра программного обеспечения интеллектуальныхсистем

РЕАЛИЗАЦИЯ ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НАХОЖДЕНИЯ МАГИЧЕСКИХ КВАДРАТОВ

Аннотация

Косенко Ю.В. Реализация генетического алгоритма для решения задачи нахождения магических квадратов. *Изучены методы построения магических квадратов. Исследованы возможности применения генетического алгоритма для нахождения магических квадратов. Найдена целевая функция решения задачи и произведен выбор генетических операторов. Разработано программное обеспечение. Исследованы свойства алгоритма.*

Ключевые слова: *методы построения магических квадратов, генетический алгоритм.*

Постановка проблемы.Исследования магических квадратов оказали влияние на развитие теории групп, структур, латинских квадратов, определителей разбиений, матриц, сравнений и других нетривиальных разделов математики. При поиске методом полного перебора, основной проблемой является длительноевремя работы алгоритма. Для оптимизации процесса нахождения магических квадратов в данной работе предлагается использовать генетический алгоритм. Таким образом, возникает необходимость найти необходимые параметры алгоритма, позволяющие решать задачу. Для реализации этого нужно выполнить следующие этапы:

- выбрать способ кодирования хромосомы;
- найти целевую функцию;
- выбрать необходимые генетические операторы;
- определить критерий останова работы алгоритма;
- реализовать алгоритм программно и протестировать его работу.

Магический квадрат представляет собой квадратную матрицу положительных целых чисел от 1 до n^2, расположенных в таком порядке, при котором сумма чисел в каждой строке, каждом столбце и каждой диагонали равна одному и тому же числу, называемому константой магического квадрата, или просто магической константой. Число n называется порядком магического квадрата. Так как квадрат порядка nсодержит n, скажем, горизонтальных рядов, и сумма Мчисел каждого ряда одинакова, то сумма всех чисел, размещенных в магическом квадрате равна nM. Магическая константа равна сумме всех чисел, деленной на n:

$$M(n) = \frac{n^2(n^2+1)}{2} / n = \frac{n(n^2+1)}{2}, \tag{1}$$

Магические квадраты существуют для всех порядков n≥1, за исключением n=2. Случай для n=1тривиален — квадрат единственен и состоит из одного числа 1.

Правила построения магических квадратов делятся на три категории в зависимости от того, каков порядок квадрата: нечетен, равен удвоенному нечетному числу или равен учетверенному нечетному числу. Общий метод построения всех квадратов неизвестен, хотя широко применяются различные схемы. Множество методов построения представлено в работе [2].

Генетические алгоритмы есть поисковые алгоритмы, основанные на механизмах натуральной селекции и генетики. Они реализуют «выживание сильнейших», формируя и изменяя поисковый алгоритм на основе моделирования эволюции поиска. В каждой генерации новое множество искусственных последовательностей создается с использованием старых и добавлением новых частей с «хорошими свойствами». Генетические алгоритмы – это не просто случайный поиск. Он эффективно использует информацию, накопленную в процессе эволюции[3].

В отличие от других методов оптимизации генетические алгоритмы, как правило, анализируют различные области пространства решений одновременно и более приспособлены к нахождению новых областей с лучшими значениями целевой функции за счет объединения квазиоптимальных решений из разных популяций.

Эволюционный процесс представляется как способность «лучших» хромосом оказывать большее влияние на состав новой популяции на основе длительного выживания и более многочисленного потомства.

Цель статьи – провести анализ методов построения магических квадратов, сделать вывод о возможности нахождения магических квадратов с помощью генетического алгоритма, найти целевую функцию решения задачи, подобрать необходимые генетические операторы, протестировать программную реализацию.

Выбор кодирования хромосомы.Хромосома имеет вид квадратной матрицы порядка n, где n равен порядку находимого магического квадрата. В связи с тем, что решением задачи является матрица чисел, используется целочисленное кодирование хромосомы. Все хромосомы состоят из генов, принимающих одно из значений в интервале от 1 до n^2. Таким образом, каждая хромосома представляет собой один из возможных вариантов размещения чисел в матрице.

Нахождение целевой функции.В каждой строке, столбце и диагонали случайной хромосомы сумма чисел лежит в интервале

$$\frac{n^2+n}{2} \leq S \leq \frac{2n^3-n^2+n}{2}, \qquad (2)$$

Отсюда, отклонение E суммы чисел от значения магической константы будет лежать в интервале

$$0 \le E \le \frac{n^3-n^2}{2}, \quad (3)$$

Получаем формулы для нахождения отклонений по всем строкам, столбцам и диагоналям.

Сумма всех отклонений по строкам:

$$E_1 = \sum_{i=1}^{n} \left| M - \sum_{j=1}^{n} H_{ij} \right|, \quad (4)$$

Сумма всех отклонений по столбцам:

$$E_2 = \sum_{j=1}^{n} \left| M - \sum_{i=1}^{n} H_{ij} \right|, \quad (5)$$

Отклонение по главной диагонали:

$$E_3 = \left| M - \sum_{i=1}^{n} H_{ii} \right|, \quad (6)$$

Отклонение по побочной диагонали:

$$E_4 = \left| M - \sum_{i=1}^{n} H_{i,n-i+1} \right|, \quad (7)$$

Целевая функция генетического алгоритма определяется по формуле:

$$ff = \frac{1}{E_1+E_2+E_3+E_4+1} \to max, \quad (8)$$

Таким образом, решению задачи соответствует максимальное значение целевой функции, равное 1.

Выбор операторов рекомбинации.Оператор рекомбинации может быть реализован с помощью одноточечного кроссинговера, который необходимо дополнить проверкой на уникальность каждого гена в хромосоме-потомке. Это требование также предъявляется к оператору мутации, поэтому предлагается использование парной мутации, меняющей два случайных гена в хромосоме местами.

Выбор оператора селекции. Оператор селекции для стандартного генетического алгоритма вычисляется на основе пропорционального отбора. Выбор хромосом с «лучшим» значением целевой функции имеет большую вероятность их попадания в следующую популяцию.В алгоритмическом смысле, пропорциональный отбор подразумевает создание «колеса рулетки», в котором каждая хромосома имеет поле, пропорциональное значению ее целевой функции.

Инициализация исходной популяции. На этапе инициализации случайным образом генерируется kхромосом, представляющих собою возможные решения. Параметр kвыбирается эмпирически. При генерации хромосом необходимо учитывать требование уникальности каждого гена.

Условие окончания поиска решения. Предлагается 2 вариантаусловия окончания поиска оптимального решения: было произведено максимальное количество итераций, заданное заранее, либо в процессе работы алгоритма был найден магический квадрат.

Исследование работы алгоритма.Для исследования качества работы алгоритма был реализована компьютерная программа на языке Javaдля платформы JavaSE 1.7. Программа предоставляет пользователю возможность выбора порядка искомого магического квадрата и таких параметров генетического алгоритма, как размер популяции и максимальное количество итераций.

Было проведено тестирование работы алгоритма. Использовались следующие данные: размер популяции – 50; максимальное количество итераций – 100000.В результате тестирования определена частота нахождения магических квадратов в зависимости от порядка матрицы. Также получены значения частоты нахождения полумагических квадратов, в которых сумма чисел по горизонталям и вертикалям равна магической константе, а по диагоналям это условие не выполняется.Полученные результаты представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Результаты тестирования программы

	Количество найденных полумагических квадратов, %	Количество найденных магических квадратов, %
Квадрат 3х3	0	100
Квадрат 4х4	20	70
Квадрат 5х5	60	0
Квадрат 6х6	30	0
Квадрат 7х7	20	0
Квадрат 8х8	10	0
Квадрат 9х9	10	0

Выводы. Тестирование программной реализации генетического алгоритма, основанного на рассмотренных выше идеях, позволяет сделать вывод о возможности применения данного подхода к задаче нахождения магических квадратов. Основной проблемой является частая преждевременная сходимость алгоритма. В этом случае найденная матрица может иметь значения сумм, отличные от магической константы на диагоналях (полумагический квадрат), либо на строках или столбцах.

Список литературы

1. Гарднер М. Путешествие во времени – М.:Мир, 1990. – 341с.
2. Постников М.М. Магические квадраты – М.:Наука, 1964. – 84с.
3. Курейчик В.М. Генетические алгоритмы и их применение. Научное издание – Таганрог:ТРТУ, 2002. – 242с.