УДК 51 (071)

СОГЛАШЕНИЕ О СУММИРОВАНИИ В ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

Мироненко Л. П.

Донецкий национальный технический университет

У деяких випадках, особливо у розділі вищої математики «Лінійна алгебра та аналітична геометрія», пропонується використання погодження про позначення суми, прийнятого у тензорному аналізі та теорії відності А.Ейнштейна. Корисність позначення демонструється на доказі правила Крамера рішення квадратних систем лінійних рівнянь та на інших прикладах. Прийняте позначення не тільки скорочує математичний запис, а надає формулам прозорості та спрощує дії над важкими виразами.

Введение. Математика отличается от остальных точных наук лаконичностью языка и широктм использованием символьных обозначений, выражающих емкую информацию. Удачно выбранные обозначения резко повышают наглядность полученного результата.

Как, известно, в физической теории относительности активно используется тензорная алгебра и тензорный анализ. Несмотря на то, что тензорный анализ возник задолго до появления на свет специальной и, тем более, общей теории относительности, последние явились активным движущим фактором развития тензорного анализа. Ковариантный характер законов теории относительности настоятельно требовал развития тензорного исчисления. В этом процессе принимал активное участие непосредственно создатель теории относительности А.Эйнштейн.

Мы не будем рассматривать математический аппарат тензорного исчисления, тем более, формулировку уравнений теории гравитационного и электромагнитного полей в ковариантной форме, но позаимствуем из теории только, на наш взгляд, удобное обозначение операции суммирования, не использующей стандартный знак суммы $\sum$.

1. Соглашение о суммировании А.Эйнштейна

В специальной теории относительности рассматриваются физические величины в, так называемом пространстве Минковского, отличающегося от пространства Евклида сигнатурой пространства-времени $(+,-,-,-)$, в то же время сигнатура Евклида $(+,+,+,+)$. Для приведения теории к привычному виду, т.е. в обычном евклидовом пространстве, а не в псевдоевклидовом, вводятся различные компоненты одного и того же вектора или тензора, а именно, ковариантные и контравариантные [1].

Например, квадрат четырехмерного вектора или просто 4-вектора $A^o. \mathrm{A}^1, A^2, A^3,$ в пространстве Минковского имеет вид

$$(A^o)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2 \ , \tag{1}$$

т.е. имеет сигнатуру $(+,-,-,-)$. Чтобы записать это выражение в привычном виде, т.е. в виде суммы квадратов величин, введем 4-векторы ковариантного вида A_i : $A_o = A^o, A_1 = -A^1, A_2 = -A^2, A_3 = -A^3$. Тогда (1) запишется в виде

$$\sum_{i=0}^{3} A^i A_i = A^o A_o + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3. \tag{2}$$

В теории относительности такие суммы принято писать $A^i A_i$, подразумевая суммирование по индексу i. Заметим, что в выражении (3) индекс i встречается дважды, такие индексы называются немыми. Везде, где встречается пара немых индексов, стоящих один вверху выражения, другой внизу, по этой паре производится суммирование – соглашение, введенное Эйнштейном [2-3].

Компоненту A^o называют *временной*, а A^1, A^2, A^3 - *пространственными* компонентами 4-векторв A^i. Компоненты A^1, A^2, A^3 образуют трехмерный вектор $\mathbf{A}$, поэтому 4-вектор можно записать в виде $A^i = (A^o, \mathbf{A}), A_i = (A^o, -\mathbf{A}),$ а его квадрат $A^i A_i = (A^o)^2 - \mathbf{A}^2$. 4-радиус вектор и его квадрат в этом случае $x^i = (ct, \mathbf{r}), x_i = (ct, -\mathbf{r}), \quad x^i x_i = c^2 t^2 - \mathbf{r}^2$.

Аналогично квадрату 4-вектора можно образовать скалярное произведение двух произвольных 4-векторов *A* и *B*

$$A^i B_i = A^o B_o + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3. \tag{3}$$

При этом очевидно, что выполняется равенство $A^i B_i = A_i B^i$. Вообще пару немых индексов всегда можно переставлять местами. Произведение $A^i B_i$ является 4-скаляром.

2. Единичный и метрический тензоры

4-тензор $\delta_k^i = \begin{cases} 1, & если \;\; i = k; \\ 0, & если \;\; i \neq k. \end{cases}$ $\delta_k^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ называется единичным. Поднимая и опуская индексы у тензора δ_k^i, получим так называемые метрические тензоры g_{ik} и g^{ik} : $g_{ik} = g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Тензоры g_{ik} и g^{ik} позволяют «опускать и поднимать» индексы у векторов, тензоров: $g_{ik}A^k = A_i$, $g^{ik}A_k = A^i$. Аналогичным образом можно определить процедуру опускания и поднятия индексов для тензоров высших рангов

$$A_{ik} = g_{ir}g_{ks}A^{rs} = g_{ir}A_k^r, \;\; B^{ik} = g^{ir}g^{ks}B_{rs} = g^{ir}B_r^k.$$

Поднятие и опускание индексов не меняют соотношения между тензорами. Необходимо только, чтобы при свертывании по паре индексов суммирование всегда производилось по данной паре немых индексов, один из которых верхний, а другой — обязательно нижний.

Уникальность тензоров δ_k^i, g_{ik} и g^{ik} состоит в том, что они остаются инвариантными при преобразовании координат, т.е. одинаковыми во всех системах отсчета.

3. Соглашение о суммировании в линейной алгебре

В евклидовом пространстве ковариантные и контравариантные компоненты векторов не различаются [6-8], поэтому все индексы располагаются, как правило, внизу

Например, квадрат трехмерного вектора $\mathbf{x} = \{x_1, x_2 x_3\}$ в евклидовом пространстве имеет вид [4-5]

$$\mathbf{x}^2 = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \tag{4}$$

Принимая соглашение о суммировании эту сумму запишем в виде

$$\mathbf{x}^2 = x_i x_i \tag{5}$$

Скалярное произведение векторов $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ запишется в виде

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i. \tag{6}$$

Произведение матриц $A = (a_{ik})_{m \times p}$ и $B = (b_{ki})_{p \times n}$ выразится формулой

$$AB = (a_{ik} b_{kj})_{m \times n}. \tag{7}$$

Везде, где встречается пара немых ндексов, в (5)-(7) это индекс i, по этой паре производится суммирование. Если в выражении встпечается пара, но не. немых индексов, то они заключаются в скобки и по ним не подразумевается суммирование. Например, в определении определелителя *n*–го порядка, в его разложении по элементам a_{ij} i–й строки

$$\Delta_n = a_{(i)j} A_{(i)j} \tag{8}$$

(A_{ij} - алгебраические дополнения элементов a_{ij}) производится суммирование по индексу $j = 1,2,\ldots,n$, но не производится суммирование по i . В случае разложения определиткля по элементам j–го столбца, имеем $\Delta_n = a_{i(j)} A_{i(j)}$. В этом выражении производится суммирование по индексу $i = 1,2,\ldots,n$, а индекс j фиксирован.

Принятое правило позволяет записать одно из важных свойств определителей.

Сумма произведений элементов какой-либо строки определителя Δ_n *на соответствующие алгебраические дополнения элементов этой строки* (*какой-либо другой стоки*) *равна величине этого определителя* (*равна нулю*):

$$a_{ij} A_{kj} = \Delta_n \delta_{ik}, \tag{9}$$

где $\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$ - символ Кронекера или единичный тензор в n–мерном евклидовом пространстве.

Рассмотрим вопрос о нахождении явного выражения обратной матрицы. Пусть матрица *A* невырожденная. Покажем, что существует такая матрица A^{-1}, что выполняется равенство $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$. Для этого построим так называемую союзную матрицу $\tilde{A}$, которая образуется из исходной матрицы *A* заменой ее элементов a_{ij} на алгебраические дополнения A_{ij} с последующим транспонированием

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} \; A_{21} \; \ldots \; A_{n1} \\ A_{12} \; A_{22} \; \ldots \; A_{n2} \\ \ldots \\ A_{1n} \; A_{2n} \; \ldots A_{nn} \end{pmatrix}$$

Вычислим произведение $A\tilde{A}$, используя правило умножения матриц и свойство (9) определителей

$$A\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \; a_{12} \; \ldots \; a_{1n} \\ a_{21} \; a_{22} \; \ldots \; a_{2n} \\ \ldots \\ a_{m1} \; a_{m2} \; \ldots a_{mn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_{11} \; A_{21} \; \ldots \; A_{n1} \\ A_{12} \; A_{22} \; \ldots \; A_{n2} \\ \ldots \\ A_{1n} \; A_{2n} \; \ldots A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det A \quad 0 \ldots 0 \\ 0 \quad \det \mathrm{A} \ldots 0 \\ \ldots \\ 0 \qquad 0 \ldots \det A \end{pmatrix} = \det A \cdot E$$

В принятых обозначениях нет необходимости записывать произведение матриц в развернутом виде, а проще использовать соглашение о суммировании

$$A\tilde{A} = (a_{ik}) \cdot (A_{kj}) = (a_{ik} A_{kj}) = \det A \cdot \delta_{ij} = \det A \cdot E$$

Аналогично устанавливается, что $\tilde{A}A = \det A \cdot E$. Таким образом, искомая матрица A^{-1} имеет вид

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{\det A} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} \; A_{21} \; \ldots \; A_{n1} \\ A_{12} \; A_{22} \; \ldots \; A_{n2} \\ \ldots \\ A_{1n} \; A_{2n} \; \ldots A_{nn} \end{pmatrix}$$

Данная формула представляет явное выражение обратной матрицы.

4. Система линейных уравнений. Правило Крамера

Для сравнения преимущества принятого соглашения о суммировании приведем вывод правила Крамера в обычных и новых обозначениях.

А) В обычных обозначениях.

Рассмотрим квадратную систему размерности *n*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{10}$$

и предположим, что $(x_1, x_2, \ldots, x_n$ ее решение. Подставим решение в систему (10), получим *n* тождеств. Умножим 1-е тождество на алгебраическое дополнение A_{1j} элементов *j*-го столбца основной матрицы *A*, 2-ое - на A_{2j} и т.д., *n*-е - на A_{nj} и сложим все *n* тождеств (собирая члены при $x_1, x_2, \ldots, x_n$), получим для любого $j = 1,2,...,n$ равенство

$$x_1(a_{11}A_{1j} + a_{21}A_{2j} + ... + a_{n1}A_{nj}) + x_2(a_{12}A_{1j} + a_{22}A_{2j} + ... + a_{n2}A_{nj}) + \\ ... + x_n(a_{1n}A_{1j} + a_{2n}A_{2j} + ... + a_{nn}A_{nj}) = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} ... + b_jA_{nj} \tag{11}$$

или кратко

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + ... + a_{ni}A_{nj}) = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} ... + b_jA_{nj}.$$

По свойству определителей (9) выражение в скобках равно нулю, если $i \neq j$ и равно определителю Δ матрицы *A*, если $i = j$. Теперь, заметим, что правая часть равна определителю матрицы *A*, у которой вместо *j*-го столбца стоит столбец свободных членов $B = colon(b_1 \quad b_2 \quad ... \quad b_n)$. Обозначим этот определитель Δ_j. Тогда, равенство (11) запишется кратко

$$x_j \cdot \Delta = \Delta_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{12}$$

Мы пришли к теореме, которая носит название

правила Крамера. Если решение $x_1, x_2, \ldots, x_n$ системы линейных уравнений

(10) с определителем $\Delta \neq 0$ существует, то это решение единственное и определяется равенствами

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{13}$$

которые называются формулами Крамера.

Б) В новых обозначениях.

Рассмотрим квадратную систему размерности n

$$a_{ij} x_j = b_i \ , \ i = \overline{1, n}, \ j = \overline{1, n} \tag{14}$$

и предположим, что $x_1, x_2, ..., x_n$ ее решение. Подставим решение в систему (14), получим n тождеств. Умножим обе части равенств на алгебраические дополнения A_{ik} (здесь автоматически производится суммирование по индексу *i*).

$$a_{ij} A_{ik} x_j = b_i A_{ik} . \tag{15}$$

По свойству (9) определителей $a_{ij} A_{ik} = \Delta \delta_{jk}$, где Δ - определитель матрицы A. Из суммы по j в левой части равенств остаются x_k. Заметим, что правая часть равна определителю матрицы A, у которой вместо *k*-го столбца стоит столбец свободных членов $b_1, b_2, ..., b_n$. Обозначим этот определитель Δ_k. Тогда, равенство (15) запишется кратко

$$x_k \cdot \Delta = \Delta_k, \ k = 1, 2, ..., n . \tag{16}$$

Заключение. Предложенная в работе система обозначений не является новой в математике, но аккуратно перенесена из тензорного анализа в линейную алгебру с целью сокращения записи многих рабочих формул и выкладок при доказательстве теорем. Перечисленные в работе приложения являются лишь демонтрационными и легко переносятся на другие, не затронутые в работе, математические объекты линейной алгебры. Факт природного родства разделов линейной алгебры и тензорного анализа делают перенос соглашения о суммировании адекватным и практичным.

При использовании соглашения о суммировании значительно сокращается аудиторное время изложения многих громоздских выражений алгебры с сохранением наглядности.

Литература

1. Ландау Л. Д., Лифшиц И. М Теоретическая физика, том II. Теория поля. М.: Наука. 1988.- 509 с.

2. Альберт Эйнштейн и теория гравитации. Сборник статей. М.: Мир. 1979.- 592 с.

3. Паули В. Принцип относительности.. М.: Наука. 1983.- 336 с.

4. Ильин В. А., Поздняк Э. Г.. Линейная алгебра. М.: Наука. 1999.- 294 с.

5. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. М.: Наука. 1970.- 271 с.

6. Акивис М. А. Гольдберг В. В. Тензорное исчисление. М.: Наука. 1969, 351 с.

7. Рашевский П. К.. Риманова геометрия и тензорный анализ, М.: Наука. 1967, 664 с.

8. Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков М.: Наука, 1965.- 456 с.