

СОПРОВОЖДАЮЩИЙ ТРЕХГРАННИК
ЛОКСОДРОМЫ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА (ВИНТОВОЙ ЛИНИИ)

Маевская С.И., Журба В.В., Абдулин Р.Н.

Донецкий национальный технический университет

Сделан краткий обзор общих подходов к формулировке некоторых геометрических образов (моделей) в математике и механике. Построен алгоритм определения параметров ориентации естественного трехгранника для пространственных кривых типа «локсодрома». Работа выполнена путем компиляции известных знаний из аналитической и дифференциальной геометрий, со строгими ссылками на первоисточники. Добавлены иллюстрации, созданные авторами методами компьютерной графики с элементами анимации.

Вступление.

В истории точных наук очень полезным оказался обмен между ними идеями, понятиями и методами. *Математические* методы «... совершенствуются и пополняются как в результате потребностей естественных наук, так и в силу внутренних законов самой математики [1, с.216]». В частности, математическое понятие *движение* «... сформировалось путем абстракции реальных (то есть *механических* – авт.) перемещений твердых тел в евклидовом пространстве. Движение принимается иногда в качестве основного понятия при аксиоматическом построении геометрии [2, т.2, с.20]». Примером может служить *конгруэнтность* – «отношение эквивалентности на множестве геометрических фигур (отрезков, углов и т.д.). <...> две фигуры называются конгруэнтными, или равными, если одна из них *движением* может быть переведена в другую [2, т.2, с.1013]».

Второй пример – широко используемый в механике естественный (сопровождающий) 3-гранник гладкой пространственной кривой. Его определению как механико-математического объекта, построению алгоритма определения параметров его ориентации (единичных векторов – ортов) и компьютерной визуализации посвящена данная работа.

Постановка задачи.

Среди множества интересных кривых, хорошо изученных геометрией (аналитической и дифференциальной) нас заинтересовал тип *локсодрома* (L) – линия на поверхности вращения, пересекающая все меридианы под постоянным углом α [2, т.3, с.447]. Обычно локсодрома описывается дифференциальным уравнением (ДУ). Например, ДУ локсодромы сферы (единичного радиуса – для простоты и без ущерба для общности), имеет вид [3, с.371]:

$$\frac{d\theta}{\sin\theta} = \operatorname{ctg}\alpha \cdot d\varphi, \quad (1)$$

где φ и θ – широта и долгота в их традиционном толковании.

Несложный, в квадратурах, интеграл дифференциального уравнения (1), разрешенный относительно одной из переменных, θ , дает уравнение искомой кривой:

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = C \cdot e^{(\operatorname{ctg}\alpha)\varphi}, \quad (2)$$

где параметр C (функция от φ_0 и θ_0) определяет начальную точку M_0 на спиральной траектории (2), навивающейся на один из полюсов сферы. По такой кривой двигался бы корабль на сферическом земном шаре, если бы курс корабля был бы неизменен по отношению к меридианам.

Аналогично можно получить дифференциальное уравнение локсодромы прямого конуса с образующей L , углом конусности α (при вершине) и углом $\beta = \operatorname{const}$ между образующей конуса и касательной к локсодроме (Рис.1), именно

$$\frac{d\xi}{L-\xi} = \sin\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta \cdot d\varphi \quad (3)$$

и его интеграл (полученный в квадратурах):

$$\xi(\varphi) = L - (L - \xi_0) \cdot e^{-(\sin\alpha \operatorname{ctg}\beta)\varphi}. \quad (4)$$

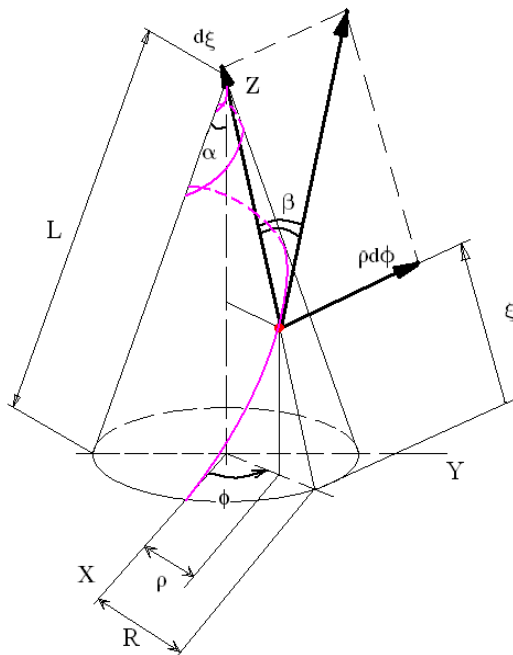


Рис. 1. К выводу дифференциального уравнения локсодромы конуса.

В формулах (3) и (4) величины φ и ζ , соответственно, - полярный угол и продольная координата произвольной точки M , отсчитываемая вдоль образующей от основания к вершине.

Наконец, сформулируем главную цель:

- 1) Описать последовательность вычисления единичных векторов (ортов), определяющих ориентацию сопровождающего трехгранника локсодромы [4, с.с.180, 185];
- 2) Организовать графическую демонстрацию результатов вычислений (включая анимацию).

Решение задачи и его результаты.

Далее рассмотрим более подробно простейшую из локсодром, больше известную как *винтовая линия* с постоянным шагом. Так выглядит линия, описываемая точкой M , которая движется по образующей прямого круглого цилиндра, вращающегося в то же время около своей оси так, что путь, проходимый точкой M по образующей, пропорционален углу поворота цилиндра (коэффициент пропорциональности b). Радиус цилиндра R .

Минуса дифференциальное уравнение, можно получить уравнение изучаемой линии как функции независимой переменной s (дуговой координаты точки М) [5, с.511 или 4, с.с. 190-191]:

$$\vec{r}(s) = \cos(\lambda \cdot s) \cdot \vec{e}_1 + \sin(\lambda \cdot s) \cdot \vec{e}_2 + \lambda \cdot b \cdot s \cdot \vec{e}_3, \quad (5)$$

где

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{R^2 + b^2}}, \quad (6)$$

и $\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \}$ – базис основной системы отсчета.

Оргы сопровождающего трехгранника (3-гранника Френе) – касательной, главной нормали и бинормали определяются формулами [4, с.185, фф. (265), (269), (260)]:

$$\vec{\tau}(s) = \frac{\vec{r}'(s)}{|\vec{r}'(s)|}, \quad (7)$$

$$\vec{n}(s) = \frac{\vec{r}''(s)}{|\vec{r}''(s)|}, \quad (8)$$

$$\vec{b}(s) = \vec{\tau}(s) \times \vec{n}(s).$$

(9)

Из формул (5), (7) и (9) следует вывод о том, что «... соприкасающаяся плоскость образует с осью винтовой линии тот же *постоянный* угол, что и касательная» [5, с.с.521 и 513] – подтверждение того, что винтовая линия является локсодромой. Кстати, упомянутый угол равен

$$\beta = \arccos(\lambda \cdot b) = \arctg \frac{R}{b}. \quad (10)$$

На Рис.2. приведен фрагмент компьютерного счета по формулам (7), (8), (9) средствами математического пакета MathCad [6], а на Рис.3. – их графическая иллюстрация.

$$R := 5.0 \quad b := 0.5$$

$$r(s) := \begin{pmatrix} R \cdot \cos(s) \\ R \cdot \sin(s) \\ b \cdot s \end{pmatrix}$$

$$r1(s) := \text{Diff}_v(r, s, 1)$$

$$r2(s) := \text{Diff}_v(r, s, 2)$$

$$r3(s) := \text{Diff}_v(r, s, 3)$$

Численно:

$$\tau(\phi) := \frac{r1(\phi)}{|r1(\phi)|} \quad \tau\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} -0.7 \\ 0.7 \\ 0.1 \end{pmatrix} \quad (\text{орт касательной})$$

$$n(\phi) := \frac{r2(\phi)}{|r2(\phi)|} \quad n\left(\frac{\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.9 \\ 0.0 \end{pmatrix} \quad (\text{орт главной нормали})$$

$$b(\phi) := \tau(\phi) \times n(\phi) \quad b\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.0 \\ 1.0 \end{pmatrix} \quad (\text{орт бинормали})$$

Рис. 2. Фрагмент вычисления ортов трехгранника Френе.

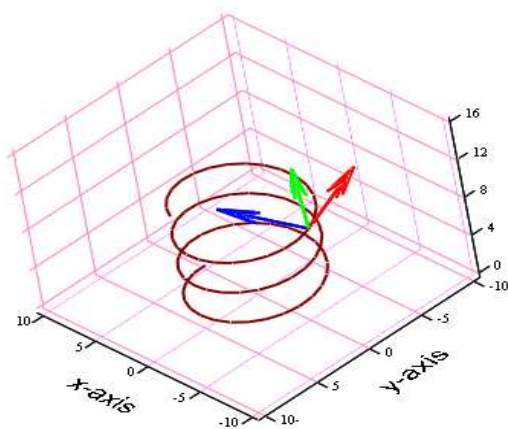


Рис. 3. Орты сопровождающего трехгранника:

- орт касательной - красный,
- орт главной нормали - синий,
- орт бинормали - зеленый.

Заключение.

Приведены примеры получения уравнений кривых специального типа – локсодром.

Сформирован и опробован алгоритм вычисления векторов (ортов) базиса, определяющего ориентацию сопровождающего (естественного) трехгранника пространственной кривой.

Выполнена графическая иллюстрация с элементами анимации ортов трехгранника Френе локсодромы кругового цилиндра.

Полученные материалы можно предложить к использованию как вспомогательные при изучении соответствующих тем дифференциальной геометрии.

Литература

1. Ишлинский А.Ю. Математика и методы механики. – В кн.: История отечественной математики, т. 4, № 2, Киев: Наукова думка, 1970 г.
2. Математическая энциклопедия: Гл.ред. И.М.Виноградов, т. 2 Д – Коо, т.3 Коо – Од. – М.: – «Сов. Энциклопедия», 1979. – 1104 стб., ил., 1982, – 1184 стб., ил.
3. Л.Г.Лойцянский и А.И.Лурье. Курс теоретической механики, т.1. 7-е изд. - М.: Гостехиздат. 1957г., 379с.
4. П.К.Рашевский. Курс дифференциальной геометрии. 4-е изд.,испр. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 432 с.
5. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. М.: – 1964 г., 872 стр. с илл.
6. В.П. Дьяконов, И.В. Абраменкова. Mathcad 8 PRO в математике, физике и Internet. - М.: "Нолидж", 2000., - 512с., ил.