УДК 517.911

Качественное исследование динамики одной математической модели

Гончаров А.Н., Гончаров А.А.
Донецкий национальный технический университет

Розглянута математична модель системи “ресурс – споживач”, яка описується системою двох звичайних нелінійних диференційних рівнянь. Проведено повне якісне дослідження системи - знайдені умови існування і стійкості точек рівноваги та граничного цикла, обчислені параметри цикла, досліджені особливі точки на нескінченності.

При изучении раздела “Дифференциальные уравнения” особую важность приобретает подбор примеров для каждого из методов решения и исследования обыкновенных дифференциальных уравнений. Необхо-димо одновременное выполнение двух условий, - с одной стороны, пример должен быть достаточно прост, а, с другой, описывать все многообразие различных случаев. Нами предлагается использовать при изучении вопросов существования особых точек и устойчивости модель динамической системы “ресурс – потребитель”, встречаемую в экологии и экономике [1].

1. Описание модели “ресурс – потребитель”

Рассмотрим математическую модель динамической системы “ресурс – потребитель”, описываемую системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида

$$\begin{cases} \dot{x} = \left(\dfrac{p}{1+\alpha p} - \beta \right) x = X(x, p), \\ \dot{p} = (1 - \mu p)p - \dfrac{p x}{1+\alpha p} = P(x, p). \end{cases} \tag{1}$$

где переменная x характеризует величину (количество) потребителя, а переменная p – количество ресурса. Функция X(x,p) = (V(p) – β)x характеризует скорость изменения количества потребителя, а функция P(x,p) = E(p)p – V(p)x скорость изменения количества ресурса.

Функция E(p) = 1 – μp описывает прирост ресурса с учетом механизма саморегуляции (коэффициент $\mu \neq 0$), а функция

$$V(p) = \frac{p}{1+\alpha p},$$

называемая обычно функцией взаимодействия или трофической функ-цией, описывает уменьшение количества ресурса в результате действия потребителя и соответствующее увеличение количества потребителя.

2. Точки равновесия системы.

Система (1) имеет три точки равновесия $\boldsymbol{O}(0,0)$, $\boldsymbol{A}(\frac{1}{\mu},0)$, $\boldsymbol{C}\left(\frac{\beta}{\varphi},\frac{1}{\varphi}\left(1-\frac{\mu\beta}{\varphi}\right)\right)$, где $\varphi=1-\alpha\beta$. Для того, чтобы точка $\boldsymbol{C}$ находилась в первой четверти, необходимо выполнение неравенства $1>a\beta$, которое является естественным ограничением, так как в противном случае $\beta>\frac{1}{\alpha}=\frac{\mathrm{p}}{\alpha\,\mathrm{p}}>\frac{\mathrm{p}}{1+\alpha\,\mathrm{p}}$ и всегда $\dot{\mathrm{x}}<0$, а, следовательно, количество потребителя будет стремиться к нулю из любых начальных состояний системы.

С помощью стандартных методов [2] нетрудно показать, что точка $\boldsymbol{O}(0,0)$ является седлом при всех значениях параметров, а точка $\boldsymbol{A}\left(\frac{1}{\mu},0\right)$ является при $\mu<\frac{\varphi}{\beta}$ седлом, а при $\mu\geq\frac{\varphi}{\beta}$ устойчивым узлом (Рис.1аб).

Особый интерес представляет третья, нетривиальная, точка рав-новесия $\boldsymbol{C}$, для исследования которой линеаризуем систему (1). Получим

$$\left.\frac{\partial X}{\partial x}\right|_c=\left.\frac{\mathrm{p}}{1+\alpha\,\mathrm{p}}-\beta\right|_C=0,$$

$$\left.\frac{\partial X}{\partial\,\mathrm{p}}\right|_c=\left.\frac{x}{(1+\alpha\,\mathrm{p})^2}\right|_C=\varphi-\mu\beta,$$

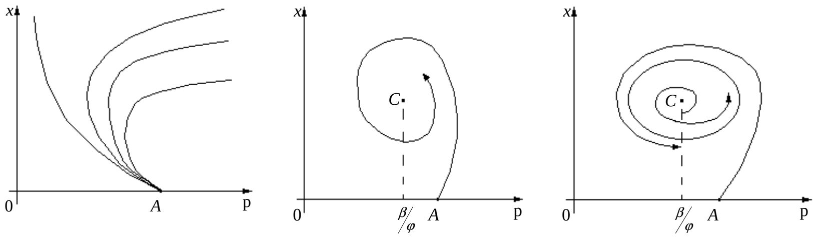
$$\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_c=\left.-\frac{\mathrm{p}}{1+\alpha\,\mathrm{p}}\right|_C=-\beta,$$

$$\left.\frac{\partial P}{\partial\,\mathrm{p}}\right|_c=\left.1-2\mu\,\mathrm{p}-\frac{x}{(1+\alpha\,\mathrm{p})^2}\right|_C=\frac{\beta}{\mu}(\alpha\varphi+\mu\varphi-2\mu)$$

и

$$\begin{cases}\dot{\bar{x}}=(\varphi-\mu\beta)\bar{\mathrm{p}}+X_1(\bar{x},\bar{\mathrm{p}}),\\ \dot{\bar{\mathrm{p}}}=-\beta\bar{x}+\frac{\beta}{\mu}(\alpha\varphi+\mu\varphi-2\mu)\bar{\mathrm{p}}+P_1(\bar{x},\bar{\mathrm{p}}),\end{cases}$$

где $\bar{x} = x - \dfrac{1}{\varphi}\left(1 - \dfrac{\mu\beta}{\varphi}\right)$, $\bar{\mathrm{p}} = \mathrm{p} - \dfrac{\beta}{\varphi}$.



а б в

Рис. 1

Характеристическое уравнение будет иметь вид

$$\lambda^2 - \frac{\beta}{\mu}(\alpha\varphi + \mu\varphi - 2\mu)\lambda + \beta(\varphi - \mu\beta) = 0 \qquad (2)$$

откуда следует, что точка $\boldsymbol{C}$ будет устойчивой [3] при $\dfrac{\alpha\varphi}{1+\alpha\beta} < \mu < \dfrac{\varphi}{\beta}$ и неустойчивой при $\mu < \dfrac{\alpha\varphi}{1+\alpha\beta} = \mu_0$, а при $\mu > \dfrac{\varphi}{\beta}$ точка равновесия $\boldsymbol{C}$ вы-ходит за пределы первой четверти, совпадая при $\mu = \dfrac{\varphi}{\beta}$ с точкой $\boldsymbol{A}$.

Заметим, что при $\mu = \mu_0$ корни уравнения (2) будут чисто мнимые, так как дискриминант уравнения отрицателен. Поэтому при значениях μ близких к μ_0 дискриминант останется отрицательным и корни уравнения будут комплексными, что означает наличие колебаний вокруг точки равновесия $\boldsymbol{C}$ (Рис.1в).

Таким образом, при значениях μ близких к μ_0 точка $\boldsymbol{C}$ является устойчивым фокусом при $\mu > \mu_0$, центром при $\mu = \mu_0$ и неустой-чивым фокусом при $\mu < \mu_0$.

3. Предельный цикл системы

Из теории бифуркаций [4] следует, что при $\mu < \mu_0$ система (1) имеет предельный цикл, который при $\mu \approx \mu_0$ близок к эллипсу

$$\frac{\varphi}{\beta(1+\alpha\beta)}\overline{\mathrm{p}}^2+\overline{x}^2=\mathrm{const}\,.$$

Для нахождения параметров предельного цикла разложим правые части системы (1) в ряд в окрестности точки $\boldsymbol{C}$ и, учитывая члены до третьей степени включительно, получим

$$\begin{cases}\dot{\overline{x}}=k_1\,\overline{\mathrm{p}}+\mathrm{k}_2\overline{\mathrm{p}}\,\overline{x}-k_3\,\overline{\mathrm{p}}^2-k_4\,\overline{\mathrm{p}}^2\,\overline{x}+k_5\,\overline{\mathrm{p}}^3,\\ \dot{\overline{\mathrm{p}}}=k_6\,\overline{\mathrm{p}}-\beta\overline{x}-k_2\,\overline{\mathrm{p}}\,\overline{x}+k_7\,\overline{\mathrm{p}}^2+k_4\,\overline{\mathrm{p}}^2\,\overline{x}-k_5\,\overline{\mathrm{p}}^3,\end{cases}$$

где $k_1=\varphi-\mu\beta$, $k_2=\dfrac{\varphi^2}{2}$, $k_3=\alpha\varphi(\varphi-\mu\beta)$, $k_4=\dfrac{1}{3}\alpha\varphi^3$,

$$k_5=\alpha^2\varphi^2(\varphi-\mu\beta),\ k_6=\frac{\beta}{\mu}(\alpha\varphi+\mu\varphi-2\mu),\ k_7=k_3-\mu\,.$$

Делая замену переменных $\overline{x}=R\cos\psi$, $\overline{\mathrm{p}}=\omega R\sin\psi$,

где $\omega=\sqrt{\dfrac{\beta(1+\alpha\beta)}{\varphi}}$, получим

$$\begin{cases}\dot{R}\cos\psi-R\sin\psi\dot{\psi}=k_1\omega R\sin\psi+k_2\omega R^2\sin\psi\cos\psi-\\ -k_3\omega^2R^2\sin^2\psi-k_4\omega^2R^3\sin^2\psi\cos\psi+k_5\omega^3R^3\sin^3\psi,\\ \omega\dot{R}\sin\psi+\omega R\cos\psi\dot{\psi}=k_6\omega R\sin\psi-\beta R\cos\psi+k_2\omega R^2\sin\psi\cos\psi+\\ +k_7\omega^2R^2\sin^2\psi+k_4\omega^2R^3\sin^2\psi\cos\psi-k_5\omega^3R^3\sin^3\psi.\end{cases}$$

Отсюда

$$\dot{R}=\left(k_1\omega-\frac{\beta}{\omega}\right)R\sin\psi\cos\psi+k_6R\sin^2\psi+k_2\omega R^2\sin\psi\cos^2\psi-$$
$$-\left(k_2+k_3\omega^2\right)R^2\sin^2\psi\cos\psi+k_7\omega R^2\sin^3\psi-k_4\omega^2R^3\sin^2\psi\cos^2\psi+$$
$$+\left(k_5\omega^2+k_4\right)R\omega\sin^3\psi\cos\psi-k_5\omega^2R^3\sin^4\psi=F(R,\psi)$$

и, усредняя правую часть по фазе ψ, получим

$$\dot{R}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(R,\psi)d\psi=\frac{k_6}{2}R-\frac{k_4\omega^2}{8}R^3-\frac{3k_5\omega^2}{8}R^3$$

или

$$\dot{R}=QR-SR^3\,.$$

Это уравнение имеет решение

$$R(t)=\sqrt{\frac{QR_0^2}{SR_0^2+\mathrm{e}^{-2Qt}\left(Q-SR_0^2\right)}},$$

где

$$Q=\frac{\beta}{2\mu}\left(\alpha\varphi+\mu\varphi-2\mu\right),$$

$$S=\frac{\beta(1+\alpha\beta)}{8\varphi}\left(\frac{1}{3}\alpha\varphi^3+3\alpha^2\varphi^2\left(\varphi-\mu\beta\right)\right).$$

Нетрудно видеть, что $\lim\limits_{t\to\infty}R(t)=\sqrt{\frac{Q}{S}}$, причем предел существует только при $Q>0$ или $\mu<\mu_0$.

Таким образом, при $0<\mu<\frac{\varphi}{\beta}$ система существует длительное время, причем при $\mu>\mu_0$ система из любого начального состояния переходит в точку равновесия C, а при $\mu<\mu_0$ модель имеет устойчивый предельный цикл, который при $\mu\approx\mu_0$ является эллипсом (Рис.1в)

$$\frac{\varphi}{\beta(1+\alpha\beta)}\overline{\mathrm{p}}^2+\overline{x}^2=\frac{Q}{S}.$$

4. Анализ существования предельного цикла при $\mu=0$

В модели (1) учитывается механизм саморегуляции количества ресурса, поэтому возникает вопрос об устойчивости системы при его отсутствии, то есть при $\mu=0$. В этом случае, единственным механиз-мом регуляции количества потребителя и ресурса, входящих в иссле-дуемую систему, остается функция их взаимоотношений V(p).

Итак, пусть $\mu=0$. Тогда система (1) примет вид

$$\begin{cases}\dot{\mathrm{x}}=\left(\dfrac{\mathrm{p}}{1+\alpha\,\mathrm{p}}-\beta\right)x=X(x,\mathrm{p}),\\[2ex] \dot{\mathrm{p}}=\mathrm{p}-\dfrac{\mathrm{p}\,x}{1+\alpha\,\mathrm{p}}=P(x,\mathrm{p}).\end{cases}\qquad(3)$$

Эта система имеет только две точки равновесия: $\boldsymbol{O}(0,0)$, являющуюся седлом , и $C\left(\dfrac{\beta}{\varphi},\dfrac{1}{\varphi}\right)$, которая является неустойчивой при всех допустимых значениях параметров, причем при $\varphi > \dfrac{\alpha^2\beta}{4}$ она является фокусом, а в противном случае узлом.

Поскольку точка равновесия $\boldsymbol{C}$ может быть неустойчивым фокусом, то весьма существенным является вопрос о существовании в данном случае предельного цикла. Критерий Бендиксона [5] отсутствия предельных циклов не дает ответ на этот вопрос.

Действительно, фунцкия Бендиксона имеет вид

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial \mathrm{p}}=\frac{\mathrm{p}}{1+\alpha \mathrm{p}}-\beta+1-\frac{\alpha x}{(1+\alpha \mathrm{p})^2},$$

а приравняв полученное выражение нулю, получим уравнение кривой

$$x=\frac{1}{\alpha}(1+\alpha \mathrm{p})((\varphi+\alpha)\mathrm{p}+1-\beta),$$

на которой функция Бендиксона обращается в нуль.

Эта кривая – парабола (рис.2) с ветвями, направленными вверх, и, естественно, что она проходит и через первую четверть, а, следовательно, критерий Бендиксона в первой четверти не выполняется.

Воспользуемся критерием Дюлака [5]. В качестве однозначной и дифференцируемой в первой четверти (кроме осей) функции возьмем следующую функцию $B(x,\mathrm{p})=\dfrac{1}{\mathrm{p}\,x}$. Тогда

$$D(x,\mathrm{p})=\frac{\partial(XB)}{\partial x}+\frac{\partial(PB)}{\partial \mathrm{p}}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{1+\alpha \mathrm{p}}-\frac{\beta}{\mathrm{p}}\right)+\frac{\partial}{\partial \mathrm{p}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+\alpha \mathrm{p}}\right)=\frac{\alpha}{(1+\alpha \mathrm{p})^2}$$

Так как функция Дюлака не меняет знака в первой четверти, то система (3) не имеет предельного цикла, а, значит, модель является неустойчивой.

Это означает, что количество ресурса и потребителя в некоторый момент может быть как угодно велико, но так как при достаточно боль-шом количестве ресурса $V(\mathrm{p})=\dfrac{\mathrm{p}}{1+\alpha \mathrm{p}}\rightarrow\dfrac{1}{\alpha}$, то система (3) примет вид

$$\begin{cases}\dot{x}=\dfrac{\varphi}{\alpha}x,\\ \dot{\mathrm{p}}=\mathrm{p}-\dfrac{x}{\alpha}.\end{cases}$$

Очевидно, что поведение данной системы полностью зависит от знака выражения $\mathrm{p}-\dfrac{x}{\alpha}$. Действительно, если $\alpha\mathrm{p}<x$, то $\dot{\mathrm{p}}<0$ и траектория совершает облет вокруг точки ***C***, если же $\alpha\mathrm{p}>x$, то $\dot{\mathrm{p}}>0$ и траектория уходит в бесконечность (рис.3), что принято называть «ускользанием» ресурса от потребителя [1].

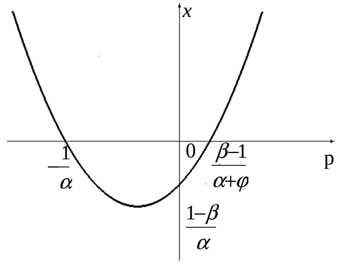


Рис.2

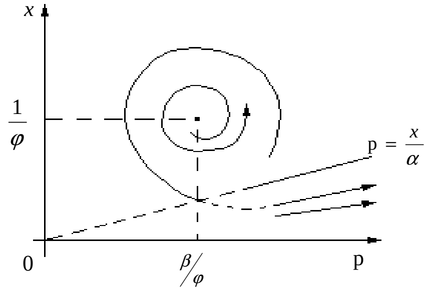


Рис.3

5. Динамика системы (3) на бесконечности

Таким образом, система (3) должна иметь особые точки в бесконечности. Для исследования их характера применим преобразова-ние Пуанкаре $\mathrm{p}=\dfrac{1}{z},\ x=\dfrac{u}{z}$.

Тогда система (3) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \dot{u} = \dfrac{u^2+u}{z+\alpha} - (1+\beta)u = V(u,z), \\ \dot{z} = \left(\dfrac{u}{z+\alpha} - 1\right)z = Z(u,z). \end{cases} \tag{4}$$

Система (4) будет иметь две интересующие нас точки равновесия ***M***(0,0) и ***N***(0,α–φ). Третья, нетривиальная точка равновесия $\left(\dfrac{\varphi}{\beta},\dfrac{1}{\beta}\right)$ совпадает с точкой равновесия ***C*** системы (3) и нами уже исследована.

Из системы (4) имеем

$$\frac{\partial V}{\partial u} = \frac{2u+1}{z+\alpha} - 1 - \beta,\quad \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{u^2+u}{(z+\alpha)^2},$$

$$\frac{\partial Z}{\partial u} = \frac{z}{z+\alpha}, \qquad \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{\alpha u}{(z+\alpha)^2} - 1.$$

Тогда, линеаризуя систему (4) в точке равновесия ***M*** получим

$$\begin{cases} \dot{u} = \left(\dfrac{\varphi}{\alpha} - 1\right)u, \\ \dot{z} = -z, \end{cases}$$

откуда следует, что точка ***M*** является седлом при $\varphi > \alpha$ и устойчивым узлом при $\varphi < \alpha$.

А линеаризуя систему (4) в окрестности точки равновесия ***N***, получим

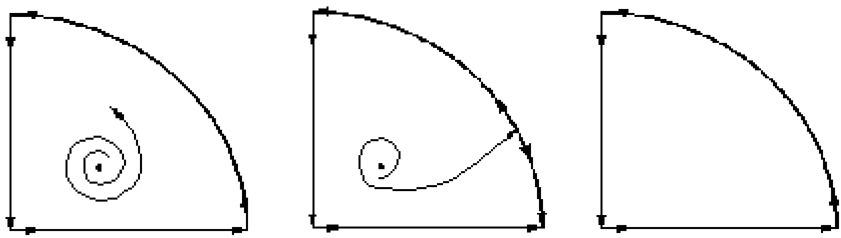
$$\begin{cases} \dot{\overline{u}} = \left(1 - \dfrac{\varphi}{\alpha}\right)\overline{u} - \left(\dfrac{\varphi}{\alpha} - 1\right)(1+\beta)\overline{z}, \\ \dot{\overline{z}} = -\dfrac{\varphi}{\alpha}\overline{z}, \end{cases}$$

где $\overline{u} = u - \alpha + \varphi$, $\overline{z} = z$.

Характеристическое уравнение данной системы имеет корни

$$\lambda_1 = -\frac{\varphi}{\alpha}, \; \lambda_2 = 1 - \frac{\varphi}{\alpha},$$

поэтому точка равновесия ***N*** является седлом при $\varphi < \alpha$ и устойчивым узлом в противном случае, выходя при этом за пределы рассматриваемой области – первой четверти.



а б в

Рис.4

Таким образом, завершено полное исследование модели (4), фа-зовые портреты которой при $0 < \alpha < \frac{1}{1+\beta}$; $\frac{1}{1+\beta} < \alpha < \frac{1}{\beta}$; $\alpha > \frac{1}{\beta}$ изо-бражены на рисунках 4а, 4б, 4в соответственно.

Литература

1. Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. – М.: Наука, 1978.- 352 с.
2 Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости – М.: Наука, 1976.- 496 с.
3. Гончаров А.Н., Елизаров Е.Я. К устойчивости биосистем типа хищник-жертва. – Studia biophysica, Berlin, 1974, v.46, p.147-152.
4. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. – М.: Наука, 1967.- 487 с.
5. Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р. Качественная теория линейных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1974.- 318 с.