УДК 531.38

Условие существования прецессии общего вида гиростата в магнитном поле

М.Е. Лесина, Я.В. Зиновьева
Донецкий национальный технический университет

Прецесійним (безнутаційним) рухом твердого тіла присвячена значна література, починаючи з робіт Г.Г. Аппельрота [1], Д. Гріолі [2,3]. Достатньо повну бібліографію досліджень більш пізнього періоду можна відшукати в роботах [4]–[6].

У цій статті досліджено задачу про існування безнутаційних рухів гіростата в магнітному полі з урахуванням ефекту Барнетта-Лондона. Умова існування зведена до квадратного рівняння відносно швидкості прецесії. Наведено параметричні рівняння як рухомого, так і нерухомого годографів кутової швидкості тіла.

Уравнения движения тела в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона [7] имеют вид

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = \left(A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}\right)\times\boldsymbol{\omega} + B\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v} - C\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v} + \boldsymbol{s}\times\boldsymbol{v}, \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega}. \tag{2}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость тела, $\boldsymbol{v}$ – единичный вектор вертикали (или оси симметрии силовых полей), $\boldsymbol{s}$ – вектор обобщенного центра масс, $\boldsymbol{\lambda}$ – гиростатический момент, A – тензор инерции гиростата, вычисленный в неподвижной точке, B и C – симметричные тензоры, им соответствуют симметричные матрицы третьего порядка. Точкой над переменными в левых частях уравнений (1), (2) обозначена относительная производная.

Система уравнений (1), (2) допускает общие интегралы

$$\left(\boldsymbol{A\omega} + \boldsymbol{\lambda}\right)\cdot\boldsymbol{v} = k, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} = 1. \tag{4}$$

Не умаляя общности, можем считать, что неизменно связанная с телом система координат является главной для тензора инерции

$$A_{ij} = 0, \text{ при } i \neq j. \tag{5}$$

Аналогичные предположения для матриц B, C

$$B_{ij} = 0,\ C_{ij} = 0, \text{ при } i \neq j, \tag{6}$$

безусловно, сужают постановку задачи (в дальнейшем предполагается эти условия снять).

Введем обозначения

$$A_{ii} = A_i\,,\; B_{ii} = B_i\,,\; C_{ii} = C_i\;\;(i = 1,2,3)$$

и запишем теперь уравнения (1), (2) в координатной форме при условиях (5), (6).

$$A_1\dot{\omega}_1 = (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + B_2\omega_2\nu_3 - B_3\omega_3\nu_2 + \lambda_2\omega_3 -$$
$$-\lambda_3\omega_2 - (C_2 - C_3)\nu_2\nu_3 + s_2\nu_3 - s_3\nu_2,$$

$$\begin{aligned} A_2\dot{\omega}_2 &= (A_3 - A_1)\omega_3\omega_1 + B_3\omega_3\nu_1 - B_1\omega_1\nu_3 + \lambda_3\omega_1 - \\ &-\lambda_1\omega_3 - (C_3 - C_1)\nu_3\nu_1 + s_3\nu_1 - s_1\nu_3, \end{aligned} \tag{7}$$

$$A_3\dot{\omega}_3 = (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + B_1\omega_1\nu_2 - B_2\omega_2\nu_1 + \lambda_1\omega_2 -$$
$$-\lambda_2\omega_1 - (C_1 - C_2)\nu_1\nu_2 + s_1\nu_2 - s_2\nu_1;$$

$$\dot{\nu}_1 = \nu_2\omega_3 - \nu_3\omega_2\,, \tag{8}$$

$$\dot{\nu}_2 = \nu_3\omega_1 - \nu_1\omega_3\,, \tag{9}$$

$$\dot{\nu}_3 = \nu_1\omega_2 - \nu_2\omega_1\,. \tag{10}$$

Прецессии общего вида – это движения, при которых угол γ между неизменным в пространстве вектором $\boldsymbol{\nu}$ и неизменным в теле, единичным вектором $\boldsymbol{e}$, сохраняет постоянные значения [3].

Инвариантное соотношение имеет вид:

$$\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\nu} = \cos\gamma\,. \tag{11}$$

П. В. Харламов разработал конструктивный метод построения инвариантных соотношений [8], следуя которому необходимо вычислять производные искомого инвариантного соотношения в силу уравнений (7) – (10) требуемое количество раз.

Сначала продифференцируем соотношение (11) в силу уравнений (2)

$$\boldsymbol{e}\cdot(\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega}) = 0\,. \tag{12}$$

Равенство (12) показывает, что векторы $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\omega}$ компланарны, следовательно, можно записать

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{u}\boldsymbol{e} + \dot{\upsilon}\boldsymbol{\nu}\,, \tag{13}$$

где функции $\dot{u}(t)$, $\dot{\upsilon}(t)$ подлежат определению.

Вычисляем вторую производную от инвариантного соотношения (11) (т.е. производную соотношения (12)) в силу уравнений (2) с учетом интеграла (4) и (13)

$$\dot{u}\dot{\upsilon}\sin^2\gamma + \dot{\boldsymbol{\omega}}\cdot(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\nu}) = 0\,. \tag{14}$$

Подставив представление (13) в правую часть динамических уравнений (7), находим

$$
\begin{aligned}
&A_1\dot{\omega}_1 = (A_2 - A_3)[\dot{u}^2 e_2 e_3 + \dot{u}\dot{\upsilon}(e_2\nu_3 + e_3\nu_2) + \dot{\upsilon}^2\nu_2\nu_3] + \\
&+\dot{u}(B_2 e_2\nu_3 - B_3 e_3\nu_2 + \lambda_2 e_3 - \lambda_3 e_2) + \dot{\upsilon}[(B_2 - B_3)\nu_2\nu_3 + \lambda_2\nu_3 - \lambda_3\nu_2] - \\
&-(C_2 - C_3)\nu_2\nu_3 + s_2\nu_3 - s_3\nu_2. \qquad (123)
\end{aligned} \tag{15}
$$

Символ (123) показывает, что остальные два уравнения получают из выписанного циклической перестановкой индексов.

Разделив уравнения (15) на A_i ($i = 1,2,3$), внесем их правые части во второе слагаемое выражений (14) и получим уравнение, связывающее $\dot{u}$ и $\dot{\upsilon}$

$$
M_{11}\dot{u}^2 + M_{12}\dot{u}\dot{\upsilon} + M_{22}\dot{\upsilon}^2 + M_1\dot{u} + M_2\dot{\upsilon} + M_0 = 0, \tag{16}
$$

в котором

$$
\begin{aligned}
M_{11} = &\frac{A_2 - A_3}{A_1} e_2 e_3 (e_2\nu_3 - e_3\nu_2) + \frac{A_3 - A_1}{A_2} e_3 e_1 (e_3\nu_1 - e_1\nu_3) + \\
&+ \frac{A_1 - A_2}{A_3} e_1 e_2 (e_1\nu_2 - e_2\nu_1);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_{12} = &\frac{A_2 - A_3}{A_1}(e_2^2\nu_3^2 - e_3^2\nu_2^2) + \frac{A_3 - A_1}{A_2}(e_3^2\nu_1^2 - e_1^2\nu_3^2) + \\
&+ \frac{A_1 - A_2}{A_3}(e_1^2\nu_2^2 - e_2^2\nu_1^2) + \sin^2\gamma;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_{22} = &\frac{A_2 - A_3}{A_1}\nu_2\nu_3(e_2\nu_3 - e_3\nu_2) + \frac{A_3 - A_1}{A_2}\nu_3\nu_1(e_3\nu_1 - e_1\nu_3) + \\
&+ \frac{A_1 - A_2}{A_3}\nu_1\nu_2(e_1\nu_2 - e_2\nu_1);
\end{aligned}
$$

$$M_1=\frac{1}{A_1}\left(B_2e_2\nu_3-B_3e_3\nu_2+\lambda_2e_3-\lambda_3e_2\right)\left(e_2\nu_3-e_3\nu_2\right)+$$

$$+\frac{1}{A_2}\left(B_3e_3\nu_1-B_1e_1\nu_3+\lambda_3e_1-\lambda_1e_3\right)\left(e_3\nu_1-e_1\nu_3\right)+$$

$$+\frac{1}{A_3}\left(B_1e_1\nu_2-B_2e_2\nu_1+\lambda_1e_2-\lambda_2e_1\right)\left(e_1\nu_2-e_2\nu_1\right),$$

$$M_2=\frac{1}{A_1}\left[\left(B_2-B_3\right)\nu_2\nu_3+\lambda_2\nu_3-\lambda_3\nu_2\right]\left(e_2\nu_3-e_3\nu_2\right)+$$

$$+\frac{1}{A_2}\left[\left(B_3-B_1\right)\nu_3\nu_1+\lambda_3\nu_1-\lambda_1\nu_3\right]\left(e_3\nu_1-e_1\nu_3\right)+ \qquad (17)$$

$$+\frac{1}{A_3}\left[\left(B_1-B_2\right)\nu_1\nu_2+\lambda_1\nu_2-\lambda_2\nu_1\right]\left(e_1\nu_2-e_2\nu_1\right),$$

$$M_0=\frac{1}{A_1}\left[-\left(C_2-C_3\right)\nu_2\nu_3+s_2\nu_3-s_3\nu_2\right]\left(e_2\nu_3-e_3\nu_2\right)+$$

$$+\frac{1}{A_2}\left[-\left(C_3-C_1\right)\nu_3\nu_1+s_3\nu_1-s_1\nu_3\right]\left(e_3\nu_1-e_1\nu_3\right)+$$

$$+\frac{1}{A_3}\left[-\left(C_1-C_2\right)\nu_1\nu_2+s_1\nu_2-s_2\nu_1\right]\left(e_1\nu_2-e_2\nu_1\right).$$

Внесем разложения (13) в интеграл (3) и найдем $\dot{\upsilon}$

$$\dot{\upsilon}=\frac{k-\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\nu}-\dot{u}\left(A\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{e}\right)}{A\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}}. \qquad (18)$$

Заметим, что $A\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}=A_1\nu_1^2+A_2\nu_2^2+A_3\nu_3^2>0$.

Подставив (18) в уравнение (16), получим уравнение для $\dot{u}$ (скорости собственного вращения)

$$N_0\dot{u}^2+N_1\dot{u}+N_2=0, \qquad (19)$$

в котором

$$N_0\left(\nu_1,\nu_2,\nu_3\right)=M_{11}\left(A\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}\right)^2-M_{12}\left(A\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}\right)\left(A\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{e}\right)+M_{22}\left(A\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{e}\right)^2,$$

$$N_1(v_1,v_2,v_3)=M_{12}(A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})(k-\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{v})-2M_{22}(A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e})(k-\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{v})+ \\ +M_1(A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})^2-M_2(A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})(A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}), \tag{20}$$

$$N_2(v_1,v_2,v_3)=M_{22}(k-\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{v})^2-M_2(A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})(k-\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{v})+M_0(A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})^2.$$

Запишем уравнение (10) на инвариантном соотношении (13) и само инвариантное соотношение в виде

$$e_2\nu_1-e_1\nu_2=\frac{d\nu_3}{du},\ e_1\nu_1+e_2\nu_2=\cos\gamma-e_3\nu_3, \tag{21}$$

которые можно рассматривать как линейную систему для определения ν_1, ν_2 с главным определителем $e_1^2+e_2^2$.

Случай

$$e_1^2+e_2^2=0\ (e_1=e_2=0,e_3=1) \tag{22}$$

как видно из (21) приводит к постоянству третьей компоненты вектора ν_3

$$\nu_3=\nu_3^0=\cos\gamma. \tag{23}$$

Из уравнений (8), (9) находим

$$\dot\nu_1=\dot u\nu_2,$$

$$\dot\nu_2=-\dot u\nu_1,$$

что вместе с условием $\nu_1^2+\nu_2^2=1-\overset{0}{\nu_3^2}=\sin^2\gamma$ приводит к таким зависимостям

$$\nu_1=\sin\gamma\sin u,\quad \nu_2=\sin\gamma\cos u. \tag{24}$$

Пусть теперь

$$e_1^2+e_2^2\neq 0;$$

Из (21) находим

$$(e_1^2+e_2^2)\nu_1=\frac{e_2d\nu_3}{du}+e_1(\cos\gamma-e_3\nu_3), \\ (e_1^2+e_2^2)\nu_2=\frac{-e_1d\nu_3}{du}+e_2(\cos\gamma-e_3\nu_3). \tag{25}$$

Подставив эти выражения в интеграл (4), получим

$$\left(\frac{d\nu_3}{du}\right)^2 = \left(1-e_3^2\right)\sin^2\gamma - \left(\nu_3 - e_3\cos\gamma\right)^2. \qquad (26)$$

Введем вместо e_1, e_2 постоянные α и β так, чтобы

$$e_1 = \cos\alpha\cos\beta,\ e_2 = \sin\alpha\cos\beta,\ e_3 = \sin\beta \qquad (27)$$

Тогда уравнение (26) принимает вид

$$\left(\frac{d\nu_3}{du}\right)^2 = \cos^2\beta\sin^2\gamma - \left(\nu_3 - \sin\beta\cos\gamma\right)^2.$$

Зависимость ν_3 от u из него находим интегрированием

$$\nu_3(u) = \sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma\sin u, \qquad (28)$$

после чего из (25) с учетом (27) получим

$$\begin{aligned} \nu_1(u) &= \sin\alpha\sin\gamma\cos u + \cos\alpha(\cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma\sin u), \\ \nu_2(u) &= -\cos\alpha\sin\gamma\cos u + \sin\alpha(\cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma\sin u). \end{aligned} \qquad (29)$$

Если подставить выражения (28), (29) в соотношения (20), то коэффициенты N_0, N_1, N_2 будут зависеть лишь от переменной u. После этого из дифференциального уравнения первого порядка (19), можно определить зависимость u от времени t, а затем $\dot{\upsilon}$ найдем из соотношения (18).

Таким образом, после интегрирования уравнения (19), можем определить зависимости от времени компонент вектора угловой скорости.

$$\omega_1(t) = \dot{u}(t)\cos\alpha\cos\beta + \dot{\upsilon}(t)\nu_1(t),$$

$$\omega_2(t) = \dot{u}(t)\sin\alpha\cos\beta + \dot{\upsilon}(t)\nu_2(t), \qquad (30)$$

$$\omega_3(t) = \dot{u}(t)\sin\beta + \dot{\upsilon}(t)\nu_3(t).$$

Запишем явные зависимости коэффициентов N_0, N_1, N_2 от компонент вектора ν. Для этого подставим выражения (17) в (20).

$$N_0(\nu_1,\nu_2,\nu_3)=-(A\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu})(A\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{e})\sin^2\gamma+\frac{A_2-A_3}{A_1}(e_2\nu_3-e_3\nu_2)(A_1\nu_1(e_3\nu_1-$$

$$-e_1\nu_3)-A_2\nu_2(e_2\nu_3-e_3\nu_2))(A_3\nu_3(e_2\nu_3-e_3\nu_2)-A_1\nu_1(e_1\nu_2-e_2\nu_1))+$$

$$+\frac{A_3-A_1}{A_2}(e_3\nu_1-e_1\nu_3)(A_2\nu_2(e_1\nu_2-e_2\nu_1)-A_3\nu_3(e_3\nu_1-e_1\nu_3))(A_1\nu_1(e_3\nu_1-$$

$$-e_1\nu_3)-A_2\nu_2(e_2\nu_3-e_3\nu_2))+\frac{A_1-A_2}{A_3}(e_1\nu_2-e_2\nu_1)(A_3\nu_3(e_2\nu_3-e_3\nu_2)-$$

$$-A_1\nu_1(e_1\nu_2-e_2\nu_1)(A_2\nu_2(e_1\nu_2-e_2\nu_1)-A_3\nu_3(e_3\nu_1-e_1\nu_3));$$

$$N_1(\nu_1,\nu_2,\nu_3)=(k-\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\nu})((A\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu})\sin^2\gamma+\frac{A_2-A_3}{A_1}(e_2\nu_3-$$

$$-e_3\nu_2)((A_3\nu_3(e_2\nu_3-e_3\nu_2)-A_1\nu_1(e_1\nu_2-e_2\nu_1))\nu_3+$$

$$+(A_1\nu_1(e_3\nu_1-e_1\nu_3)-A_2\nu_2(e_2\nu_3-e_3\nu_2))\nu_2)+\frac{A_3-A_1}{A_2}(e_3\nu_1-$$

$$-e_1\nu_3)((A_1\nu_1(e_3\nu_1-e_1\nu_3)-A_2\nu_2(e_2\nu_3-e_3\nu_2))\nu_1+$$

$$+(A_2\nu_2(e_1\nu_2-e_2\nu_1)-A_3\nu_3(e_3\nu_1-e_1\nu_3))\nu_3)+\frac{A_1-A_2}{A_3}(e_1\nu_2-$$

$$-e_2\nu_1)((A_2\nu_2(e_1\nu_2-e_2\nu_1)-A_3\nu_3(e_3\nu_1-e_1\nu_3))\nu_2+(A_3\nu_3(e_2\nu_3-$$

$$-e_3\nu_2)-A_1\nu_1(e_1\nu_2-e_2\nu_1))\nu_1))+(A\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu})(\frac{1}{A_1}(e_2\nu_3-$$

$$-e_3\nu_2)((A\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu})(B_2e_2\nu_3-B_3e_3\nu_2+\lambda_2e_3-\lambda_3e_2)-$$

$$-(A\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{e})((B_2-B_3)\nu_2\nu_3+\lambda_2\nu_3-\lambda_3\nu_2))+\frac{1}{A_2}(e_3\nu_1-$$

$$e_1\nu_3)((A\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu})(B_3e_3\nu_1-B_1e_1\nu_3+\lambda_3e_1-\lambda_1e_3)-$$

$$-(A\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{e})((B_3-B_1)\nu_3\nu_1+\lambda_3\nu_1-\lambda_1\nu_3))+$$

$$+\frac{1}{A_3}(e_1\nu_2-e_2\nu_1)((A\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu})(B_1e_1\nu_2-B_2e_2\nu_1+\lambda_1e_2-\lambda_2e_1)-$$

$$-(A\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{e})((B_1-B_2)\nu_1\nu_2+\lambda_1\nu_2-\lambda_2\nu_1))); \qquad (31)$$

$$N_2(\nu_1,\nu_2,\nu_3)=(k-\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\nu})^2(\frac{A_2-A_3}{A_1}\nu_2\nu_3(e_2\nu_3-e_3\nu_2)+\frac{A_3-A_1}{A_2}\nu_3\nu_1(e_3\nu_1-$$

$$-e_1\nu_3)+\frac{A_1-A_2}{A_3}\nu_1\nu_2(e_1\nu_2-e_2\nu_1))+(A\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu})(k-\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\nu})(\frac{1}{A_1}((B_2-B_3)\nu_2\nu_3+$$

$$+\lambda_2\nu_3-\lambda_3\nu_2)(e_2\nu_3-e_3\nu_2)+\frac{1}{A_2}((B_3-B_1)\nu_3\nu_1+\lambda_3\nu_1-\lambda_1\nu_3)(e_3\nu_1-$$

$$-e_1\nu_3)+\frac{1}{A_3}((B_1-B_2)\nu_1\nu_2+\lambda_1\nu_2-\lambda_2\nu_1)(e_1\nu_2-e_2\nu_1))+(A\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu})^2(\frac{1}{A_1}((C_3-$$

$$-C_2)\nu_2\nu_3+s_2\nu_3-s_3\nu_2)(e_2\nu_3-e_3\nu_2)+\frac{1}{A_2}((C_1-C_3)\nu_3\nu_1+s_3\nu_1-$$

$$-s_1\nu_3)(e_3\nu_1-e_1\nu_3)+\frac{1}{A_3}((C_2-C_1)\nu_1\nu_2+s_1\nu_2-s_2\nu_1)(e_1\nu_2-e_2\nu_1)).$$

Явную зависимость от u коэффициентов, N_0, N_1, N_2 получим, если в соотношения (31) подставим (28), (29), а также найденные с помощью (27), (29) компоненты

$$e_2\nu_3-e_3\nu_2=(\sin\alpha\sin u+\cos\alpha\sin\beta\cos u)\sin\gamma,$$

$$e_3\nu_1-e_1\nu_3=(-\cos\alpha\sin u+\sin\alpha\sin\beta\cos u)\sin\gamma, \qquad (32)$$

$$e_1\nu_2-e_2\nu_1=-\cos\beta\sin\gamma\cos u;$$

и

$$A\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}=A_1\left[\sin\alpha\sin\gamma\cos u+\cos\alpha(\cos\beta\cos\gamma-\sin\beta\sin\gamma\sin u)\right]^2+$$
$$+A_2\left[-\cos\alpha\sin\gamma\cos u+\sin\alpha(\cos\beta\cos\gamma-\sin\beta\sin\gamma\sin u)\right]^2+ \qquad (33)$$
$$+A_3(\sin\beta\cos\gamma+\cos\beta\sin\gamma\sin u)^2;$$

$$
\begin{aligned}
A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e} = A_1\cos\alpha\cos\beta[&\sin\alpha\sin\gamma\cos u+\cos\alpha(\cos\beta\cos\gamma-\\
&-\sin\beta\sin\gamma\sin u)]+A_2\sin\alpha\cos\beta[-\cos\alpha\sin\gamma\cos u+\\
&+\sin\alpha(\cos\beta\cos\gamma-\sin\beta\sin\gamma\sin u)]+\\
&+A_3\sin\beta(\sin\beta\cos\gamma+\cos\beta\sin\gamma\sin u);
\end{aligned}
\tag{34}
$$

$$
\begin{aligned}
&k-\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{v}=k-\lambda_1[\sin\alpha\sin\gamma\cos u+\cos\alpha(\cos\beta\cos\gamma-\\
&\sin\beta\sin\gamma\sin u)]-\lambda_2[-\cos\alpha\sin\gamma\cos u+\sin\alpha(\cos\beta\cos\gamma-\\
&-\sin\beta\sin\gamma\sin u)]-\lambda_3(\sin\beta\cos\gamma+\cos\beta\sin\gamma\sin u);
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Заметим, что коэффициенты N_0, N_1, N_2, имеют соответственно пятую, шестую, седьмую степени относительно ν_1, ν_2, ν_3, а, следовательно, и относительно $\sin u$, $\cos u$. Выразим $\dot{u}$ из уравнения (19)

$$
\dot{u}=\frac{-N_1(u)\pm\sqrt{D(u)}}{2N_0(u)}=F_1(u), \tag{36}
$$

где $D(u)=N_1^2(u)-4N_0(u)N_2(u)$ многочлен двенадцатой степени относительно $\sin u$, $\cos u$.

Подставив выражение для $\dot{u}$ в (18) получим

$$
\dot{\upsilon}=\frac{k-\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{v}-(A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e})F_1(u)}{A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}=F_2(u). \tag{37}
$$

Соотношения (36), (37) определяют $\dot{u}$ и $\dot{\upsilon}$ как функции параметра u.

Эти величины должны обращать уравнение (15) в тождество. Две комбинации этих уравнений обращаются в тождество, а третье, которое получается умножением уравнений (15) соответственно на $\frac{e_1}{A_1}$, $\frac{e_2}{A_2}$, $\frac{e_3}{A_3}$ и сложением полученных уравнений, приводит к условию

$$
\ddot{u}+\ddot{\upsilon}\cos\gamma=Q_1\dot{u}^2+Q_{12}\dot{u}\dot{\upsilon}+Q_{22}\dot{\upsilon}^2+Q_1\dot{u}+Q_2\dot{\upsilon}+Q_0. \tag{38}
$$

Внесем в условие (38) выражения (36), (37) и получим

$$
\begin{aligned}
&Q_{11}F_1^2+Q_{12}F_1F_2+Q_{22}F_2^2+Q_1F_1+\\
&+Q_2F_2+Q_0-(F_1'+F_2'\cos\gamma)F_1=0,
\end{aligned}
\tag{39}
$$

где

$$Q_{11} = \left(\frac{A_2 - A_3}{A_1} + \frac{A_3 - A_1}{A_2} + \frac{A_1 - A_2}{A_3} \right) e_1 e_2 e_3 \, ,$$

$$Q_{12} = \frac{A_2 - A_3}{A_1} e_1 \left(e_2 \nu_3 + e_3 \nu_2 \right) + \frac{A_3 - A_1}{A_2} e_2 \left(e_3 \nu_1 + e_1 \nu_3 \right) +$$

$$+ \frac{A_1 - A_2}{A_3} e_3 \left(e_1 \nu_2 + e_2 \nu_1 \right),$$

$$Q_{22} = \frac{A_2 - A_3}{A_1} e_1 \nu_2 \nu_3 + \frac{A_3 - A_1}{A_2} e_2 \nu_3 \nu_1 + \frac{A_1 - A_2}{A_3} e_3 \nu_1 \nu_2 \, ,$$

$$Q_1 = \frac{e_1}{A_1} \left(B_2 e_2 \nu_3 - B_3 e_3 \nu_2 + \lambda_2 e_3 - \lambda_3 e_2 \right) +$$

$$+ \frac{e_2}{A_2} \left(B_3 e_3 \nu_1 - B_1 e_1 \nu_3 + \lambda_3 e_1 - \lambda_1 e_3 \right) +$$

$$+ \frac{e_3}{A_3} \left(B_1 e_1 \nu_2 - B_2 e_2 \nu_1 + \lambda_1 e_2 - \lambda_2 e_1 \right),$$

$$Q_2 = \frac{e_1}{A_1} \left[\left(B_2 - B_3 \right) \nu_2 \nu_3 + \lambda_2 \nu_3 - \lambda_3 \nu_2 \right] +$$

$$+ \frac{e_2}{A_2} \left[\left(B_3 - B_1 \right) \nu_3 \nu_1 + \lambda_3 \nu_1 - \lambda_1 \nu_3 \right] +$$

$$+ \frac{e_3}{A_3} \left[\left(B_1 - B_2 \right) \nu_1 \nu_2 + \lambda_1 \nu_2 - \lambda_2 \nu_1 \right],$$

$$Q_0 = \frac{e_1}{A_1} \left[\left(C_3 - C_2 \right) \nu_2 \nu_3 + s_2 \nu_3 - s_3 \nu_2 \right] +$$

$$+ \frac{e_2}{A_2} \left[\left(C_1 - C_3 \right) \nu_3 \nu_1 + s_3 \nu_1 - s_1 \nu_3 \right] +$$

$$+ \frac{e_3}{A_3} \left[\left(C_2 - C_1 \right) \nu_1 \nu_2 + s_1 \nu_2 - s_2 \nu_1 \right].$$

Обращение равенства (39) тождественно в нуль и есть условие существования безнутационных движений в исследуемой задачи.

После установления связи между параметрами задачи A_i, B_i, C_i, λ_i, s_i ($i=1,2,3$), α, β, γ, k зависимость u от времени t находим из (36).

Существенное отличие этой задачи от задачи Кирхгофа состоит в том, что уравнение Кирхгофа [9] допускают три интеграла (линейный и квадратичный по $\dot{u}$ и $\dot{\upsilon}$), причем интеграл энергии, после исключения из него $\dot{\upsilon}$ имеет вид $P_0\dot{u}^2+P_2=0$, аналог условия (19) имеет такую же структуру. Другими словами, условия (39) компенсируют отсутствие интеграла энергии в исследуемой задачи. Очевидно, что наличие F_1' и F_2' в условии (39) усложняют задачу.

Так как коэффициенты (31) в общем случае чрезвычайно громоздкие ограничимся случаем (22)

$$e_1=e_2=0,\ e_3=1,$$

при этом упростятся как коэффициенты (31), так и соотношения (32)–(35).

Компоненты вектора $\boldsymbol{\nu}$ тогда определены соотношениями (23), (24).

Коэффициенты (17) при условиях (22) таковы:

$$M_{11}=0,\ M_{12}=\frac{A_3-A_2}{A_1}\nu_2^2+\frac{A_3-A_1}{A_2}\nu_1^2+\sin^2\gamma,$$

$$M_{22}=\left(\frac{A_3-A_2}{A_1}\nu_2^2+\frac{A_3-A_1}{A_2}\nu_1^2\right)\nu_3,$$

$$M_1=\frac{\nu_2}{A_1}\left(B_3\nu_2-\lambda_2\right)+\frac{\nu_1}{A_2}\left(B_3\nu_1-\lambda_1\right),$$

$$M_2=\frac{\nu_2}{A_1}\left[\left(B_3-B_2\right)\nu_2\nu_3+\lambda_3\nu_2-\lambda_2\nu_3\right]+$$
$$+\frac{\nu_1}{A_2}\left[\left(B_3-B_1\right)\nu_3\nu_1+\lambda_3\nu_1-\lambda_1\nu_3\right],$$

$$M_0=\frac{\nu_2}{A_1}\left[\left(C_2-C_3\right)\nu_2\nu_3+s_3\nu_2-s_2\nu_3\right]+$$
$$+\frac{\nu_1}{A_2}\left[\left(C_1-C_3\right)\nu_3\nu_1+s_3\nu_1-s_1\nu_3\right].$$

Существенно упростятся при этом выражения (18) и (31)

$$\dot{\upsilon} = \frac{k - \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\nu} - A_3 \nu_3 \dot{u}}{A\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}}, \tag{40}$$

$$N_0 = A_3 \nu_3 \Big\{ \left(A_1 \nu_1^2 + A_2 \nu_2^2 \right) \left[\frac{A_2 - A_3}{A_1} \nu_2^2 + \frac{A_1 - A_3}{A_2} \nu_1^2 - \sin^2 \gamma \right] -$$

$$- A_3 \nu_3^2 \sin^2 \gamma \Big\},$$

$$N_1 = \left(k - \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\nu} \right) \Bigg\{ \left(A\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} \right) \sin^2 \gamma + \left(A_1 \nu_1^2 + A_2 \nu_2^2 - A_3 \nu_3^3 \right) \Bigg[\frac{A_3 - A_2}{A_1} \nu_2^2 +$$

$$+ \frac{A_3 - A_1}{A_2} \nu_1^2 \Bigg] \Bigg\} + \left(A\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} \right) \Bigg\{ \left(A\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} \right) \left[\frac{\nu_2}{A_1} \left(B_3 \nu_2 - \lambda_2 \right) + \frac{\nu_1}{A_2} \left(B_3 \nu_1 - \lambda_1 \right) \right] +$$

$$+ A_3 \nu_3 \left[\frac{\nu_2^2}{A_1} \left(B_2 \nu_3 - \lambda_2 \right) + \frac{\nu_1^2}{A_2} \left(B_1 \nu_3 - \lambda_3 \right) \right] \Bigg\},$$

$$N_2 = \left(k - \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\nu} \right)^2 \left(\frac{A_3 - A_2}{A_1} \nu_2^2 + \frac{A_3 - A_1}{A_2} \nu_1^2 \right) +$$

$$+ \left(A\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} \right) \left(k - \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\nu} \right) \Bigg\{ \frac{\nu_2}{A_1} \left[\left(B_3 - B_2 \right) \nu_2 \nu_3 + \lambda_3 \nu_2 - \lambda_2 \nu_3 \right] +$$

$$+ \frac{\nu_1}{A_2} \left[\left(B_3 - B_1 \right) \nu_3 \nu_1 + \lambda_3 \nu_1 - \lambda_1 \nu_3 \right] \Bigg\} +$$

$$+ \left(A\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} \right)^2 \cdot \Bigg\{ \frac{\nu_2}{A_1} \left[\left(C_2 - C_3 \right) \nu_2 \nu_3 + s_3 \nu_2 - s_2 \nu_3 \right] +$$

$$+ \frac{\nu_1}{A_2} \left[\left(C_1 - C_3 \right) \nu_3 \nu_1 + s_3 \nu_1 - s_1 \nu_3 \right] \Bigg\}.$$

Из соотношения (40) видно, что при

$$\nu_3 = 0 \tag{41}$$

$\dot{\upsilon}$ не зависит от $\dot{u}$. Изучим этот случай. Для него из (23), (24) имеем

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \sin u, \\ \nu_2 &= \cos u. \end{aligned} \tag{42}$$

Уравнение (16) при условии (41) принимает вид

$$\dot{u}\left[(k-\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{v})M_{12}+(A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})M_1\right]=-(k-\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{v})M_2-(A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})M_0, \qquad (43)$$

в котором

$$M_{12}=\frac{A_3-A_2}{A_1}\nu_2^2+\frac{A_3-A_1}{A_2}\nu_1^2+1,$$

$$M_1=\frac{\nu_2}{A_1}(B_3\nu_2-\lambda_2)+\frac{\nu_1}{A_2}(B_3\nu_1-\lambda_1), \qquad (44)$$

$$M_2=\frac{\lambda_3}{A_1A_2}\left(A_1\nu_1^2+A_2\nu_2^2\right),\ M_0=\frac{s_3}{A_1A_2}\left(A_1\nu_1^2+A_2\nu_2^2\right).$$

Если в (43) множитель $(k-\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{v})\mu_{12}+(A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})\mu_1$ не обращается тождественно в нуль, то из этого уравнения можно определить $\dot{u}$. Предварительно исследуем вариант

$$(k-\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{v})M_{12}+(A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})M_1\equiv 0. \qquad (45)$$

Подставим в (45) выражения (41), (44) и получим

$$\begin{aligned}&B_3\left(A_1\nu_1^2+A_2\nu_2^2\right)^2+2A_1A_2(k-\lambda_1\nu_1-\lambda_2\nu_2)+\\&+\left(A_1\nu_1^2+A_2\nu_2^2\right)\left[(A_3-A_1-A_2)(k-\lambda_1\nu_1-\lambda_2\nu_2)-\right.\\&\left.-A_1\lambda_1\nu_1-A_2\lambda_2\nu_2\right]=0.\end{aligned} \qquad (46)$$

Заметим, что с учетом (42) коэффициент при старшей гармонике $\cos 4u$ пропорционален A_1-A_2, поэтому если $A_1-A_2\neq 0$, выражение (46) тождественно в нуль не обращается. Если же

$$A_1-A_2=0\ \ (A_1=A_2=A), \qquad (47)$$

то принимая во внимание (42), имеем

$$A_1\nu_1^2+A_2\nu_2^2=A,$$

а соотношение (46) таково

$$AB_3+A_3k-(A+A_3)(\lambda_1\sin u+\lambda_2\cos u)=0.$$

Оно обращается тождественно в нуль при условиях

$$AB_3+A_3k=0, \qquad (48)$$

$$\lambda_1=\lambda_2=0. \qquad (49)$$

Так как левая часть в равенстве (43) тождественно равна нулю, то и правая часть тоже должна обращаться в нуль. Это возможно, если в дополнении к условиям (47), (49) выполняется еще одно

$As_3 + k\lambda_3 = 0$.

Итак, при выполнении условий (41), (47) – (49) из (40) имеем

$$\dot{\upsilon} = -\frac{B_3}{A_3}. \tag{50}$$

Последнее условие означает, что динамически симметричное тело, гиростатический момент которого принадлежит оси вращения, совершает полурегулярную прецессию вокруг вертикали со скоростью (50).

Для определения скорости $\dot{u}$ собственного вращения тела используем условие (38), которое при ограничениях (22), (41) совпадает с третьим дополнительным условием, из (15)

$$\begin{aligned} A_3\ddot{u} = &(A_1 - A_2)\dot{\upsilon}\nu_1\nu_2 + (B_1 - B_2)\dot{\upsilon}\nu_1\nu_2 + (\lambda_1\nu_1^2 + \lambda_2\nu_2^2)\dot{\upsilon} + \\ &+ (C_2 - C_1)\nu_1\nu_2 + s_1\nu_2 - s_2\nu_1, \end{aligned} \tag{51}$$

которое при условиях (47), (49)принимает вид

$A_3\ddot{u} = (B_1 - B_2)\dot{\upsilon}\nu_1\nu_2 + (C_2 - C_1)\nu_1\nu_2 + s_1\nu_2 - s_2\nu_1$.

Подставив в него (42) и (50), приходим к уравнению

$$A_3\ddot{u} = \left[(C_2 - C_1) + \frac{B_3}{A_3}(B_2 - B_1)\right]\sin u\cos u + s_1\cos u - s_2\sin u. \tag{52}$$

Умножая обе части уравнения (52) на $2\dot{u}$ и интегрируя, получим

$$\dot{u}^2 = n - m\cos 2u + 2\tilde{s}_1\sin u + 2\tilde{s}_2\cos u \tag{53}$$

где n – постоянная интегрирования, а m, $\tilde{s}_1, \tilde{s}_2$ – безразмерные параметры.

$$m = \frac{1}{2A_3^2}\left[A_3(C_2 - C_1) + B_3(B_2 - B_1)\right], \quad \tilde{s}_1 = \frac{s_1}{A_3},\ \tilde{s}_2 = \frac{s_2}{A_3}$$

Из уравнения (53) имеем

$$t = \int_{u_0}^{u}\frac{du}{\sqrt{n + 2\tilde{s}_1\sin u + 2\tilde{s}_2\cos u - m\cos 2u}}, \tag{54}$$

введя замену

$$tg\frac{u}{2}=z,$$

из (54) находим

$$t=2\int\limits_{tg\frac{u_0}{2}}^{tg\frac{u}{2}}\frac{dz}{\sqrt{a_0z^4+4a_1z^3+6a_2z^2+4a_1z+a_4}}, \qquad (55)$$

где

$$a_0=n-m-2\tilde{s}_2,\ a_1=\tilde{s}_1,\ a_2=\frac{1}{3}(n+3m),\ a_4=n-m+2\tilde{s}_2.$$

Зависимость u от t получим обращением эллиптического интеграла (55).

Выделим вначале случай, когда дискриминант уравнения

$$P_4(z)=a_0z^4+4a_1z^3+6a_2z^2+4a_1z+a_4=0 \qquad (56)$$

равен нулю, т.е. уравнение имеет двукратный корень z_1:

$$P_4(z)=(z-z_1)^2\left[a_0z^2+(a_0z_1+3a_1)z-\frac{a_1}{z_1}\right].$$

При этом

$$t=2\int\limits_{tg\frac{u_0}{2}}^{tg\frac{u}{2}}\frac{dz}{(z-z_1)\sqrt{\left[a_0z^2+(a_0z_1+3a_1)z-\frac{a_1}{z_1}\right]}}. \qquad (57)$$

Как известно, интеграл, стоящий справа в (57), вычисляется в элементарных функциях. При его вычислении необходимо рассматривать три варианта.

I. $2a_0z_1^2+3a_1z_1-\frac{a_1}{z_1}>0$, $(a_0z_1+3a_1)^2+\frac{4a_0a_1}{z_1}\neq 0$,

$$tg\frac{u}{2}=z_1+\frac{4c}{(2a+d)e^{\tau}+(d-2a)e^{-\tau}-2l}.$$

II. $2a_0z_1^2+3a_1z_1-\frac{a_1}{z_1}>0$, $(a_0z_1+3a_1)^2+\frac{4a_0a_1}{z_1}=0$,

$$tg\frac{u}{2}=z_1+\frac{2c}{de^{\tau}-l}.$$

В обоих случаях $\tau = -\dfrac{\sqrt{2a_0 z_1^2 + 3a_0 z_1 - \dfrac{a_1}{z_1}}}{2} t$.

III. $2a_0 z_1^2 + 3a_1 z_1 - \dfrac{a_1}{z_1} < 0$, $(a_0 z_1 + 3a_1)^2 + \dfrac{4a_0 a_1}{z_1} > 0$,

$$tg\frac{u}{2} = z_1 + \frac{2c}{d\cos\tau + 2m\sin\tau - l},$$

где

$$\tau = \frac{\sqrt{\dfrac{a_1}{z_1} - 2a_0 z_1^2 - 3a_0 z_1}}{2} t .$$

Здесь введены обозначения

$$a^2 = \left[a_0 z_0^2 + (a_0 z_1 + 3a_1) z_0 - \frac{a_1}{z_1}\right]\left(2a_0 z_1^2 + 3a_1 z_1 - \frac{a_1}{z_1}\right), \ m^2 = -a^2,$$

$$l = 3(a_0 z_1 + a_1)(z_0 - z_1), \ c = \left(2a_0 z_1^2 + 3a_1 z_1 - \frac{a_1}{z_1}\right)(z_0 - z_1),$$

$$d = a_0 z_1^2 + 3(a_0 z_0 + a_1) z_1 + 3a_1 z_0 - 2\frac{a_1}{z_1}, \ z_0 = tg\frac{u_0}{2}.$$

В случае, когда дискриминант G уравнения (56) отличен от нуля, интеграл, стоящий справа в (55), можно выразить, например, посредством эллиптической функции Вейерштрасса.

Для этого [10, с.42] приведем этот интеграл к канонической форме Вейерштрасса. Инварианты уравнения (56) таковы

$$g_2 = \frac{4}{3}\left(3m^2 + n^2 - 3\tilde{s}_1^2 - 3\tilde{s}_2^2\right),$$

$$g_3 = \frac{4}{27}\left[-18nm^2 + 27\left(\tilde{s}_1^2 - \tilde{s}_2^2\right)m + 2n^3 - 9n\left(\tilde{s}_1^2 + \tilde{s}_2^2\right)\right],$$

а дискриминант $G = g_2^3 - 27g_3^2$ можно записать так:

$$G=16\{4m^6-4m^4\left[2n^2+3\left(\tilde{s}_1^2+\tilde{s}_2^2\right)\right]+36m^3n\left(\tilde{s}_1^2+\tilde{s}_2^2\right)+$$
$$+m^2\left[4n^4-20n^2\left(\tilde{s}_1^2+\tilde{s}_2^2\right)-15\left(\tilde{s}_1^2+\tilde{s}_2^2\right)^2+108\tilde{s}_1^2\tilde{s}_2^2\right]-$$
$$-2m\left(\tilde{s}_1^2+\tilde{s}_2^2\right)\left[2n^3-9n\left(\tilde{s}_1^2+\tilde{s}_2^2\right)\right]+\left(\tilde{s}_1^2+\tilde{s}_2^2\right)^2\left[n^2-4\left(\tilde{s}_1^2+\tilde{s}_2^2\right)\right]\neq 0$$

Введем новую переменную ξ и параметры M и c таким образом

$\xi=c-\dfrac{M}{z-z_1}$, $c=\dfrac{1}{24}P_4''(z_1)$, $M=-\dfrac{1}{4}P_4'(z_1)$ где z_1 - корень уравнения (56) ($P_4(z_1)=0$).

После этого интеграл (55) принимает вид [10, с.13]

$$t=M\int\frac{d\xi}{(\xi-c)^2\sqrt{4\xi^3-g_2\xi-g_3}}$$

и, может быть, представлен в форме

$$t=\frac{M}{4c^3-g_2c-g_3}\left[2\left(J_1-cJ_0\right)+\left(\frac{1}{2}g_2-6c^2\right)H_1-\frac{\sqrt{4\xi^3-g_2\xi-g_3}}{\xi-c}\right].$$

Здесь J_0, J_1, H_1–эллиптические интегралы соответственно первого, второго и третьего типов в форме Вейерштрасса.

$$J_0=\int\frac{d\xi}{\sqrt{4\xi^3-g_2\xi-g_3}},$$

$$J_1=\int\frac{\xi d\xi}{\sqrt{4\xi^3-g_2\xi-g_3}},$$

$$H_1=\int\frac{d\xi}{(\xi-c)\sqrt{4\xi^3-g_2\xi-g_3}}.$$

Откажемся от условий (48), (49) и представим (43) в виде

$$\dot{u}=\frac{-(As_3+k\lambda_3)+\lambda_3(\lambda_1\nu_1+\lambda_2\nu_2)}{A_3k+AB_3-(A+A_3)(\lambda_1\nu_1+\lambda_2\nu_2)}. \qquad (58)$$

Потребуем, чтобы выполнялись условия

$$As_3+k\lambda_3=-\mu(A_3k+AB_3), \qquad (59)$$

$$\lambda_3=-\mu(A+A_3), \qquad (60)$$

вследствие, которых из (58) имеем

$$\dot{u} = \mu, \tag{61}$$

Уравнение (40) при условиях (41), (42), (47), (61) можно записать так

$$\dot{\upsilon} = \frac{k - \lambda_1 \sin u - \lambda_2 \cos u}{A} \tag{62}$$

и после этого запишем уравнение (51)

$$\begin{gathered}(B_1 - B_2)(k - \lambda_1 \sin u - \lambda_2 \cos u)\sin u \cos u + \\ + A(C_2 - C_1)\sin u \cos u + (k - \lambda_1 \sin u - \lambda_2 \cos u) + \\ + (\lambda_1 \cos u - \lambda_2 \sin u) + A(s_1 \cos u - s_2 \sin u) = 0.\end{gathered} \tag{63}$$

Приравнивая нулю коэффициенты при синусах и косинусах кратных дуг, получаем условия при которых равенство (63) тождественно обращается в нуль.

$$B_1 = B_2 = B,\ \ C_1 - C_2 = \frac{\lambda_2^2}{A},\ \ s_1 = 0,\quad s_2 = \frac{-k\lambda_2}{A}, \tag{64}$$

$$\lambda_1 = 0. \tag{65}$$

При ограничении (65) выражение (62) принимает вид

$$\dot{\upsilon} = \frac{k - \lambda_2 \cos u}{A}. \tag{66}$$

Зависимость u от t находим из (61)

$$u(t) = u_0 + \mu t.$$

Таким образом, при условиях (22), (41), (47), (59), (60), (64), (65) найдены полурегулярные прецессии с постоянной скоростью собственного вращения (61) и скоростью прецессии (66). В решении остались свободными параметры $A,\ A_3,\ B,\ B_3,\ C_1,\ C_3,\ \lambda_2,\ s_3,\ \mu,\ u_0,\ k.$

Основные переменные задачи таковы

$$\omega_1 = \frac{1}{A}(k - \lambda_2 \cos u)\sin u,\ \ \omega_2 = \frac{1}{A}(k - \lambda_2 \cos u)\cos u,\ \ \omega_3 = \mu,$$

$$\nu_1 = \sin u,\ \ \nu_2 = \cos u,\ \ \nu_3 = 0,\ \ u = u_0 + \mu t.$$

Дополнительный интеграл Как отмечено вначале, уравнения (1), (2) допускают два общих интеграла (3), (4). Оказывается, что на инвариантном соотношении (11) и его следствии (13), при условиях (22), (41) соотношение (18) принимает вид

$$\dot{\upsilon} = \frac{k - \lambda_1 \nu_1 - \lambda_2 \nu_2}{A_1 \nu_1^2 + A_2 \nu_2^2},$$

а третье динамическое уравнение из (15) при этом таково

$$\begin{aligned} A_3 \ddot{u} &= (A_1 - A_2)\frac{(k - \lambda_1 \nu_1 - \lambda_2 \nu_2)^2}{(A_1 \nu_1^2 + A_2 \nu_2^2)^2}\nu_1 \nu_2 + \\ &+ \frac{(\lambda_1 \nu_2 - \lambda_2 \nu_1)(k - \lambda_1 \nu_1 - \lambda_2 \nu_2)}{A_1 \nu_1^2 + A_2 \nu_2^2} + \\ &+ \frac{(B_1 - B_2)(k - \lambda_1 \nu_1 - \lambda_2 \nu_2)}{A_1 \nu_1^2 + A_2 \nu_2^2}\nu_1 \nu_2 + \\ &+ (C_2 - C_1)\nu_1 \nu_2 + s_1 \nu_2 - s_2 \nu_1. \end{aligned} \tag{67}$$

Умножая обе части уравнения (67) на $2\dot{u}$, учитывая соотношения (42), и, интегрируя при $A_1 \neq A_2$, получаем дополнительный интеграл

$$\begin{aligned} A_3 \dot{u}^2 &= n - \frac{(k - \lambda_1 \sin u - \lambda_2 \cos u)^2}{A_1 \sin^2 u + A_2 \cos^2 u} + (C_2 - C_1)\sin^2 u + 2 s_1 \sin u + \\ &+ 2 s_2 \cos u + (B_1 - B_2) I, \end{aligned} \tag{68}$$

где

$$\begin{aligned} I &= \frac{k}{A_1 - A_2}\ln(A_1 \sin^2 u + A_2 \cos^2 u) - \frac{2(\lambda_1 \sin u + \lambda_2 \cos u)}{A_1 - A_2} + \\ &+ \frac{2\lambda_1}{A_1 - A_2}\sqrt{\frac{A_2}{A_1 - A_2}}\, arctg \sqrt{\frac{A_1 - A_2}{A_2}}\sin u - \\ &- \frac{2\lambda_2}{A_1 - A_2}\sqrt{\frac{A_1}{A_1 - A_2}}\ln\left|\frac{\sqrt{A_1 - A_2}\cos u - \sqrt{A_1}}{\sqrt{A_1 - A_2}\cos u + \sqrt{A_1}}\right|, \end{aligned}$$

если

$A_1 - A_2 > 0$;

$$I=\frac{k}{A_1-A_2}\ln(\sin^2 u+\frac{A_2}{A_1}\cos^2 u)-\frac{2(\lambda_1\sin u+\lambda_2\cos u)}{A_1-A_2}-$$

$$-\frac{2\lambda_2}{A_2-A_1}\sqrt{\frac{A_1}{A_2-A_1}}arctg\sqrt{\frac{A_2-A_1}{A_1}}\cos u+$$

$$+\frac{\lambda_1}{A_2-A_1}\sqrt{\frac{A_2}{A_2-A_1}}\ln\left|\frac{\sqrt{A_2-A_1}\sin u-\sqrt{A_2}}{\sqrt{A_2-A_1}\sin u+\sqrt{A_2}}\right|,$$

если

$$A_2-A_1>0.$$

Безусловно, найденный интеграл (68) позволяет получить дополнительную информацию о системе уравнений (1), (2). Этот интеграл не зависит явно от времени и содержит произвольную постоянную n, но для сведения исследуемой задачи к квадратурам необходим еще один интеграл (из-за отсутствия интеграла энергии).

Так как для существования безнутационных движений необходимо обращать тождественно в нуль условие (19), используя (18) и (68), наличие трансцендентных функций, содержащихся в (68), не позволит выполнить эту операцию, поэтому необходимо считать, что найденный интеграл есть алгебраический, то есть $B_1=B_2=B.$

При таком условии дополнительный интеграл таков

$$A_3\omega_3{}^2=n-\frac{(k-\lambda_1\sin u-\lambda_2\cos u)^2}{A_1\sin^2 u+A_2\cos^2 u}+(C_2-C_1)\sin^2 u+$$

$$+2s_1\sin u+2s_2\cos u.$$

Если же $A_1=A_2$, в результате интегрирования уравнения (67) в правой части получим многочлен относительно $\sin u$, $\cos u$.

$$A_3\dot{u}^2=\frac{1}{A}(k-\lambda_1\sin u-\lambda_2\cos u)^2+$$

$$+\frac{B_1-B_2}{A}(k-\sin^2 u-\frac{2}{3}\lambda_1\sin^3 u+\frac{2}{3}\lambda_2\cos^3 u)+$$

$$+(C_2-C_1)\sin^2 u+2s_1\sin u+2s_2\cos u+n,$$

где n – постоянная интегрирования.

Так как тело имеет неподвижную точку , то построение полного решения в соответствии с работой [11,c 250-254] сводится к нахождению годографов (подвижного и неподвижного) угловой скорости тела.

Параметрические уравнения подвижного годографа даны соотношением (30), причем угол υ прецессии в них явно не входит. Поскольку известны зависимости (28), (29) $\nu_i(u)$, то компоненты Ω_i угловой скорости тела в неподвижной системе координат, первая ось которой направлена по вектору $\boldsymbol{\nu}$ [12] , таковы

$$\Omega_1 = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad \Omega_2 = \omega_\rho \cos\alpha, \quad \Omega_3 = \omega_\rho \sin\alpha, \tag{69}$$

где

$$\omega_p^2 = (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu})^2, \tag{70}$$

а уравнение, определяющие угол α_* , имеет вид:

$$\omega_\rho{}^2 \dot{\alpha}_* = \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}). \tag{71}$$

Внесем (28)–(30) в (70), (69) и получим

$$\omega_\rho{}^2 = \dot{u}^2 \sin^2 \gamma, \tag{72}$$

$$\Omega_1 = \dot{\upsilon}, \quad \Omega_2 = \dot{u} \sin\gamma \cos\alpha, \qquad \Omega_3 = \dot{u} \sin\gamma \sin\alpha.$$

Так как на инвариантном соотношении (13)

$$\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega} = \dot{u}(\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{e}),$$

то

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}) = \dot{u}\dot{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{e}),$$

а привлекая соотношение (14) получим, что

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}) = \dot{u}^2 \dot{\upsilon} \sin^2 \gamma. \tag{73}$$

Подставив (72) в (73), (71) находим

$$\dot{\alpha}_* = \dot{\upsilon}.$$

Таким образом, $\dot{\alpha}_*$ совпадает со скоростью прецессии $\dot{\upsilon}$.

Этот результат был ожидаем, так как для рассматриваемых движений компоненты угловой скорости в неподвижной системе координат так же выражаются через углы Эйлера и их производные. Здесь это углы u, υ, γ.

Литература

1. Аппельрот Г.Г. Не вполые симметричные тяжелые гироскопы //Движение твердого тела вокруг неподвижной точки. – М.: Изд-во АН СССР, 1940. – С. 62-156.
2. Grioli G. Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicament

possibili per un solido pesante asimmetrico. – Ann. mat. pura ed appl., 1947, **26**, S. 4, p. 271-281.
1. Дж. Гриоли. К общей теории асимметричных гироскопов // Проблемы гироскопии. М.: Мир, 1967. С. 34-39.
4. Горр Г.В. Прецессионные движения в динамике твердого тела и динамике систем связанных твердых тел. – Препринт №89.03, Донецк: ИПММ АН УССР. – 1989 – 66 с.
5. Горр Г.В., Мазнев А.В. Условия существования регулярных прецессий гиростата в обобщенных задачах динамики твердого тела // Механика твердого тела. – 1995. – Вып. 24. – С. 45-49.
6. Горр Г.В. Методы исследования движений твердого тела и их приложения в классификации движений // Механика твердого тела. – 1982. – Вып. 14. – С. 54-74.
7. Самсонов В.А. О вращении твердого тела в магнитном поле // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1984. – №4. С 32-43.
8. Харламов П.В. Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 15-24.
9. Харламов П.В., Мозалевская Г.В., Лесина М.Е. О различных представлениях уравнений Кирхгофа // Механика твердого тела. – 2001. – Вып. 31. – С. 3-17.
10. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. (Серия: «Справочная мат. библиотека»). М.: Наука, 1967. 300 с.
11. Харламов П.В. Очерки об основаниях механики. Мифы, заблуждения и ошибки. – Киев: Наукова думка, 1995. – 409 с.
12. Харламов П.В. Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. – 1964. – 28, вып. 3. С. 502-507.