УДК 371.214.114

К методике исследования функций и построения их графиков

Косолапов Ю.Ф., Маринова Е.С., Мамичева В.Д., Драченко Л.Н., Прокопенко А.Ю.

Донецкий национальный технический университет

Стаття присвячена методиці дослідження функцій та побудові їх графіків в курсі вищої математики втузів. Особлива увага звертається на можливості побудови графіків ще до вивчення й застосування апарату диференціального числення.

Исследованию функций и построению их графиков посвячены соответствующие разделы во всех учебниках высшей математики, содержащих главы математического анализа функций одной переменной, например, в книгах [1] - [9]. Наработаны многие методические приемы, схемы и рекомендации. Однако сложность усвоения этой темы студентами заставляет искать все новые методические подходы. Одному из них посвящена настоящая статья. Насколько нам известно, подобный подход в его «чистом» виде еще не предлагался в современной методической литературе.

Начнем с изложения нескольких известных общих схем исследования функции и построения ее графика.

Вот схема, приведенная в книге [1, стр. 131] (все выражения в скобках добавлены нами).

1. Находим область определения X функции.

2. Проверяем функцию на периодичность, четность, нечетность. В случае необходимости находим характерные точки графика, например, точки пересечения с координатными осями.

3. Находим (производную) $f'(x)$ и критические точки (функции) $f(x)$.

4. Находим (производную второго порядка) $f''(x)$ и критические точки (производной первого порядка) $f'(x)$.

5. Найденные данные сводим в таблицу, из которой получаем интервалы монотонности и выпуклости или вогнутости, а также точки экстремума и перегиба (заполнив соответствующие клетки знаками производных функции).

6. Находим асимптоты (графика) функции. Иногда асимптоты удобно найти раньше.

7. Строим график функции.

А вот схема, приведенная в книге [2, стр. 182].

«Под «исследованием функции» обычно понимается разыскание:

1) естественной области существования функции;

2) точек разрыва функции;

3) интервалов возрастания и убывания функции;

4) точек максимума и минимума, а также максимальных и минимальных значений функции;

5) областей выпуклости и вогнутости графика, точек перегиба;

6) асимптот графика функции.

На основании проведенного исследования строится график функции (иногда целесообразно намечать элементы графика параллельно с исследованием)».

К приведенной общей схеме автор книги [2] добавляет три дополнительных замечания, из которых два первых относятся к четным или нечетным функциям и особенностям их графиков, а третье – к выбору порядка исследования, исходя из конкретных особенностей исследуемой функции.

Приведем, наконец, схему (именуемую как план исследования функции), содержащуюся в книге [3, стр. 268].

«1. Нахождение области определения функции, интервалов непрерывности и точек разрыва.

2. Нахождение асимптот графика функции.

3. Нахождение интервалов монотонности функции и ее экстремумов (максимумов и минимумов).

4. Нахождение интервалов выпуклости и вогнутости и точек перегиба графика функции.

5. Построение графика функции».

В двух замечаниях отмечается полезность нахождения точек пересечения графика функции с координатными осями и установления ее четности или нечетности.

Выскажем некоторые замечания к приведенным схемам.

а) Построение графика функции в этих схемах рассматривается как заключительный, итоговый этап, при котором принимаются во внимание все проведенные исследования функции. Однако в книге [2] не исключаются и элементы поэтапности в построении графиков функций. И именно поэтапность построения графиков взята нами за основу в предлагаемой нами схеме.

б) Нам кажется излишним фиксирование необходимости нахождения производных $f'(x), f''(x)$ и критических точек функций $f(x), f'(x)$ в [1], как частных моментов общих позиций - исследования функций на монотонность и локальные экстремумы и установления участков выпуклости и вогнутости их графиков. Именно эти широкие позиции четко выделяются в [2], [3] и именно они используются в нашей методике.

в) В [1], [2], [3] нахождение асимптот графиков функций рассматривается как один из самых последних этапов перед построением графика функции, хотя в [1] допускается возможность отыскания асимптот и на более ранних этапах исследования. В нашей методике отыскание асимптот проводится уже на ранних этапах исследования функции.

г) В ряде современных учебных пособий [1], [4], [5] (и в практике многих преподавателей) результаты исследования функции предлагается сначала фиксировать с помощью специальной таблицы, содержащей знаки и нули обеих производных изучаемой функции (иногда и самой функции), информацию о свойствах функции и ее графика, а потом уже с помощью таблицы строить график самой функции. Однако подобный методический подход имеет ряд недостатков и вызывает возражения с нашей стороны. Он практически полностью исключает возможность поэтапного построения графика функции. Он игнорирует возможность достаточно точного построения графиков немалого количества функций вообще без использования производных. Таблица может содержать большое количество позиций, которые очень трудно учесть сразу, особенно недостаточно «набившему руку» студенту. Таблица мгновенно теряет практический смысл и становится фиксатором противоречий, если при ее подготовке студент допустил ту или иную ошибку (а сами мы всегда ли в состоянии проделать без единой ошибки зачастую весьма большие и громоздкие вычисления?). В качестве фактически доведенного до абсурда примера итоговой таблицы сошлемся на таблицу, занимающую целую страницу в книге [10, стр. 266]. Если даже предположить, что студенту удастся прийти к ней, не сделав ни единой ошибки (что само по себе практически невероятно), то воспользоваться ею для построения графика функции ему будет крайне затруднительно.

Из трех названных нами книг [1], [2], [3] наиболее существенным образом идея таблицы использована в [1], где даже интервалы монотонности функции и выпуклости (вогнутости) ее графика устанавливаются из таблицы с помощью знаков + или – в определенных ее клетках (аналогично – в книгах [4], [5]). В [3] в изложении общего плана исследования функции таблицы не упоминаются, но используются в примерах. При этом для исследования знаков первой и второй производных приводятся отдельные таблицы без сведения их в итоговую с фиксацией знаков обеих производных (аналогично – в книге [6]). В [2] ни о каких таблицах не говорится в общей схеме исследования. Никаких таблиц нет и в трех последующих примерах исследования явных функций. И только при исследовании параметрически заданных функций применяются таблицы, относящиеся только к определению знаков производной первого порядка, невелики по объему и являются вполне уместными и, главное, хорошо обозримыми с точки зрения вида графика функции на том или ином интервале значения аргумента.

Предлагаемая нами методика поэтапного исследования функции и построения ее графика делает как правило совершенно излишним использование тех или иных таблиц. Отметим попутно, что в классических руководствах по математическому анализу Г.М. Фихтенгольца [7], [8] таблицы в приведенном выше смысле вообще не используются, а имеются только таблично представленные характерные точки графиков функций.

Приведем теперь наш план исследования функции и построения ее графика. Он дает хорошие результаты для довольно большого числа не очень сложных явно заданных элементарных функций и состоит из четырех основных позиций, обозначаемых нами римскими цифрами. Первая позиция имеет целью исследовать функцию и построить предварительный эскиз ее графика без использования производных. Вторая и третья позиции дополнительно подключают к исследованию функции производные первых двух порядков с соответствующими первым и вторым уточнениями предварительного эскиза графика. Наконец, последняя, четвертая позиция – окончательное построение графика функции с учетом результатов первых трех позиций. Отметим, что и в книге [6], а также в мало известной в настоящее время, но очень интересной с методической точки зрения книге [9] сначала рассматриваются методы построения графиков функций без использования, а уж затем – и с использованием производной.

Вот наша схема исследования функции и построения ее графика (с некоторыми поясняющими соображениями и некоторыми последующими замечаниями).

I. Предварительный эскиз графика функции без использования производных. Этот этап состоит из следующих основных частей.

1. Нахождение области определения, а следовательно, и области непрерывности изучаемой элементарной функции, фиксация точек разрыва, для рассматриваемых нами простых функций - чаще всего бесконечного.

2. Нахождение интервалов, на которых функция имеет постоянный знак (короче –интервалов знакопостоянства функции).

3. Нахождение односторонних пределов функции в точках бесконечного разрыва и как результат – нахождение вертикальных асимптот (одной или нескольких) графика. Результаты предыдущего пункта позволяют сразу установить знаки соответствующих пределов функции и выяснить характер приближения ее графика к вертикальной асимптоте (с неограниченным «уходом» графика вверх или вниз). Этот пункт может применяться еще до изучения асимптот графиков функций, и тогда вместо термина «асимптота» можно просто говорить о прямых, перпендикулярных оси абсцисс, которые не могут пересекаться графиком функции.

4. Нахождение возможных точек пересечения графика с координатными осями.

5. Нахождение предела функции на $\pm\infty$. Наличие по крайней мере одного конечного предела означает существование горизонтальной асимптоты у соответствующей части графика (например, в случае $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b \neq \infty$ – существование горизонтальной асимптоты $y = b$ у его правой части). Из общей теории следует, что такая часть графика не имеет наклонной асимптоты, и нет необходимости тратить время на отыскание последней. Однако весьма полезно выяснить, пересекается ли график функции с найденной горизонтальной асимптотой.

Если хотя бы один из пределов функции при $x \to -\infty$ или $x \to +\infty$ бесконечен, то это означает, что для соответствующей части графика нужно будет искать наклонную асимптоту. В данном же пункте мы, еще не обладая таковой, получаем информацию о характере «ухода» в бесконечность этой части графика. Если, например, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, то левая часть графика при ее «уходе» налево неограниченно поднимается вверх. Этот пункт является полезным и в том отношении, что он может быть, как и пункт 3, успешно задействован еще до того, как студенты познакомятся с полной теорией асимптот кривых, и тогда мы можем просто говорить о прямой (прямых), которая параллельна оси асбцисс и к которой, пересекая или не пересекая ее в «конечных» точках, приближается график функции «на бесконечности»..

6. Отыскание наклонной асимптоты (или наклонных асимптот) графика функции, если соответствующий раздел уже изложен студентам. В случае существования хотя бы одной наклонной асимптоты необходимо выяснить, пересекается ли она с графиком функции.

На основании проведенных исследований строится так называемый предварительный эскиз графика функции, который затем уточняется в последующих двух пунктах.

II. Исследование функции на возрастание, убывание, нахождение локальных экстремумов и соответствующих точек графика. Первое уточнение предварительного эскиза графика функции.

III. Исследование графика функции на выпуклость, вогнутость, нахождение возможных точек перегиба. Второе уточнение предварительного эскиза графика функции.

IV. Окончательное построение графика функции.

Сделаем несколько дополнительных замечаний по поводу предлагаемой нами схемы.

Исследование функций по плану части I, то есть без использования производных, может и должно начинаться задолго до изучения дифференциального исчисления. Хороший момент для начала таких исследований предоставляется нам при изучении свойств функций, непрерывных на (замкнутых ограниченных) интервалах. На одном из таких свойств основан, как известно, метод интервалов для решения неравенств, который весьма уместно применять в пункте I.2.

Необходимо учить студентов проводить четкую грань между установленным свойством функции и соответствующим свойством ее графика (особенно это относится к части I исследования).

При данной методике создается возможность многократного самоконтроля при небольшом количестве исходных позиций и при неторопливом введении в рассмотрение новых позиций.

Каждая новая теоретическая позиция естественным образом присоединяется ко всем предыдущим, и это позволяет широко использовать коррекцию графиков: от плохого – к лучшему, от него – к еще лучшему, в конечном итоге – к окончательному графику (точнее – к наилучшему его эскизу).

Общая схема исследования функции и построения ее графика дается только тогда, когда изучены все относящиеся к данной проблеме вопросы. Но наша общая схема существенно отличается от общепринятых в одном моменте – в достаточно скрупулезном построении предварительного эскиза графика функции без использования производной с последующими коррекциями, предоставляемыми нам в связи с процессом изучения соответствующих разделов дифференциального исчисления. Данная методика не требует создания никаких итоговых таблиц, так все относящиеся к изучаемой функции позиции немедленно переносятся на ее график.

Нам кажется, что изложенная методика исследования функции и построения ее графика обладает рядом очевидных и, как нам представляется, неоспоримых достоинств и может быть предложена в качестве дополнения к уже известным методическим приемам.

В дальнейших статьях мы постараемся конкретизировать выдвинутые здесь общие положения на ряде примеров, в том числе тех, где по крайней мере один из пунктов части I оказывается неосуществимым.

Литература

1. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Вища математика: Підручник.-Д.: „Видавництво Сталкер”, 2003.- 496 с.

2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т. 1. М.: Наука, 1978.- 456 с.

3. Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Краткий курс высшей математики. Т. 1. Учеб. пособие для втузов. М.: Высшая школа, 1978.-384 с.

4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1980.- 432 с.

5. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. Т. 1. М.: Высшая школа, 1973. – 614 с.

6. Зорич В.А. Математический анализ, часть 1.- М.: Наука, 1981. – 544 с.

7. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Наука, 1969. – 607 с.

8. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т. 1. М.: Наука, 1964. – 440 с.

9. Гребенча М.К., Новоселов С.И. Курс математического анализа. Т. 1. М.: Высшая школа, 1960.-543 с.

1. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа. Под редакцией Ефимова А.В., Демидовича Б.П. М.: «Наука», 1981.- 464 с.