УДК 517.944(09)

Эмиль Пикар и характеристическая задача для линейного уравнения второго порядка

Косолапов Ю.Ф., Константинова А.О., Хорунжая О.И.

Донецкий национальный технический университет

В статті розглядаються два варіанти методу послідовних наближень, які застосовувалися Пікаром для розв"язання характеристичної задачі для лінійного гіперболічного диференціального рівняння другого порядку з двома незалежними змінними і змінними коефіцієнтами, та пікарівська методика обґрунтування першого варіанту. Стави-ться проблема строгого обґрунтування другого варіанту методу, який засновано на елементах теорії аналітичних функцій.

В историко-математической литературе достаточно обстоятельно изучены работы французского математика Эмиля Пикара по применению метода последовательных приближений для обыкновенных дифференциальных уравнений и эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных. В то же время его вклад в теорию гиперболических уравнений практически никем не исследовался, если не считать кратких упоминаний в некоторых энциклопедических обзорах, в частности, известной Немецкой энциклопедии, издававшейся в начале XX в. В двух предыдущих статьях мы изучали работы Пикара, посвященные решению задачи Коши для линейных гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными и переменными коэффициентами. Следующие две статьи посвящены другой важнейшей задаче для тех же уравнний, а именно характеристической задаче. Ее решению Пикар уделил внимание едва ли не большее, чем задаче Коши.

Характеристическая задача – это задача об определении решения гиперболического уравнения, принимающего (для уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными) заданные значения на двух характеристиках различных семейств. Такая задача возникает, например, при решении задачи Коши для линейного уравнения

$$z_{xy} = az_x + bz_y + cz \qquad (1)$$

методом Римана. Вопросом однозначной разрешимости характеристической задачи для уравнения (1) занимались Дюбуа Реймон [1] и Дарбу [2]. Дарбу удалось доказать соответствующую теорему методом мажорант в предположении аналитичности коэффициентов уравнений и данных на характеристиках. Метод последовательных приближений Пикара позволяет ему провести доказательство при минимальных предположениях - непрерывности коэффициентов a, b, c уравнения (1) в прямоугольнике

$$R = \{(x, y): x_0 \le x \le x_B, y_0 \le y \le y_B\}$$

и непрерывности вместе с первыми производными функций $\varphi(x)$ и $\phi(x)$, задающих краевые условия на характеристиках $x = x_0, y = y_0$:

$$\left.\begin{array}{c} z(x, y_0) = \varphi(x),\ z(x_0, y) = \phi(y),\ \varphi(x_0) = \phi(y_0), \\ \varphi(x) \in C^1[x_0, x_B],\ \phi(y) \in C^1[y_0, y_B], \end{array}\right\} \qquad (2)$$

К задаче (1), (2) Пикар обращается дважды - в статье [3] и в заметке [4], помещенной в качестве дополнения в четвертом томе большого трактата Дарбу по теории поверхностей и избранным вопросам анализа. В той же заметке он рассмотрел характеристическую задачу (2) для квазилинейного уравнения

$$z_{xy} = F(x, y, z, z_x, z_y) \qquad (3)$$

Доказательство существования решения задачи (1), (2) в статье [3] сначала почти дословно воспроизводит ход рассуждений, использованный для задачи Коши. Искомое решение ищется в виде ряда

$$z = z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots, \qquad (4)$$

первый член которого представляет собой решение вспомогательной характеристической задачи для уравнения

$$z_{xy} = 0 \qquad (5)$$

при заданных дополнительных условиях (2) на характеристиках,

$$z_1 = \varphi(x) + \phi(y) - \varphi(x_0);$$

n -й член ряда (4) является решением характеристической задачи для уравнения

$$(z_n)_{xy} = a(z_{n-1})_x + b(z_{n-1})_y + cz_{n-1} \qquad (6)$$

с дополнительными условиями

$$z_n(x, y_0) = 0,\ z_n(x_0, y) = 0 \qquad (7)$$

Задачи (6),(7) решаются на основании замечания, аналогичного сделанному для случая задачи Коши: решение задачи

$$z_{xy} = f(x, y),\ z(x_0, y) = 0,\ z(x, y_0) = 0$$

дается (при определенных ограничениях, наложенных на функцию $f(x,y)$, например, при условии непрерывности) формулой

$$z = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(x,y)dxdy \,. \qquad (8)$$

Равномерная сходимость ряда (4) и рядов

$$\sum_1^\infty (z_n)_x, \ \sum_1^\infty (z_n)_y \qquad (9)$$

устанавливается посредством аналогичных оценок (в их записи содержатся некоторые неточности, впрочем, легко исправимые). Как и в случае задачи Коши, не доказывается единственность, стремление найденного решения к заданным функциям $\varphi(x),\phi(y)$ при неограниченном приближении изнутри R к соответствующим частям характеристик $x = x_0$, $y = y_0$, существование производной z_{xy}, а также то, что функция z удовлетворяет уравнению (1).

Возвратясь к той же характеристической задаче (1), (2) в следующей работе [4] и наметив такой же план действий, Пикар отвечает на два последних из отмеченных нами вопросов. Именно, в силу равномерной сходимости рядов (4) и (9)[1], можно записав сначала

$$\sum_{k=1}^{n} z_k = \varphi(x) + \phi(y) + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\left(a\frac{\partial}{\partial x}\sum_{k=1}^{n} z_k + b\frac{\partial}{\partial y}\sum_{k=1}^{n} z_k + c\sum_{k=1}^{n} z_k \right)dxdy \,,$$

перейти к пределу

$$z(x,y) = \varphi(x) + \phi(y) - \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}(az_x + bz_y + cz)dxdy \,,$$

после чего, дифференцируя сначала по x, затем по y, получить, что функция $z(x,y)$ обладает производной $z_{xy}(x,y)$ и удовлетворяет уравнению (1).

Заметим,что эти рассуждения немедленно переносятся на задачу Коши для того же уравнения (1) при данных Коши

$$z_x\Big|_{y=y(x)} = \varphi(x), \ z_y\Big|_{x=x(y)} = \phi(y), \ z(x_0,y_0) = z_0 \qquad (10)$$

вдоль нехарактеристической кривой AB. Этим завершается доказательство существования ее решения, исключая, правда, установление единственности и

---

[1] Напомним,что здесь члены этих рядов являются решениями характеристических задач при краевых условиях (2)для уравнения (5)и однородных $\varphi \equiv 0, \phi \equiv 0$)условиях (2)для уравнения (6).

стремления производных z_x, z_y к $\varphi(x), \phi(y)$ соответственно при приближении к начальной кривой C.

Поскольку установление равномерной сходимости рядов (4), (9) обеспечивает существование решения задачи внутри прямоугольника R с достаточно малыми измерениями, основной своей задачей Пикар считает исследование этих рядов. Метод, избранный им с этой целью в заметке [4] для задачи (1),(2), основан не на оценке сверху модулей функций $z_n, (z_n)_x, (z_n)_y, n = 1,2,\ldots$, как в статье [3], а на совсем других соображениях, основанных на теории аналитических функций.

Обозначая, как и ранее,

$$M = \max_R \left| a(z_1)_x + b(z_1)_y + cz_1 \right|, \; k = \max(A, B, C),$$

Пикар рассматривает вспомогательную последовательность задач

$$\left.\begin{array}{c} (u_1)_{xy} = M, \\ (u_n)_{xy} = k\left((u_{n-1})_x + (u_{n-1})_y + u_{n-1}\right), n = 2,3,\ldots, \\ u_n(x, y_0) = 0, \; u_n(x_0, y) = 0, \; n = 1,2,\ldots \end{array}\right\} \qquad (11)$$

и утверждает, что в случае равномерной сходимости рядов

$$\sum_1^\infty u_n, \; \sum_1^\infty (u_n)_x, \; \sum_1^\infty (u_n)_y \qquad (12)$$

ряды (9),(16) также сходятся равномерно в силу того, что

$$|z_n| \le u_{n-1}, \; |(z_n)_x| \le (u_{n-1})_x, \; |(z_n)_y| \le (u_{n-1})_y, \; n = 2,3,\ldots.\text{[2]} \qquad (13)$$

Полагая далее

$$u_n = k^{n-1} U_n, \; n = 1,2,\ldots,$$

он переходит к новой последовательности

$$\left.\begin{array}{c} (U_1)_{xy} = M, \\ (U_n)_{xy} = \left((U_{n-1})_x + (U_{n-1})_y + U_{n-1}, \; n = 2,3,\ldots,\right) \\ U_n(x_0, y) = 0, \; U_n(x, y_0) = 0, \; n = 1,2,\ldots, \end{array}\right\} \qquad (14)$$

---

[2] У Пикара фигурирует только первое неравенство, записанное в виде $|z_n| \le |u_{n-1}|$. Знак абсолютной величины справа может быть опущен, так как на основании формулы (8) все функции $u_n, (u_n)_x, (u_n)_y$ неотрицательны. Все три неравенства при $n = 2$ доказываются непосредственно, справедливость остальных устанавливается по индукции.

которая при том же условии, а именно равномерной сходимости рядов (12), приводит к представленному рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} k^{n-1} U_n \qquad (15)$$

решению характеристической задачи

$$\left.\begin{aligned} U_{xy} &= k\left(U_x + U_y + U\right), \\ U\left(x_0, y\right) &= 0, U\left(x, y_0\right) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Если мы покажем, говорит Пикар, что решение последней есть голоморфная функция от k для любого значения k [3], равномерная сходимость рядов (12) будет установлена, так что это решение обязательно должно будет иметь форму (15).

Таким образом, Пикар намеревается доказать, что решение задачи (16) представляется рядом (15), сходящимся для всякого k, в том числе и значения $k = \max(A, B, C)$. Этот ряд, очевидно, должен допускать почленное дифференцирование, а представленная им функция, будучи подставленной в уравнение задачи (16), должна удовлетворять ему, а также аннулироваться на характеристиках. Но какое отношение имеет ряд (15) к последовательностям (14) ,(11) и рядам (12)? В самом деле, равномерная сходимость рядов (12) обеспечивает сходимость как рядов (4), (9), так и ряда (15) вместе с рядами

$$\sum_{n=1}^{\infty} k^{n-1} \left(U_n\right)_x, \ \sum_{n=1}^{\infty} k^{n-1} \left(U_n\right)_y, \qquad (17)$$

полученными при его почленном дифференцировании (здесь имеется в виду, что $k = \max(A, B, C)$). Но ведь перед Пикаром стоит в определенном смысле обратная задача. Допустим, что мы получили решение задачи (16) в виде ряда (15), где теперь k - произвольное число, а не максимальное из чисел A, B, C (Пикар даже выходит в комплексную область, считая k произвольным комплексным числом, но мы пока ограничимся предположением о его вещественности. Будут ли его члены U_1, U_n $\left(n = 2,3,...\right)$ соответствующими решениями задач (14), а функции $u_1 = U_1, u_n = k^{n-1} U_n$ - задач (11)? Ответ на вторую часть вопроса, очевидно, положителен в случае положительности ответа на первую. Что касается первой части, то рассуждениями, вполне аналогичными

[3] Пикар, очевидно, имеет здесь в виду функцию, раскладывающуюся в степенной ряд относительно k с бесконечным радиусом сходимости.

тем, какие применяются при доказательстве единственности разложения функции в степенной ряд[4], нетрудно доказать, что функции U_1, U_n обращаются в нуль при характеристиках $x = x_0, y = y_0$, функция U_1 удовлетворяет первому, а функции $U_n \ (n = 2,3,...)$ - остальным уравнениям последовательности задач (14). Но обеспечит ли это (если положить $u_1 = U_1, u_n = k^{n-1}U_n, \quad n = 2,3,...$) равномерную сходимость в R рядов (12) ? Да, но только в случае равномерной сходимости относительно $x, y \ ((x, y) \in R)$ рядов (15), (17). А можем ли мы ее гарантировать? Ведь голоморфность (по Пикару) решения задачи (16) означает сходимость, причем даже равномерную, ряда (15), представляющего решение относительно переменной k во всяком замкнутом интервале $[k_0, k_1]$ значений k для любой, но отдельно взятой точки $(x, y) \in R$. Следует ли отсюда равномерная сходимость рядов (15), (17) по x, y? В общем случае нет. Ведь даже возможность почленного дифференцирования ряда (15) по x и y, как известно, не может, вообще говоря, обеспечить равномерную сходимость рядов (17), являющуюся достаточным, но не необходимым условием почленной дифференцируемости ряда.

Таким образом, при рассмотрении задачи (16) необходимо установить не только разложимость решения в ряд (15) по степеням k (с коэффициентами, зависящими от переменных x, y), но и равномерную сходимость его, а также рядов (17) по x и y. Делается ли это у Пикара?

Литература

1. Bois Reymond P. du. Über lineare partielle Differentialgleichu-gen zweiter Ordnung. – Journ. für ... Mathem., 1889, **104**, 241 – 301.

2. Darboux G. Leçons sur la théorie générale des surfaces... Part 2, Paris, 1889, 71 – 98.

3. Picard E. Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées par-tielles et la méthode des approximations successives. – Journ. de math., 1890, (4)6, 145 – 210.

4. Picard E. Sur les méthodes d'approximations successives... – Darboux G. Leçons sur la théorie générale des surfaces... Part 4, Paris, 1896, 353 – 367.

[4] См., например, [5,стр.445].

5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2. М.: Наука, 1969, 800 с.

6. Косолапов Ю.Ф., Коленчук О.В., Манакіна І.А. Про роботи Еміля Пікара з теорії гіперболічних рівнянь з частинними похідними другого порядку. – В кн.: Наука – практика: Научн.-метод.сб. Вып. 6/ Донецк. гос.техн.ун-т.- Донецк, 2001 г., с. 206 – 210.

7. Косолапов Ю.Ф. Еміль Пікар і метод послідовних наближень у теорії гіперболічних рівнянь. – В книзі: Донецький вісник наукового товариства ім. Шевченка. Т. 2 – Донецьк: Український культурологічний центр, Східний видавничий дім.- 2002.- с. 181 – 185.