УДК 517.944(09)

# Задача Коши в работах Пикара. Часть 2: Проблема обоснования метода последовательных приближений

***Косолапов Ю.Ф.*, *Константинова А.О.*, *Хорунжая О.И.***
*Донецкий национальный технический университет*

*В статті досліджуються методи, якими Пікар доводив справедливість свого методу послідовних наближень для розв"язання задачі Коші для лінійного гіперболічного рівняння другого порядку з змінними коефіцієнтами. Матеріали статті є цікавими як для дослідників з історії математики, так і для викладачів і студентів вищих навчальних закладів, зокрема втузів.*

В настоящее время никому не нужно доказывать важность историко-математических исследований. Будучи интересными специалистам по истории математики, они не менее интересны как преподавателям математики, так и студентам. Они позволяют видеть многие важные темы, изучаемые в вузе, не только в их «застывшей», окончательной форме, но и в историческом развитии. В частности, это относится к общеизвестному методу последовательных приближений, в разработку и обоснование которого внес большой вклад выдающийся французский математик Эмиль Пикар. В нашей предыдущей статье мы изложили существо двух вариантов пикаровского метода последовательных приближений (метода итераций) для решения задачи Коши для линейного гиперболического дифференциального уравнения второго порядка и особенно того варианта, который связан с представлением решения в виде бесконечного ряда. В настоящей статье мы даем анализ доказательства Пикаром справедливости второго варианта метода последовательных приближений. Насколько нам известно, подобные вопросы еще не входили в поле зрения историков математики.

Для простоты изложения мы используем и продолжаем нумерацию формул, начатую в первой части статьи.

Предположим теперь, рассуждая вместе с Пикаром, что точка $P(x, y)$ (см. первую часть нашей статьи) находится внутри прямоугольника $R$, и, обозначая через $\alpha, \beta$ его измерения $|AB'|, |BB'|$, оценим члены ряда (9). Именно, если $M$ - максимум модуля выражения

$$a \cdot (z_1)_x + b \cdot (z_1)_y + cz_1$$

в прямоугольнике $R$, последовательно получаем

$$\left|z_n\right| < M_1 T^{n-2}, \left|\left(z_n\right)_x\right| < M_2 T^{n-2}, \left|\left(z_n\right)_y\right| < M_3 T^{n-2}, \qquad (15)$$

$$\left|a \cdot \left(z_n\right)_x + b \cdot \left(z_n\right)_y + c z_n\right| < M T^{n-1},$$

где $M_1 = M\alpha\beta, M_2 = M\beta, M_3 = M\alpha, T = A\beta + B\alpha + C\alpha\beta,$ а $n = 2,3,\ldots$. Отсюда видно, что ряд (9) и ряды

$$\sum_1^{\infty}\left(z_n\right)_x, \quad \sum_1^{\infty}\left(z_n\right)_y \qquad (16)$$

мажорируются геометрической прогрессией со знаменателем $T$, который может быть сделан меньшим единицы при достаточно малых $\alpha, \beta$. Следовательно, ряды (9),(16) сходятся, причем равномерно, в $R$ при достаточной близости точек $A$ и $B$. Функция $z$, определенная рядом (9), имеет, заключает Пикар, частные производные первого порядка, вторую производную и удовлетворяет уравнению (3) и условиям (4), (5).

Мы изложили в несколько сжатом виде метод доказательства Пикаром теоремы существования решения задачи Коши для линейного уравнения (3). Сделаем теперь несколько замечаний. Формула (10) для первого члена ряда (9) получается после учета краевых условий' (5), (4) из общего решения

$$z = f(x) + g(y)$$

уравнения (6), где $f(x), g(y)$ - произвольные функции, и устанавливает непрерывность $z_1$ в $R$. В справедливости формулы (11) можно убедиться, предполагая непрерывность функции $F(x,y)$, или прямым дифференцированием, или непосредственным решением задачи (12),(13) с помощью последовательного интегрирования, например, по $y$ и $x$, и параллельного определения произвольных элементов (двух функций от $x$, от $y$ и одной постоянной) из условий (13). При этом непрерывность функций $F(x,y)$, $y(x)$ и $x(y)$ имеет, как нетрудно показать, следствием непрерывность функции, представленной формулой (11), а поэтому, в силу формулы (14), - и непрерывность всех членов ряда (9). Существование числа $M$ обеспечивается непрерывностью в $R$ функций $a, b, c, z_1$. Оценки членов ряда (9) следуют из формулы (14), для получения же оценок модулей производных $\left(z_n\right)_x, \left(z_n\right)_y$ необходимо предварительно продифференцировать формулу (14) по $x$ и $y$, что законно по непрерывности подынтегральной функции. Равномерная сходимость рядов (16) обеспечивает почленную дифференцируемость и по $x$, и по $y$ ряда (9), равномерно сходящегося к непрерывной (в силу непрерывности всех $z_n$) функции $z$, обладающей (на основании непрерывности всех $(z_n)_x, (z_n)_y$) непрерывными производными $z_x, z_y$.

Сказанное свидетельствует о достаточной строгости большей части рассуждений Пикара, несмотря на их сжатость (в самой статье [4], а не в нашем, еще более компактном изложении).

Однако у Пикара нет доказательств существования производной $z_{xy}$ и того факта, что функция $z$ удовлетворяет уравнению (3). Следует ли это расценивать как недостаток исследования, как нестрогость на самом заключительном этапе доказательства? По-видимому, нет, так как чуть позже в другой своей работе [5] Пикар этот вопрос без ответа не оставил. Однако ни в статье [4], ни в последующих своих работах, посвященных гиперболическим уравнениям, он не касался вопросов единственности ни задачи Коши, ни характеристической задачи, за исключением краткого замечания по поводу задачи Коши для линейного уравнения (3) в заметке [6], на которой в дальнейшем мы остановимся. Суть этого замечания состоит в том, что если каким-либо мето-дом найдено явное представление решения задачи, то из него легко вытекает единственность решения.

А как быть, если явное представление решения отсутствует? Этим вопросом Пикар много занимался в процессе рассмотрения краевых задач для эллиптических уравнений и нашел несколько способов доказательства (см., например, книгу В.С. Сологуба [1]). Однако для гиперболических уравнений они неприменимы, так как в существенном основаны на эллиптичности исследуемых уравнений. Почему же Пикар не искал методов доказательства единственности в гиперболическом случае? По крайней мере никаких указаний по поводу таких поисков или их результатов нам у Пикара найти не удалось. Чем вызвано такое "пренебрежение" гиперболическими уравнениями? Наиболее естественным нам кажется предположение, что от Пикара ускользнул тот хорошо известный сейчас факт, что соответствующее доказательство легко вписывается в рамки самого метода последовательных приближений для разности двух предполагаемых решений задачи (см., например, [7, гл. 2, § 4] для характеристической задачи, [8, гл. 6, § 1 для задачи Коши). Именно так доказывал несколькими годами позже единственность решения характеристической задачи для уравнения (2) Гурса [9].

Следует отметить один "неудобный" момент в доказательстве Пикара. Как оценить размеры прямоугольника $R$ равномерной сходимости рядов, дающих искомое решение и две его первые производные? Ведь если, следуя Пикару, считать его измерения $\alpha,\beta$ переменными, то с изменением $\alpha,\beta$ меняются и максимумы модулей $A, B, C$ коэффициентов $a,b,c$. Неудобство не уменьшается, если даже принять во внимание невозрастание $A, B, C$ с уменьшением $\alpha,\beta$. Гораздо удобнее, и подобный момент был отмечен в работе Пикара [5], при рассмотрении характеристической задачи для уравнения (2), считать прямоугольник непрерывности коэффициентов $a,b,c$ неизменным, а $\alpha$ и $\beta$ считать измерениями другого, меньшего прямоугольника $R'$, например, как в работе Гурса [9], гомотетичного по отношению к $R$ с центром гомотетии $A$ и коэффициентом гомотетии $\lambda \le 1$. В этом случае оценка величин $\alpha,\beta$ не вызывает никаких затруднений:

$$A\beta + B\alpha + C\alpha\beta \le k(\alpha+\beta+\alpha\beta) < 1,\ \frac{\beta}{\alpha} = \frac{|BB'|}{|AA'|},\ \lambda = \frac{\alpha}{|AA'|},$$

где $k = \max(A,B,C)$. Более того, возникает интересный вопрос о расширении области определения решения с $R'$ на весь прямоугольник $R$, о чем вскользь упомянул в названном месте работы [5] и сам Пикар.

В теории краевых задач для уравнений с частными производными большое значение имеет выяснение вопроса о непрерывности и предельных значениях искомой функции и некоторых ее производных на границе рассматриваемой области или на начальной кривой. Применительно к задаче Коши (3) - (5) этот вопрос состоит в том, существуют ли предельные значения производных $z_x, z_y$ искомой функции при приближении в $R$ к начальной кривой и совпадают ли они с соответствующими значениями заданных на ней функций $\varphi(x)$ и $\phi(y)$. Если на начальной кривой задаются значения искомой функции и одной из ее первых производных, речь идет о предельных значениях этой производной и самой искомой функции. Заканчивая рассмотрение задачи Коши (3) - (5), Пикар частично затрагивает данный вопрос, а именно обращает внимание на непрерывность искомого решения и его первых производных «даже при переходе через кривую» [4, стр. 170] и в связи с этим подчеркивает существенное различие в постановке, а главное - разрешимости краевых задач для уравнений гиперболического и эллиптического типов. Интеграл $z$ линейного уравнения, отмечал он, вообще говоря, определен, если задаются значения $z$ и $z_x$ как не-прерывные функции на кривой $C$ (или же непрерывные значения $z_x$, $z_y$ и значение $Z$ в одной точке на $C$, как у Пикара). Но только в том случае, если кривая $C$ проведена в области вещественности характеристик[1], можно получить решение, удовлетворяющее данным условиям и непрерывное вместе с первыми производными при переходе через $C$. В случае мнимых характеристик дело обстоит иначе. В качестве примера Пикар приводит двумерное уравнение Лапласа

$$z_{xx} + z_{yy} = 0$$

и отмечает, что оно, вообще говоря, не имеет решения, непрерывного в $R$ вместе с $z_x, z_y$ и принимающего на $AB$ заданные значения

$$z_x\Big|_{y=y(x)} = \varphi(x),\ z_y\Big|_{x=x(y)} = \phi(y)$$

при только непрерывных функциях $\varphi(x), \phi(y)$. Никаких доказательств всех этих утверждений, кроме доказательства разрешимости задачи Коши, Пикар не приводит. В этом состоит недостаточная строгость его рассуждений.

Проведенный анализ показывает, что в вопросе обоснования метода последовательных приближений Пикар применял приемы, вошедшие в золотой фонд современной научной и учебной литературы. Вместе с тем мы имели возможность видеть и недостатки пикаровских исследований, в частности, недоказанность единственности решения задачи Коши, нерешенность вопросов о непрерывном примыкании значений искомой функции к заданным на начальной кривой условиям Коши.

Мы не затрагивали вопросов о методах Пикара для решения задачи Коши для квазилинейных уравнений, а также характеристической и некоторых других краевых задач для гиперболических уравнений второго порядка. В стороне оставлен также вопрос о взаимоотношениях метода последовательных приближений и активно разрабатывавшегося в то время метода Римана. Эти вопросы будут затронуты в последующих статьях.

*Литература*

1. Сологуб В.С. Развитие теории эллиптических уравнений в ХУШ и XIX столетиях. Киев: Наукова думка, 1975, 280с.

---

[1] Пикар имеет здесь в виду гиперболические уравнения.

2. Косолапов Ю.Ф., Коленчук О.В., Манакіна І.А. Про роботи Еміля Пікара з теорії гіперболічних рівнянь з частинними похідними другого порядку. – В кн.: Наука – практика: Научн.-метод.сб. Вып. 6/ Донецк. гос.техн.ун-т.- Донецк, 2001 г., с. 206 – 210.

3. Косолапов Ю.Ф. Еміль Пікар і метод послідовних наближень у теорії гіперболічних рівнянь. – В книзі: Донецький вісник наукового товариства ім. Шевченка. Т. 2 – Донецьк: Український культурологічний центр, Східний видавничий дім.- 2002.- с. 181 – 185.

4. Picard E. Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles…. – Journ. de math., 1890, (4)6, 145 – 210.

5. Picard E. Sur les méthodes d'approximations successives dans la théorie des équations différentielles. – В кн.: Darboux G. Leçons sur la théorie générale des surfaces…Part 4, Paris, 1896, 353 –367.

6. Picard E. Sur les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. – Bull. sci. math., 1899, (2)23, 150 – 153.

7. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966, 724 с.

8. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970, 710 с.

9. Goursat E. Sur un problème relatif à la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre (second mémoire). – Annales de la Fac. de Toulouse, 1904, (2)6, 117 – 144.