УДК 517.944(09)

Задача Коши в работах Пикара

Косолапов Ю.Ф., Константинова А.О., Хорунжая О.И.
Донецкий национальный технический университет

В статті розглядаються два варіанти методу послідовних наближень, або методу ітерацій, для розв”язання задачі Коші для лінійного гіперболічного рівняння другого порядку, запропонованих в роботах видатного французького математика Еміля Пікара. Матеріали статті є цікавими не тільки для істориків математики, але й для викладачів і студентів вищих навчальних закладів, зокрема втузів.

Творчество известного французского математика Эмиля Пикара (1856-1941) по теории уравнений с частными производными справедливо привлекает историков математики. О влиянии его работ в этой области свидетельствует хотя бы тот факт, что изыскания многих математиков конца XIX - начала XX веков, даже столь крупных, как Ж.Адамар, пестрили ссылками на Пикара, продолжали начатые им исследования. Имя Пикара носит известный метод последовательных приближений, ныне фигурирующий во всех учебниках по дифференциальным уравнениям, как обыкновенным, так и в частных производных, и мы считаем это совершенно справедливым, несмотря даже на то, что не Пикар является его первооткрывателем.

В современной историко-математической литературе довольно подробно изучены исследования Пикара по теории обыкновенных дифференциальных уравнений [2], по эллиптическим уравнениям с частными производными, например, в цикле работ В.С.Сологуба, в том числе его книге [1]. В то же время его вклад в теорию гиперболических уравнений известен в меньшей степени и, если не считать кратких упоминаний в отдельных работах, сведения по данному вопросу ограничиваются несколькими итоговыми формулировками в обзоре [5] , носящем чисто энциклопедический, но отнюдь не историко-математический характер.

В серии статей мы рассмотрим работы Пикара по теории задачи Коши, характеристической задачи и задач со значениями искомой функции на двух прямых для линейных и квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными. Гиперболические уравнения с большим количеством независимых переменных в круг исследований Пикара не входили.

Одним из основных методов доказательства Пикаром теорем существование решений краевых задач как для эллиптических, так и для гиперболических уравнений последовательных приближений, или метод итераций. До Пикара он применялся в теории возмущений в астрономии для численного решения алгебраических уравнений в физике [5], в работах Коши, посвященных дифференциальным уравнениям в частных производных (например, [6]), в исследованиях Лиувилля [7-9] по теории задачи Штурма-Лиувилля для обыкновенных дифференциальных уравнений. Большое распространение получил он в изысканиях по теории потенциала (работы Морфи [10], Бера [11, 12], Шварца [13], серия исследований Карла Неймана по теории краевых задач для уравнения Лапласа [1]).

Идея метода последовательных приближений "в форме Пикара" формулируется Пикаром в статье [14] для уравнений

$$Lz \equiv Az_{xx} + 2Bz_{xy} + Cz_{yy} = F(x, y, z, z_x, z_y) \qquad (1)$$

где A, B, C - коэффициенты, зависящие от x, y.

Пусть заданы уравнение (1) и те или иные граничные условия. Исходя из произвольной.функции $z_1(x, y)$, последовательно ищут решения $z_n(x, y)$ уравнений

$$Lz_n = F(x, y, (z_{n-1})_x, (z_{n-1})_y), \quad n = 2,3,...,$$

удовлетворяющие заданным граничным условиям. Последние предполагаются достаточными для полного определения решения. Если решение $z_n(x, y)$ при $n \to \infty$ стремится к определенному пределу $z(x, y)$, получают, таким образом, решение поставленной задачи.

Конечно, и Пикар это подчеркивает, подобные общие рассмотрения могут представлять интерес, если уточнены граничные условия и если выполнены условия сходимости последовательных приближений к искомому решению. В дальнейшем он четко различает случаи эллиптичности $(B^2 - AC < 0)$ и гиперболичности $(B^2 - AC > 0)$ уравнения (1) и подвергает исследованию соответствующие канонические формы. Таким образом, гиперболическое уравнение фигурирует у Пикара в следующем виде

$$z_{xy} = F(x, y, z, z_x, z_y), \qquad (2)$$

т.е. в виде, разрешенном относительно смешанной производной второго порядка от исковой функции. Особенно много занимается он линейным уравнением, т.е. уравнением

$$z_{xy} = az_x + bz_y + cz \qquad (3)$$

(a, b, c - известные функции независимых переменных x, y). Для уравнений (2), (3) его интересуют задача Коши и характеристическая задача, а для линейного уравнения (3) - еще и задача с известными значениями искомой функции на двух прямых, проходящих через начало координат, причем, как правило, одной из прямых служит характеристика уравнения. Представляет интерес также решение Пикаром задачи Коши для частного случая уравнения (3) - так называемого телеграфного уравнения - методом Римана.

Отметим, что термины "эллиптическое", "гиперболическое" уравнения в статье [14] Пикара отсутствуют, а появляются позже, например, в заметке [15], опубликованной в 1896г.

Вполне вероятно, что к моменту написания и издания статьи Пикар еще не был знаком с работой Дюбуа Реймона [16] , где впервые появилась соответствующая терминология. Косвенным подтверждением этому может служить, например, тот факт, что Пикар [14] упоминает о методе Римана, давая высокую оценку Дарбу, по мнению Пикара, осуществившему [17], согласно "идее Римана", сведение задачи Коши для уравнения (3) к характеристической задаче для сопряженного уравнения, но ни единым словом не упоминает о соответствующих результатах Дюбуа Реймона, а также о дюбуареймоновской классификации линейных уравнений с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными.

Задача Коши для линейного уравнения (3) впервые появляется у Пикара в 1890 г. в большой статье [14], посвященной краевым задачам для эллиптических и гиперболических уравнений. В качестве данных Коши он берет значения первых производных искомой функции вдоль некоторой дуги AB произвольной нехарактеристической кривой C (рис. 1) и значение самой функции в точке $A_0(x_0, y_0) \in C$,

$$z(x_0, y_0) = z_0, \qquad (4)$$

справедливо полагая, что такой выбор равносилен обычному заданию на C значений искомой функции и одной из ее первых производных.

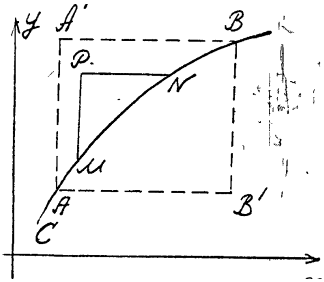

Рис. 1.

Начальную кривую, условия Коши и коэффициенты уравнения онподчиняет определенным условиям. Перечислим их, несколько усовер-шенствовав терминологию Пикара, но не изменяя, конечно, ее существа.

а) Кривая С должна быть представимой каждым из двух уравнений $y = y(x), x = x(y)$ с непрерывными и монотонными функциями $y(x), x(y)$.

б) Заданные на AB значения производных z_x, z_y должны выражаться непрерывными функциями, а именно:

$$z_x\Big|_{y=y(x)} = \varphi(x) \in C[x_0, x_B], \quad z_y\Big|_{x=x(y)} = \phi(y) \in C[y_0, y_B] \qquad (5)$$

в) Коэффициенты a, b, c уравнения (3) непрерывны в характеристическом прямоугольнике $AB'BA'$ (будем обозначать его R), образованном парами характеристик $x = x_0, y = y_0; x = x_B, y = y_B$, исходящих из точек A, B.

Следует отметить, что непрерывность функций a, b, c Пикар явно не оговаривает, хотя делает это позже в той же работе при рассмотрении другой задачи - характеристической. Несомненно, что и в случае задачи Коши он имеет в виду непрерывность. Так, в ходе рассуждений он вводит обозначения A, B, C для максимумов модулей функций a, b, c в R, совершенно не сомневаясь в возможности этого, что вполне естественно при наличии предположения $a \in C(R), b \in C(R), c \in C(R)$, обеспечивающего и ограниченность, и интегрируемость a, b, c, а также законность фигурирующего ниже предельного перехода под знаком интеграла, завершающего доказательство. Существование максимумов модулей функций a, b, c в прямоугольнике R обеспечивается не только их непрерывностью в прямоугольнике, но и замкнутостью самого прямоугольника. И хотя Пикар по этому поводу не говорит ничего, мы будем иметь в виду замкнутость прямоугольника.

При сделанных предположениях и при достаточной близости точки $B \in C$ к точке A задача (3) - (5) имеет, по Пикару, решение, к которому стремится n-е приближение $z_n(x, y)$.

Доказательство разрешимости задачи Коши ведется у Пикара по несколько измененному плану, когда в основу рассуждений кладется исследование сходимости не функциональной последовательности, а функционального ряда. Именно, заданным краевым условиям (4), (5) подчиняется только начальное приближение $z_1(x, y)$, которое предполагается решением уравнения

$$z_{xy} = 0\,, \qquad (6)$$

то-есть функция $z_1(x, y)$ предполагается решением задачи (6), (4),(5). Последующие функции z_n определяются как решения задач

$$(z_n)_{xy} = a(z_{n-1})_x + b(z_{n-1})_y + cz_{n-1}\,, \qquad (7)$$

$$z_n(x_0, y_0) = 0,\ (z_n)_x\Big|_{y=y(x)} = 0,\ (z_n)_y\Big|_{x=x(y)} = 0,\ n = 2,3,\ldots \qquad (8)$$

с нулевыми (однородными) граничными условиями. Искомое решение задачи (3) - (5) определяется как сумма ряда

$$z = z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots\,. \qquad (9)$$

Утверждается, что ряд (9) и ряды, получающиеся при его однократном дифференцировании по x и y, сходятся в прямоугольнике R и что сумма z ряда (9) обладает обеими первыми и второй смешанной производной, являясь решением исходной задачи Коши. В дальнейшем мы увидим, что под сходимостью рядов здесь понимается равномерная сходимость (с использованием термина „ равномерная сходимость “), например, в заметке [15], опубликованной вскоре после выхода в свет рассматриваемой статьи.

Решение задачи (6), (4), (5) дается формулой

$$z = z_0 + \int_{x_0}^{x} \varphi(\xi)d\xi + \int_{y_0}^{y} \phi(\eta)d\eta \qquad (10)$$

Формулы, дающие решения последующих задач, получаются немедленно на основании того замечания, что функция, представленная формулой

$$z(x, y) = \iint_{MNP} F(\xi, \eta)d\xi d\eta\,, \qquad (11)$$

где двойной интеграл берется по криволинейному треугольнику, ограниченному кривой C и двумя характеристиками $\xi = x, \eta = y$, исходящими из произвольной точки $P(x, y)$ прямоугольника R (рис. 1), является решением задачи

$$z_{xy} = F(x, y), \qquad (12)$$

$$z_x \Big|_{y=y(x)} = 0,\ z_y \Big|_{x=x(y)} = 0,\ z(x_0, y_0) = 0. \qquad (13)$$

В силу замечания для решений $z_n(x, y)$ задач (7), (8) имеем:

$$z_n(x, y) = \iint\limits_{MNP} (a(\xi,\eta)(z_{n-1})_\xi + b(\xi,\eta)(z_{n-1})_\eta + c(\xi,\eta)z_{n-1})d\xi d\eta \qquad (14)$$

При этом, как нетрудно доказать, условия, которые должны быть наложены на функцию $F(x, y)$ для справедливости формулы (11), в случае уравнений (7) полностью выполняются при непрерывных функциях $a, b, c,\ z_{n-1}$ в прямоугольнике R .

Таким образом, для решения задачи Коши для линейного гиперболического уравнения второго порядка с переменными коэффициентами Пикаром предложено два варианта метода последовательных приближений, из которых предпочтение отдано методу, приводящем к представлению решения в виде ряда. Этот момент пикаровских исследований интересен не только для истории математики, но и для методики преподавания математики в вузе, в том числе во втузе.

Представляют огромный интерес методы обоснования предложенного Пикаром метода последовательных приближений. Об этом будет идти речь в следующей статье.

Литература

1. Сологуб В.С. Развитие теории эллиптических уравнений в XVIII и XIX столетиях. Киев: Наукова думка, 1975, 280 с.
2. Демидов С.С. (при участии Петровой С.С. и Симонова Н.И.). Обыкновенные дифференциальные уравнения. – В кн.: Математика XIX века. Чебышевское направление в теории функций. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Вариационное исчисление. Теория конечных разностей. – М.: Наука, 1987. – с. 80 – 183.
3. Косолапов Ю.Ф., Коленчук О.В., Манакіна І.А. Про роботи Еміля Пікара з теорії гіперболічних рівнянь з частинними похідними другого порядку. – В кн.: Наука – практика: Научн.-метод.сб. Вип. 6/ Донецк. гос.техн.ун-т.- Донецк, 2001 г., с. 206 – 210.
4. Косолапов Ю.Ф. Еміль Пікар і метод послідовних наближень у теорії гіперболічних рівнянь. – В книзі: Донецький вісник наукового товариства ім.

Шевченка. Т. 2 – Донецьк: Український культурологічний центр, Східний видавничий дім.- 2002.- с. 181 – 185.

5. Sommerfeld A. Randwertaufgaben in der Theorie der partiellen Differential-gleichungen. -Encyklop. der mathem. Wissensch. Bd. 2, Heft 4, Leipzig, 1900, 504 – 570.

6. Cauchy A.L. Sur l'intégration des systèmes d'équations différentielles.- C.R., 1840, **10**, 957-949; **11**, 1-12.

7. Liouville J. Mémoire sur le développement des fonctions…- Journ.de math., 1836, **1**, 253 – 265.

8. Liouville J. Second mémoire sur le développement des fonctions…- ib., 1837, **2**, 16 – 35.

9. Liouville J. Sur le condition de convergence d'une classe général de séries. – ib., 1840, **5**, 356 – 359.

10. Murphy R. Elementary principles of the theories of electricity, heat and molecular actions. – Cambridge, 1833, 170 p.

11. Beer A. Allgemeine Methode zur Bestimmung der elektrischen und magnetischen Induktion. – Poggend. Annalen, 1856, **98**, 137 – 142.

12. Beer A. Einleitung in die Elektrostatik, die Lehre von Magnetismus und die Elektrodynamik. – Braunschweig, 1865, 240 p.

13. Schwarz H.A. Über ein die Flächen kleinsten Flächeninhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung. – Gesam. mathem. Abhandl., Bd. 1, Berlin, 1890, 223 – 269.

14. Picard E. Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles…. – Journ. de math., 1890, (4)6, 145 – 210.

15. Picard E. Sur les méthodes d'approximations successives dans la théorie des équations différentielles. – В кн.: Darboux G. Leçons sur la théorie générale des surfaces…Part 4, Paris, 1896, 353 –367.

16. Bois-Reymond P. du. Über lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung. – Journ. für…Mathem., 1889, **104**, 241 – 301.

17. Darboux G. Leçons sur la théorie générale des surfaces…Part 2, Paris, 1889, 71–98.