УДК 65.01

Математическая модель описания риска

Откидач В. В., Зубченко А. К., Иванова Л. И.
Донецкий национальный технический университет

Опираясь на теоретико-вероятностный подход и формальную структуру принятия решений, разработана математическая модель описания риска. Показано, что для оценки риска травматизма можно использовать распределение Пуассона.

Любая сфера человеческой деятельности, связана с принятием решений в условиях неполноты информации. Неполнота информации создает неопределенность. В зависимости от степени определенности возможных исходов или последствий различных действий, с которыми сталкивается лицо, принимающее решение, в теории принятия решений рассматриваются три типа моделей выбора решений:

-выбор решений в условиях определенности, если относительно каждого действия известно, что оно обязательно приводит к некоторому конкретному исходу;

-выбор решения в условиях риска, т.е. если каждое действие приводит к одному из множеств возможных частных исходов, причем каждый исход имеет вычисляемую или экспертною оцениваемую вероятность, известную лицу, принимающему решение;

-выбор решений в условиях неопределенности, т. е. то или иное действие или действия имеют своим следствием множество частных исходов, но их вероятности совершенно не известны или не имеют смысла.

Различают неопределенности статистические и нестатистические. При статистической неопределенности вероятность наступления неблагоприятных событий определяют через относительную частоту. В случае нестатистической неопределенности вероятность наступление неблагоприятных событий определяют как субъективную вероятность, характеризирующая степень убежденности лица, принимающего решение, в наступлении события.

Таким образом, центральную роль в рассмотрении проблемы принятия решений играет понятие риска и его оценка, при этом следует отметить, что риск возможен только в том случае, если имеется неопределенность, то есть отсутствует исчерпывающая информация об условиях принятия решений или отсутствие однозначности условий функционирование системы.

Опираясь на теоретико-вероятностный подход и формальную структуру принятия решений, разработаем математическую модель количественного описания риска. Для чего принимаем, что формально структура принятия решения представляет собой выбор одного из некоторого множества рассматриваемых вариантов: $E_i \in E$. Каждым вариантом E_i однозначно определяется некоторый результат e_i. Каждому допустимому варианту решения E_i, вследствие различных внешних условий, могут соответствовать различные внешние состояния V_j и результаты решений e_{ij}. Под результатом решения e_{ij} следует понимать оценку, соответствующую варианту E_i, условиям V_j и характеризующую экономический эффект, полезность или оценка риска и т.д. Обычно такой результат будем называть полезность решения.

Формальная основная структура принятия решений описывается некоторой матрицей решений $\left\| e_{ij} \right\|$:

Матрица решений

	V_1	V_2	V_3	$\cdots$	V_j	$\cdots$	V_n
E_1	e_{11}	e_{12}	e_{13}	$\cdots$	e_{ij}	$\cdots$	e_{1n}
E_2	e_{21}	e_{22}	e_{23}	$\cdots$	e_{2j}	$\cdots$	e_{2n}
E_3	e_{31}	e_{32}	e_{33}	$\cdots$	e_{3j}	$\cdots$	e_{3n}
…	…	…	…	…	…	…	…
E_i	e_{i1}	e_{i2}	e_{i3}	$\cdots$	e_{ij}	$\cdots$	e_{in}
…	…	…	…	…	…	…	…
E_m	e_{m1}	e_{m2}	e_{m3}	$\cdots$	e_{mj}	$\cdots$	e_{mn}

В соответствии с требованиями современной науки будем давать понятию риска различные, но непременно количественные определения. В первую очередь это относится к тем ситуациям, в которых принимаемые решения неизбежно связаны с риском. Считая, что риск включает неуверенность, произойдет или не произойдет нежелательное событие и возникнет ли неблагоприятное событие, тогда такой недостаток информации роднит риск с принятием решений в условиях недетерминированных параметров.

Формально количественное описание риска опирается на теоретико-вероятностный подход. Заметим, что в конкретной теоретико-вероятностной задаче среди допускаемых к рассмотрению событий - это случайные события, а для риска это нежелательные (неблагоприятные) события.

Пусть имеется множество E возможных рассматриваемых вариантов $E_1, E_2, ..., E_m$ принятия решений, т.е. $E_i \in E, i = 1,2,..., m.$

Выбор оптимального варианта - это принятие одного из решений множества: $E_i \in E(i = \overline{1,m})$. Каждому допустимому варианту принятия решения E_i, вследствие различных внешних условий, соответствует множество событий (благоприятных и неблагоприятных).

Пусть путем анализа рассматриваемых вариантов принятия решений составлено множество Ω всех возможных неблагоприятных событий ω_i:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}. \qquad (1)$$

При осуществление неблагоприятных событий, принятие решения, как указывалось выше, связано с риском.

В общем случае в определенной конкретной ситуации могут одновременно наступить многие из этих событий. Каждое мыслимое сочетание таких событий обозначим F, т. е. в пространстве Ω выделяется система F подмножеств множества Ω. Пространства Ω и система F определяются конкретной областью приложения. Считаем, что к множеству всех возможных сочетаний F принадлежит само множество Ω и пустое множество 0, которое соответствует отсутствию неблагоприятных событий.

Таким образом, определенное сочетание F является подмножеством неблагоприятных событий множества Ω:

$$F = \{\omega_{f1}, \omega_{f2}, ..., \omega_{fk}\}; \quad \omega_{fk} \in \Omega.. \qquad (2)$$

Такой подход к понятию множества всех сочетаний позволяет выполнять в нем обычные операции алгебры множеств.

Пусть с некоторым рискованным вариантом принятия решения E_i связаны элементарные сочетания неблагоприятных событий $A_{i1}, A_{i2}, ..., A_{ik_i}$ и событие B_i, гарантирующее отсутствие неблагоприятных событий для рискованного данного варианта. Под понятием «элементарные сочетания неблагоприятных событий» будем понимать, что никакое собственное подмножество сочетаний A_{ij} не может само встречаться как сочетание неблагоприятных событий. Тогда сочетание $\overline{A}_i = \{A_{i1}, ..., A_{ik_i}, B_i\}$образует полную систему событий связанную с вариантом принятия решения E_i.

Если положить, что каждому сочетанию неблагоприятных событий $A_{ij}\,(j = 1,2,...,k_i)$, можно приписать вероятности $p_i(A_{ij})$, где $0 \le p_i(A_{ij}) \le 1$, а событию B_i вероятности $p_i(B_i)$.Тогда:

$$\sum_{j=1}^{k_i} p_i\left(A_{ij}\right) + p_i\left(B_i\right) = 1. \qquad (3)$$

Предположим, что каждому сочетанию A_{ij} может быть поставлено в соответствии количественно описываемое последствие C_{ij}, то величина риска, сопутствующего решению E_{ij}, определяется зависимостью:

$$R_i = \sum_{j=1}^{k_i} C_{ij} \cdot p_j\left(A_{ij}\right). \qquad (4)$$

Если все вероятности реализации сочетания неблагоприятных событий $A_{ij} \in \overline{A}_i$ принятия решения E_i одинаковы, то величина риска описывается зависимостью:

$$R_i = p_i \cdot \sum_{j=1}^{k_i} C_{ij}. \qquad (5)$$

Особые проблемы ставят случаи, когда опасность грозит и материальным ценностям, и людям одновременно, и желательно меру такого риска сравнить с другими рисками. Предположим, что каждому сочетанию неблагоприятных событий A_{ij} может быть поставлено в соответствии количественно описываемое последствие C_{ij}, а мерой возможности их наступления есть вероятность p_{ij}. Если риск R_i и параметры $C_{ij,}$, p_{ij} выразить в векторной форме с различными единицами измерения по координатным осям, тогда риск описывается зависимостью:

$$\vec{R} = \vec{C} \cdot \vec{p} \qquad (6)$$

Когда последствия нельзя выразить в экономических категориях, или экономические соображения играют подчиненную роль и факторы не поддаются оценке, или под риском понимают просто вероятность наступления определенного сочетания неблагоприятных событий $A_0 \in \overline{A}_i$, тогда при использовании функции – индикатора [1] , определяемой условиями

$$\mathrm{I}_0\left(A_j\right) = \begin{cases} 1, при. A_j = A_0 \\ 0, при A_j \neq A_0 \end{cases} \quad A_j \in \overline{A}_i, \qquad (7)$$

для $C_{ij} = \mathrm{I}_0\left(A_j\right)$, в соответствии с (7), величина риска опишется функциональной зависимостью:

$$R_i = p_i\left(A_0\right). \qquad (8)$$

Такой подход особенно целесообразен, когда не даны последствия C_{i0} риска для E_i и A_0.

Таким образом, величина риска R_i представляет среднюю величину ущерба при принятии варианта решения E_i. При этом в рамках конкретной практической задачи множество допустимых вариантов решения может быть дополнительно ограничено пределами риска.

Определенный интерес представляет модель описания риска системы «человек-производство». Каждый человек на производстве всегда подвергается различным опасностям, что зачастую приводит к несчастным случаям.

В настоящее время практически общепринятой шкалой для количественного измерения опасностей является шкала, в которой в качестве единиц измерения используются единицы риска[2,4].

Анализ производственного травматизма показывает, что несчастные случаи наступают один за другим в случайные моменты времени. Их можно представлять, как последовательность однородных случайных событий. Вероятность, что произойдут несчастные случаи в любой промежуток времени, не зависит от того, произошли или не произошли несчастные случаи до начала рассматриваемого момента времени [3]. Появление двух или более несчастных случаев за малый промежуток времени практически невозможно. Вероятность появления более одного несчастного случая за малый промежуток времени пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью появления только одного несчастного случая. Вероятность появления **к** несчастных случаев за промежуток времени ***t*** есть функция **к** и ***t*.** При этом можно считать, что в одинаковом по длине временном интервале среднее число происходящих случаев производственного травматизма будет одним и тем же, независимо от расположения интервалов на временной оси. Следовательно, процесс возникновения несчастных случаев с достаточной для практики точностью можно принять стационарным.

Если обозначить λ^* интенсивность появление несчастного случая, то вероятность появления одного несчастного случая в малом интервале времени dt равна $\lambda^* dt$ при условии, что интервал времени dt берется настолько малым, что вероятность появления в этом интервале двух или большего числа случаев пренебрежимо мала. Вероятность $P(k, t+dt)$ появления в произвольном интервале времени $t+dt$ ровно k несчастных случаев равна сумме вероятностей для следующих двух взаимно исключающих событий:

1. К моменту времени t с вероятностью $P(k,t)$ происходят k несчастных случаев, а в промежутке времени dt не происходит ни одного несчастного случая и вероятность этого события равна $1-\lambda^* dt$.

Вследствие независимости этих двух событий вероятность их совместного появления равна $(1-\lambda^* dt)P(k,t)$.

2. К моменту времени t с вероятностью $P(k-1,t)$ происходят $k-1$ событий, в промежутке времени dt с вероятностью $\lambda^* dt$ происходит одно событие, т. е. один несчастный случай. Вследствие независимости этих двух событий вероятность их совместного появления равна $P(k-1,t)\cdot\lambda^* dt$.

Таким образом: $P(k,t+dt)=(1-\lambda^* dt)P(k,t)+\lambda^* P(k-1,t)dt$, откуда следует, что

$$\frac{P(k,t+dt)-P(k,t)}{dt}=\lambda^*[P(k-1,t)-P(k,t)].$$

Полагая, что $dt\to 0$, получаем

$$\frac{dP(k,t)}{dt}=\lambda^*[P(k-1,t)-P(k,t)]. \qquad (18)$$

При $k=0$, следует $\dfrac{dP(0,t)}{dt}=-\lambda^* P(0,t)$, так как $P(-1,t)\equiv 0$. (19)

Решение дифференциального уравнения (19), при граничном условии $P(0,0)=1$, имеет вид: $P(0,t)=e^{-\lambda^* t}$.

Аналогично, при граничном условии $P(1,0)=0$, решением уравнения (18) $\dfrac{dP(1,t)}{dt}=\lambda^*[P(0,t)-P(1,t)]=\lambda^*\left[e^{-\lambda^* t}-P(1,t)\right]$ является $P(1,t)=\lambda^* t e^{-\lambda^* t}$.

Продолжая этот процесс, находим, что

$$P(k,t)=\frac{(\lambda^* t)^k e^{-\lambda^* t}}{k!}. \qquad (20)$$

Полагая, $\lambda^* t=\lambda$, получаем пуассоновского распределения

$$F(k,\lambda)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}. \qquad (21)$$

Вероятность того, что за время **t** произойдет не более **m** несчастных случаев, определяется функцией распределения

$$F(m,t)=e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{m}\frac{(t\lambda)^k}{k!}. \qquad (22)$$

Для инженерной практики представляет интерес закон распределения интервала времени Т между двумя соседними несчастными случаями на производстве. В качестве оценки применяется вероятность того, что в контролируемом интервале времени человек получит травму. Тогда распределение интервала времени Т между любыми двумя последовательными несчастными случаями является потоком Пальма. Действительно, возьмем на оси времени начальную точку отсчета и совместим ее с моментом появления произвольного несчастного случая. Найдем сначала функцию распределения *F(t)* случайной величины Т. По определению:

$$F(t) = P\{T < t\}. \qquad (23)$$

Для выполнения данного условия надо, чтобы интервал Т принял значение меньше чем t, а на участке времени длиной t появился хотя бы один несчастный случай.

Число несчастных случаев X(t) , попадающих на интервал t, распределяется по закону Пуассону:

$$P\{X(t)=k\}=(t\lambda)^k\frac{e^{-t\lambda}}{k!},\ \left(k=0,1,2,...m\right) \qquad (24)$$

Вероятность того, что несчастный случай не произошел за период времени Т:

$$P\{T>t\}=P\{X(t)=0\}=e^{-\lambda t}. \qquad (25)$$

С другой стороны, вероятность того, что хотя бы один несчастный случай произошел на отрезке времени Т, равна:

$$P\{T<t\}=1-P\{T>t\}=1-e^{-\lambda t} \qquad (26)$$

Тогда функция распределения интервала времениТ, между соседними несчастными случаями, равна $F(t)=1-e^{-\lambda t}$ (t >0) и представляет показательное распределение с плотностью распределения $f(t)=\lambda te^{-\lambda t}$.То есть интервалы времени между соседними несчастными случаями распределены по показательному закону.

Таким образом, для оценки риска принимается вероятность того, что в контролируемом интервале времени (распределение Пуассона) человек получит травму. Для применения распределения Пуассона, при оценке риска, необходимо вычислить параметр λ. Для чего используются статистические данные на рассматриваемом предприятии за определенный период времени Т (год, несколько лет). Принимается (месяц, декада) квантования случайной величины k_i. Делается выборка числа несчастных случаев непосредственно из актов Н-1. Получают число определенных периодов n_i с различным количеством несчастных случаев.

Так, n_0 – число периодов, в которых не было несчастных случаев; n_1 – число периодов, в которых произошел один несчастный случай и т. д.

Тогда общее число периодов (интервалов): $n = n_0 + n_1 + \cdots + n_k$, а сумма $1 \cdot n_0 + 2 \cdot n_1 + \cdots + k \cdot n_k$ равна числу несчастных случаев, происшедших за время Т. Затем вычисляется среднее арифметическое квантованной случайной величины k_i: $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i \cdot n_i}{n}$, (27), выборочная

дисперсия $$D^* = \frac{\sum_{i-1}^{n} n_i (k_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} n_i - 1}. \qquad (28)$$

В качестве оценки параметра λ в распределении Пуассона принимается выборочная средняя $\bar{x}$, т. е. $\lambda = \bar{x}$ и закон Пуассона принимает вид

$$P(k, \bar{x}) = (\bar{x})^k \frac{e^{-\bar{x}}}{k!}. \qquad (29)$$

Положив $k = 0,1,\ldots,m$, находят вероятности P_k появления k несчастных случаев.

Таким образом, в случае угрозы людям зависимость (31) принимается за функцию риска:

$$R_л = P(k, \bar{x}) = (\bar{x})^k \frac{e^{-\bar{x}}}{k!}. \qquad (30)$$

Литература

1. Мушик Э., Мюллер П. Методы принятия технических решений: Пер. с нем. – М.: Мир, 1990. – 208с., ил

2. Русак О. Н., Малаян К. Р., Занько Н. Г. Безопасность жизнедеятельности: Учебное пособие. 3-е изд., испр. и доп. / Под ред. О. Н. Русака. – СПб. : Издательство «Лань» , 2000. –448 с., ил.

3. Откидач В.В., Темнохуд В.А., Нестеренко А.Н. Вероятностный подход к оценке производственного травматизма. Наука – практика: Научн. – метод. сб. Вып. 3/Ред. Кол.: В.В. Пак, Е.И. Казакова, Л.П. Мироненко и др. – Донецк: ДонГТУ,1998. – С. 133-137.

4. Човушян Э. О., Сидоров М, А. Управление риском и устойчивое развитие. Учебное пособие для экономических вузов. – М.: Издательство РЭА имени Г. В. Плеханова, 1999. – 528 с.