УДК 517.3

Универсальное свойство кривых третьего порядка

И.К. Локтионов, Т.С. Шевченко

Донецкий национальный технический университет

Для кривых третьего порядка простейшими методами установлено универсальное свойство, связанное с наличием у этих кривых центра симметрии.

Рассмотрим кривую 3-го порядка, задаваемую уравнением

$$y=\frac{1}{6}ax^3+\frac{1}{2}bx^2+cx+d \tag{1}$$

и покажем, что любая прямая, проходящая через точку перегиба кривой (1) и пересекающая её график в двух других точках $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$, отсекает от неё фигуры равных площадей, и что, касательные, проведенные к этой кривой в точках $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$ имеют одинаковый наклон.

Найдем координаты точки перегиба $P(x_0,y_0)$ функции (1) из условия $y''=0$

$$x_0=-\frac{b}{a},\qquad y_0=\frac{5b^3-abc+6a^2d}{6a^2}$$

(2)

и введём новую систему координат UpV, начало которой расположено в точке $P(x_0,y_0)$, а направление осей совпадает с направлением осей старой системы XoY. Как известно, связь между координатами точки в новой и старой системах устанавливается формулами

$$x=u+x_0,\qquad y=v+y_0. \tag{3}$$

Запишем теперь уравнение кривой (1), используя формулы (3)

$$v=\frac{a}{6}u^3+y'(x_0)\cdot u, \tag{4}$$

где $y'(x_0) = ax_0^2/2 + bx_0 + c$ (очевидно, в частном случае, когда $y'(x_0) = 0$ уравнение (4) принимает более простой вид $v = au^3/6$). Поскольку функция (4) является нечетной, то любая прямая, которая проходит через точку перегиба $P(x_0, y_0)$ и пересекает её график любых других точках, отсекает от неё лунки одинаковых площадей.

Вычислим, наконец, угловые коэффициенты касательных к кривой (4) в точках M_1, M_2. Предварительно заметим, что координаты этих точек, в силу нечетности (4), связаны соотношениями $u_1 = -u_2$, $v_1 = -v_2$, а точка P является серединой отрезка M_1M_2. Угловой коэффициент касательной к кривой (4) равен

$$k = \frac{a}{2}u^2 + y'(x_0) \tag{5}$$

и зависит от u чётным образом, а это означает, что $k(M_1) = k(M_2)$, т.е. касательные к кривой (4) в точках M_1, M_2 параллельны.

В заключение отметим, что в случае когда $y'(x_0) = 0$, корень x_c уравнения

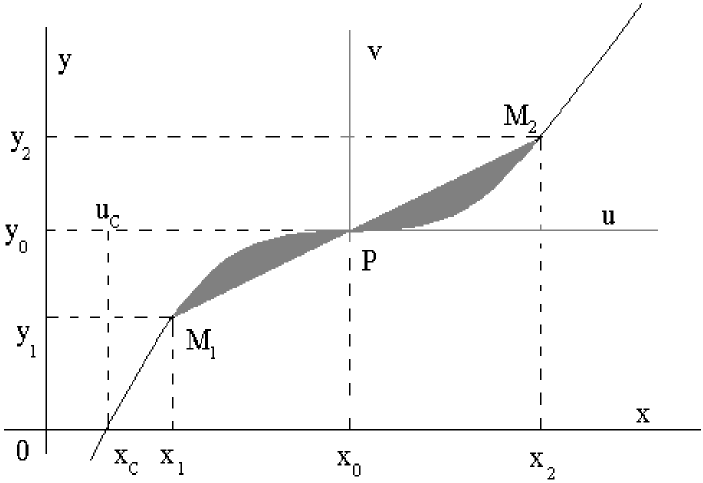
$$\frac{1}{6}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 + cx + d = 0$$

может быть легко найден. В системе UpV этому уравнению соответствует уравнение

$$v_c = \frac{a}{6}u_c^3,$$

где $u_c = x_c - x_0$, $v_c = -y_0$. Из последнего равенства находим корень x_c

$$x_c = x_0 - \sqrt[3]{\frac{6y_0}{a}}.$$



Литература

1. Курош В.И. Курс высшей алгебры. М., Наука. 1973. - 455 с.

УДК 622.831:599.3

Решение одной смешанной модельной сдвиговой задачи для полуплоскости

Онопчук Б.Н.

Донецкий национальный технический университет

В роботі розглянута модельна змішана задача для півплощини. Показано що в околі x = +l виникають розтягуючи напруження, які можуть привести до виникнення перпендикулярних до границі площини тріщин.

Для горных специальностей важной является проблема определения давления в горном массиве. Такие задачи эффективно решаются с использованием теории функции комплексного переменного. В курсе высшей математике, читаемом в техническом вузе, вопрос о нахождении аналитической функции по значениям ее на границе рассматривается в объеме интегральной формулы Коши. Ниже рассмотрен один важный случай определения аналитической функции в области Imz>0 по значениям на границе полуплоскости с помощью формулы Келдыша-Седова. Этот подход дает возможность показать студентам горных специальностей наглядный и эффективный метод решения ряда задач геомеханики.

Пусть упругое изотропное тело занимает верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z \geq 0$;

Начало прямоугольной системы XOY поместим в некоторой точке 0 границы полуплоскости так, чтобы ось OX совпала с границей исследуемого тела. Границу области обозначим через L. Пусть L=L'+L", где $L'=\sum_{K=1}^{n} L'_K$, и $L''=\sum_{K=1}^{n} L''_K$,

$$L''_K=(a_K, b_K),$$

$$L''=(b_k, a_{k+1}),\ a_{n+1}=a_1.$$

Причём , проходя ось в положительном направлении, встречаем указанные точки в последовательности a_1, b_1, a_2, b_2, …, a_n, b_n.

Пусть на границе известны нормальные напряжения

$$\sigma_y = \rho(x), x \in L \tag{1.1}$$

На части L' действуют касательные напряжения

$$\tau_{xy} = \varphi(x), x \in L' \tag{1.2}$$

а на другой части границы L" известны горизонтальные смещения

$$u^+ = u(x), x \in L'' \tag{1.3}$$

Считаем , что функция $\rho(x)$, $\varphi(x)$, $u(x)$ удовлетворяют краевой задаче /1/. Используя граничные условия (1.1-1.3) и комплексное представление компонент напряжений и компонент вектора перемещений в виде /2/

$$\begin{aligned} \sigma_x + i\tau_{xy} &= \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - \Omega(x) \\ \sigma_x - i\tau_{xy} &= \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + \Omega(x) \\ 2\mu\left(\frac{du}{dx} + i\frac{dv}{dx}\right) &= æ\Phi(z) - \overline{\Phi(z)} - \Omega(z) \end{aligned} \tag{1.4}$$

где $\Omega(x) = z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)}, æ = 3 - 4\nu$, ν- коэффициент Пуассона, Φ(z) и $\Psi(z)$ – комплексные потенциалы Колосова – Мусхелишвили ; приходим к краевой задаче для функций Φ(z) и Ω(z)

$$2\,\mathrm{Re}\,\Phi(x) + \mathrm{Re}\,\Omega(x) = \rho(x) \text{ на } L;$$

$$\mathrm{Im}\,z\,\Omega(x) = \varphi(x) \text{ на } L'$$

$$\mathrm{Re}\Omega(x) = \frac{æ-1}{æ+1}\rho(x) - \frac{4\varphi}{æ+1}u' \text{ на } L'$$

Решение граничной задачи (1.5) дается формулой Келдыша – Седова /1/

$$2\Phi(z)+\Omega(z)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\rho(x)dx}{x-z}$$

$$\Omega(z)=\frac{1}{\pi\chi(z)}-\int_{L''}\left[\frac{æ-1}{æ+1}\rho(x)-\frac{4\mu}{æ+1}u'\right]\frac{\chi(z)dx}{x-z}+\int_{L'}\frac{\varphi(x)\chi(z)dx}{x-z}+\frac{iP_{n-1}(z)}{\chi(z)} \tag{1.6}$$

где $\chi(z)=\prod_{K=1}^{n}\sqrt{(z-a_K)(z-b_K)}$, П - знак произведения

$P_{n-1}(z)=C_1z^{n-1}+C_2z^{n-2}+...+C_n$ многочлен (n-1) – ой степени с произвольными действительными коэффициентами.

Постоянные $C_1,C_2,\ldots,C_n$ фигурирующие в решении (1.6) могут быть определены из условий

$$u(b_K)-u(a_K)=\frac{1}{2\mu}\int_{a_K}^{b_K}\mathrm{Re}\left[(æ-1)\Phi^+(x)-\Omega^+(x)\right]dx \tag{1.7}$$

где $\Phi^+(x)$, $\Omega^+(x)$ – граничные значения $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ на границе полуплоскости. Условие(1.7) формирует систему линейных уравнений для определения $C_1,C_2,\ldots,C_n$

Перейдём к модельной задаче

$$\sigma_y=0, x\in L$$

$$\tau_{xy}=\tau_0, x\in(-l,l)$$

$$u\equiv 0 \ |x|>l$$

На основе (1.5) решение (1.8) имеет вид

$$2\Phi(z)+\Omega(z)=0$$

$$\Omega(z)=\frac{\tau_0}{\pi\sqrt{l^2-z^2}}\int_{-l}^{l}\frac{\sqrt{l^2-x^2}dx}{x-z}+\frac{iC_0}{\sqrt{z^2-l^2}} \tag{1.8}$$

При вычислении интеграла делаем замену x=l·cos(t)

$$\int_{-l}^{l;}\frac{\sqrt{l^2-x^2}}{x-z}=l^2\int_0^{\pi}\frac{\sin^2(t)\partial t}{l\cos(t)-z},$$

а затем универсальную тригонометрическую подстановку u = tg $\frac{x}{2}$

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 t dt}{l\cos t - z} = -\frac{2}{z+l}\int_0^{\infty}\frac{u^2 du}{(u^2+c^2)(1+u^2)^2},\ c=\sqrt{\frac{z-l}{z+l}}$$

разложим подинтегральную на простейшие дробь

$$\frac{u^2}{(u^2+c^2)(1+u^2)^2} = \frac{M_1 u + N_1}{u^2+c^2} + \frac{M_2 u + N_2}{u^2+1} + \frac{M_3 u + N_3}{(u^2+1)^2}$$

и найдем коэффициент разложения

$$M_1 = M_2 = M_3 = 0;\ N_1 = -\frac{c^2}{(c^2-1)^2}; N_2 = \frac{c^2}{(c^2-1)^2};\ N_3 = -\frac{1}{c^2-1};$$

$$\int_0^{\infty}\frac{u^2 du}{(u^2+c^2)(u^2+1)^2} = -\frac{c^2}{(c^2-1)^2}\int_0^{\infty}\frac{du}{u^2+c^2} + \frac{c^2}{(c^2-1)^2}\int_0^{\infty}\frac{du}{1+u^2} - \frac{1}{c^2-1}\int_0^{\infty}\frac{du}{(1+u^2)^2}$$

Так как

$$\int_0^{\infty}\frac{du}{(1+u^2)^2} = |u = tg(t)| = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(t)dt = \frac{\pi}{4};$$

Находим

$$\int_{-l}^{l}\frac{\sqrt{l^2-x^2}}{x-z}dx = -\frac{8l^2}{z+l}\frac{\pi}{4}\frac{(c-1)^2}{(c^2-1)^2} = \pi(z-\sqrt{z^2-l^2})$$

Так как $\sqrt{z^2-l^2} = i\sqrt{l^2-z^2}$ то из (1.9) находим

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2}\Omega(z)$$

$$\Omega(z) = i\tau_0(1-\frac{z}{\sqrt{z^2-l^2}}) + \frac{ic_0}{\sqrt{z^2-l^2}} \qquad (1.10)$$

имеем

$$\mathrm{Re}\,\Omega(x) = -\frac{\tau_0 x}{\sqrt{l^2-x^2}} + \frac{c_0}{\sqrt{z^2-l^2}} \qquad |x| < l$$

$$\mathrm{Imz}\Omega(x) = \tau_0$$

Найдем c_0 из условия (1.7)

$$u(l)-u(-l)=0=-\frac{x+1}{4\mu}\int_{-l}^{l}\left[-\frac{\tau_0 x}{\sqrt{l^2-x^2}}+\frac{c_0}{\sqrt{l^2-x^2}}\right]dx=-\frac{\pi(x+1)}{4\mu}c_0\Rightarrow c_0=0.$$

следовательно

$$\Phi(z)=-\frac{1}{2}\Omega(z)$$

$$\Omega(z)=i\tau_o(1-\frac{z}{\sqrt{z^2-l^2}})$$

Горизонтальные смещения точек контура определяются функцией

$$u(x)=-\frac{x+1}{4\mu}\sqrt{l^2-x^2}\quad |x|<l$$

а компоненты напряжений

$$\sigma_x=2\operatorname{Re}\Phi(x)-\operatorname{Re}\Omega(x)=-2\operatorname{Re}\Omega(x)=\frac{2\tau_0 x}{\sqrt{l^2-x^2}}$$

Характер распределения $u(x)$ и $\sigma(x)$ показан на рис 1.2.

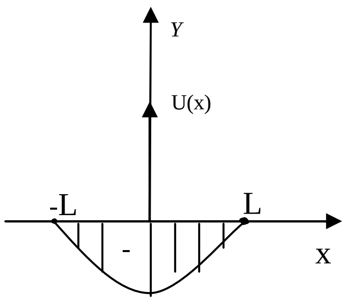


Рис 1

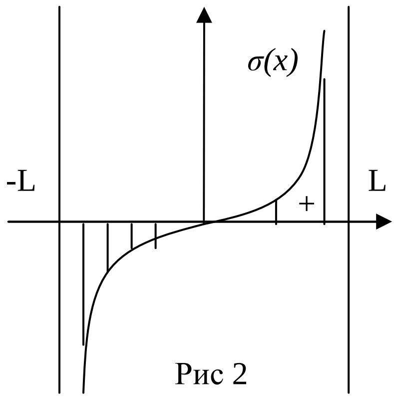


Рис 2

Результаты полученного решения свидетельствуют о том, что наличие поверхности скольжения в зоне влияния очистной выработки, может явиться дополнительным источником растягивающих напряжений, что может привести к возникновению локальной зоны разрушения. Во-вторых, нахождение интегралов в процессе решения задачи помогут студентам в приобретении навыков применения методов интегрирования.

Литература

1. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функции комплексного переменного. -М.; Наука, 1973. -735 ст.
2. Мусхелишвили Н.И. некоторые задачи математической теории упругости. -М, : Наука, 1966. – 707ст.