УДК 517.926

Некоторые вопросы интегрирования линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

Г. М. Улитин

Донецкий национальный технический университет

Розглянуто деякі питання інтегрування лінійних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Доведено методику побудови загального виду частинного розв'язку. Запропоновано квадратурні формули знаходження частинних розв'язків для деяких випадків.

Изучение теории линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами представляет собой важный вопрос для механических групп специальностей технических вузов. Если решение однородного уравнения не вызывает никаких затруднений, то нахождение частного решения неоднородного уравнения часто приводит к довольно громоздким преобразованиям. Особый интерес, в частности при решении практических задач, представляет случай, когда по виду правой части (уравнения со специальным видом правой части) можно определить вид частного решения и методом неопределенных коэффициентов находить его. Для этих известных двух случаев вида процедура нахождения частного решения подробно описана во всех учебниках. Однако для случая, когда правая часть является комбинацией экспоненты, тригонометрических функций и многочленов, определение структуры вида частного решения носит громоздкий характер. Для этого случая целесообразно использовать процедуру, аналогичную первому случаю, когда правая часть является комбинацией экспоненты и многочлена.

Нетрудно заметить, что правую часть, если ввести комплексное число $\overline{\lambda} = \alpha + i\beta$, можно представить в виде

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n^{(1)}(x)\cos\beta x + P_m^{(2)}(x)\sin\beta x\right) = \mathrm{Re}\left(e^{\overline{\lambda} x}\overline{P}_{n,m}(x)\right),$$

где $\overline{P}_{n,m}(x) = P_n^{(1)}(x) - iP_m^{(2)}(x)$.

Тогда, аналогично как и для первого случая [1], частное решение уравнения

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = \mathrm{Re}\left(e^{\overline{\lambda} x}\overline{P}_{n,m}(x)\right) \tag{1}$$

будем искать в виде $y_ч = \mathrm{Re}\left(e^{\overline{\lambda} x}\overline{Q}_k(x)\right)$, где $k = \max(m,n)$,

$\overline{Q}_k(x) = Q_k^{(1)}(x) - iQ_k^{(2)}(x)$. При подстановке в уравнение (1) получаем (эта процедура уже выполнена [1])

$$\mathrm{Re}\left(e^{\overline{\lambda} x} \left(\overline{Q}_k'' + \left(2\overline{\lambda} + a_1\right) \overline{Q}_k' + \left(\overline{\lambda}^2 + a_1\overline{\lambda} + a_2\right)\overline{Q}_k \right)\right) = \mathrm{Re}\left(e^{\overline{\lambda} x}\overline{P}_{n,m}(x)\right) \qquad (2)$$

Из выражения (2) следует структура частного решения для этого случая.

Здесь нужно учесть, что для случая, когда корни характеристического уравнения совпали с $\alpha \pm \beta i, 2\overline{\lambda} + a_1 = = 2\alpha + 2\beta i + a_1 = 2\beta i \neq 0.$

В [1] этот вопрос рассматривался с использованием формул Эйлера для синуса и косинуса и до конца преобразования с комплексными выражениями не выполнены. Кроме того, такой подход носит универсальный характер и из него можно получить и первый случай, положив $\beta = 0.$

При нахождении частных решений со специальной правой частью возникают два вопроса: выбор формы частного решения в зависимости от вида правой части и возможность получения частного решения в квадратурах. Первый вопрос изучен в общем виде методом функций Грина в учебнике [2], а в работе [3] - операторным методом. Эти вопросы предлагается изучить с помощью метода вариации произвольных постоянных. Общие рекомендации для применения этого метода для случая частного вида уравнения приведены, например, в учебнике [4].

В начале рассмотрим специальный вид, когда $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$.

Здесь в зависимости от значений корней характеристического уравнения возможны три случая:

1^0.Корни действительные и $k_1 \neq k_2$. Тогда фундаментальная система решений имеет вид $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = e^{k_2 x}$ и согласно методу вариации произвольных постоянных получаем

$$\begin{cases} C_1' e^{k_1 x} + C_2' e^{k_2 x} = 0 \\ C_1' e^{k_1 x} + C_2' e^{k_2 x} = e^{\alpha x} P_n(x) \end{cases}. \qquad (3)$$

Из решения системы (3) получаем

$$C_1' = \frac{1}{k_2 - k_1} e^{(\alpha - k_2)x} P_n(x); \quad C_2' = \frac{1}{k_1 - k_2} e^{(\alpha - k_1)x} P_n(x).$$

И тогда $y_ч = \frac{e^{k_2 x}}{k_2 - k_1} \int e^{(\alpha - k_2)x} P_n(x) dx + \frac{e^{k_1 x}}{k_1 - k_2} \int e^{(\alpha - k_1)x} P_n(x) dx.$ (4)

При этом, если α совпало с одним из корней, например, $k_2 = \alpha$, то

$$y_ч = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha - k_1} \int P_n(x) dx + \frac{e^{k_1 x}}{k_1 - \alpha} \int e^{(\alpha - k_1)x} P_n(x) dx. \quad (5)$$

Из формул (4) и (5) следует структура вида частного решения, когда используется метод вариации произвольных постоянных для этого случая.

2^0. Корни $k_1 = k_2 = k$. Тогда $y_1 = e^{kx}, y_2 = xe^{kx}$ и аналогично получаем

$$y_ч = e^{kx}\left(x \int P_n(x) e^{(\alpha - k)x} dx + \int x P_n(x) e^{(\alpha - k)x} dx\right). \quad (6)$$

Если $\alpha = k$, то

$$y_ч = e^{\alpha x}\left(x \int P_n(x) dx + \int x P_n(x) dx\right). \quad (7)$$

Из формул (6) и (7) также видна структура вида частного решения.

3^0. Корни комплексно-сопряженные: $k_{1,2} = \delta \pm i\omega$. Тогда $y_1 = e^{\delta x} \cos \omega x$, $y_2 = e^{\delta x} \sin \omega x$ и

$$y_ч = -\frac{e^{\delta x} \cos \omega x}{\omega} \int e^{(\alpha - \delta)x} \sin \omega x \left(P_n^{(1)}(x) \cos \beta x + P_m^{(2)}(x) \sin \beta x\right) dx +$$

$$+ \frac{e^{\delta x} \sin \omega x}{\omega} \int e^{(\alpha - \delta)x} \cos \omega x \left(P_n^{(1)}(x) \cos \beta x + P_m^{(2)}(x) \sin \beta x\right) dx. \quad (8)$$

Из формулы (8) следует случай, когда $\delta = \alpha, \quad \omega = \beta$ и структура вида частного решения.

Рассмотрим примеры:

Пример 1. Найти частное решение уравнения

$$y'' - 3y' + 2y = (4x + 8)e^{3x}.$$

Здесь случай: $k_1 \neq k_2 \neq \alpha$. По формуле (4)

$$y_ч = e^{2x} \int e^x (4x + 8) dx - e^x \int e^{2x} (4x + 8) dx = (2x + 1)e^{3x}.$$

Пример 2. Найти частное решение уравнения

$$y'' - 2y' + y = 6xe^x.$$

Здесь случай: $k_1 = k_2 = \alpha = 1$ и тогда по формуле (7) получаем

$$y_ч = e^x\left(x\int 6xdx - \int x6xdx\right) = e^x\left(3x^3 - 2x^3\right) = x^3 e^x.$$

Очевидно, что для ряда случаев более удобно для нахождения частного решения непосредственно использовать квадратурные формулы.

Литература

1. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. – М.: Наука, 1972. – Т.2.- 576 с.
2. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения, - М.: Наука, 1985.- 232 с.
3. Лизоркин П. И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений. – М.: Наука, 1981.- 384 с.
4. Смирнов В. И. Курс высшей математики.- М.: Наука, 1974.- Т.2.-656 с.