

УДК 621.833

Ю.В. Стрельников, инж.

Белгородский государственный технологический университет, Россия  
Тел./факс: 0007(9107)373663; E-mail: yuriy.strelnikov@inbox.ru**ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ РОЛИКА В ЗАЦЕПЛЕНИИ**

*Установлена функциональная связь между нормальной нагрузкой в зубчатом зацеплении и радиальной деформацией полого тонкостенного цилиндра, служащего в качестве силового упругого элемента для передач с промежуточными телами качения. Ключевые слова: передача, ролик, тонкостенный цилиндр, деформация, напряжения.*

**Введение**

В передачах с промежуточными телами качения упругие цилиндрические ролики взаимодействуют с вогнутыми цилиндрическими поверхностями зубьев близкой кривизны. В ненагруженном состоянии цилиндрические поверхности с параллельными осями имеют линейчатый контакт по образующим. Под действием нагрузки возникает контактная площадка в форме некруговой цилиндрической поверхности. Считаем, что ролик и зуб находятся в плоском деформированном состоянии. Это обосновывается тем, что длина цилиндрических тел значительно больше размеров их поперечных сечений. Тогда среднее сечение контактирующих тел остается плоским, что обеспечивается симметрией относительно срединного сечения. У оснований цилиндров возможны отступления от плоского деформированного состояния, но основную нагрузку несет срединная часть контактирующих тел. При плоской деформации края цилиндрической поверхности контакта ограничены прямыми линиями. Существенное значение имеет протяженность дуги контакта, которая получается в поперечном сечении контактирующих тел.

Деформированные поверхности в зоне контакта имеют одинаковую кривизну. Условия контакта сопряженных поверхностей можно записать в виде

$$\frac{1}{r_1} + \chi_2 = \frac{1}{R_2} + \chi_1,$$

где  $r_1$ ,  $R_2$  – радиусы вогнутой цилиндрической поверхности зуба и внешний радиус ролика;  $\chi_1$ ,  $\chi_2$  – изменения кривизны вызванные деформацией поверхностей ролика и зуба. Решение находится через функцию напряжений  $\Phi$ , удовлетворяющую бигармоническому уравнению. Для представления функции напряжений используется решение бигармонического уравнения в полярных координатах в форме Мичелла [1].

Целью исследования является совершенствование методов расчёта деформации элементов зацепления передач с упругими промежуточными телами качения. В частности наибольший практический интерес представляют радиальные деформации, обеспечивающие многопоточность зацепления, стабилизирующие передаточное отношение, уравнивающие распределение нагрузки на зубья.

**Основное содержание и результаты работы**

В передачах с промежуточными телами качения в качестве гибкого звена служат ролики, выполненные в форме тонкостенных цилиндров, напряжённо – деформированное состояние которых интересно с точки зрения нагрузочной способности и кинематических свойств зацепления (рис. 1). Определим упругие деформации промежуточных тел качения

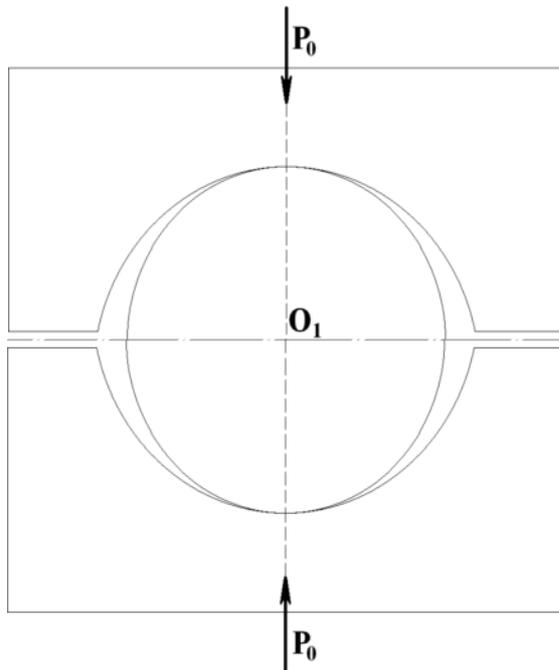


Рис. 1. Схема передачи нагрузки на оболочку

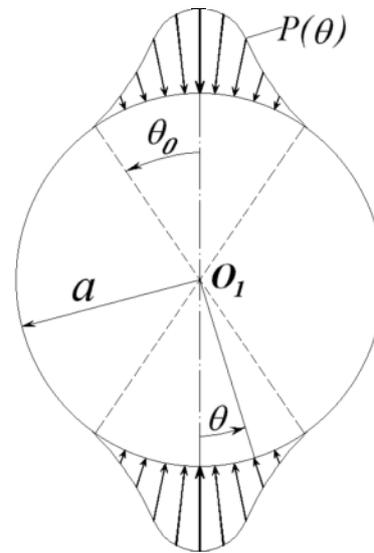


Рис. 2. Распределение давления по поверхности оболочки

находящихся в зацеплении. Цилиндрическая оболочка опирается на цилиндрические поверхности двух полупространств, представляющих массивы зубьев колеса и сателлита, и подвергается воздействию сжимающих сил. Оболочка формируется и образует площадки контакта с поверхностями зубьев, которые предполагаются недеформированными.

На площадках контакта поверхность оболочки подвергается действию распределённой нагрузки. При наличии смазки можно пренебречь трением и распределённую нагрузку считать нормальной. При малых деформациях её можно отнести к поверхности недеформированной оболочки (рис. 2).

Для решения контактной задачи необходимо знать зависимость компонент деформации срединной поверхности цилиндрической оболочки от давления  $P(\theta)$ . В соответствии с решением С.П. Тимошенко [2, 3], цилиндрическая оболочка находится под действием диаметрально противоположных сил  $P$  нормальных к её поверхности (рис 3).

При условии нерастяжимости срединной поверхности, полученные осевое, тангенциальное и радиальное перемещения точек срединной поверхности оболочки обозначим через  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , являющиеся функциями осевой координаты  $x$  и угловой  $\varphi$ . Если сжимающие силы приложены в точке с осевой координатой  $\xi$ , а угловая координата отсчитывается от диаметра вдоль которого направлены силы, то компоненты вектора смещения определяются по формулам [4]

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{Pa^4 \xi}{\pi D l} \sum_{n=2,4,\dots} \left\{ \frac{\cos n\varphi}{\left[ \frac{1}{3} l^2 n^2 + 2(1-\nu)a^2 \right] (n^2 - 1)^2} \right\}, \\
 v &= \frac{Pa^3 \xi}{\pi D l} \sum_{n=2,4,\dots} \left\{ \frac{1}{n(n^2 - 1)^2} + \frac{x \xi n}{\left[ \frac{1}{3} l^2 n^2 + 2(1-\nu)a^2 \right] (n^2 - 1)^2} \right\} \sin n\varphi,
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$w = \frac{Pa^3}{\pi D l} \sum_{n=2,4,\dots} \left\{ \frac{1}{(n^2 - 1)^2} \left[ 1 + \frac{x\xi n^2}{\frac{1}{3}l^2 n^2 + 2(1-\nu)a^2} \right] \cos n\varphi \right\}.$$

Решение (1) можно обобщить на систему сил, расположенных на одной образующей

$$u = \frac{\sum_{i=1}^k (P_i \xi_i)}{\pi D l} \sum_{n=2,4,\dots} \left\{ \frac{\cos n\varphi}{\left[ \frac{1}{3}l^2 n^2 + 2(1-\nu)a^2 \right] (n^2 - 1)^2} \right\}, \quad (2)$$

$$v = \frac{\left( \sum_{i=1}^k P_i \right) a^3}{\pi D l} \sum_{n=2,4,\dots} \left( \frac{\sin n\varphi}{n(n^2 - 1)^2} \right) + \frac{x \left( \sum_{i=1}^k P_i \xi_i \right)}{\pi D l} \sum_{n=2,4,\dots} \left\{ \frac{n \sin n\varphi}{\left[ \frac{1}{3}l^2 n^2 + 2(1-\nu)a^2 \right] \cdot (n^2 - 1)^2} \right\},$$

$$w = \frac{\left( \sum_{i=1}^k P_i \right) a^3}{\pi D l} \sum_{n=2,4,\dots} \left( \frac{\cos n\varphi}{(n^2 - 1)^2} \right) + \frac{x \left( \sum_{i=1}^k P_i \xi_i \right) a^3}{\pi D l} \sum_{n=2,4,\dots} \left\{ \frac{n^2 \cos n\varphi}{\left[ \frac{1}{3}l^2 n^2 + 2(1-\nu)a^2 \right] \cdot (n^2 - 1)^2} \right\}.$$

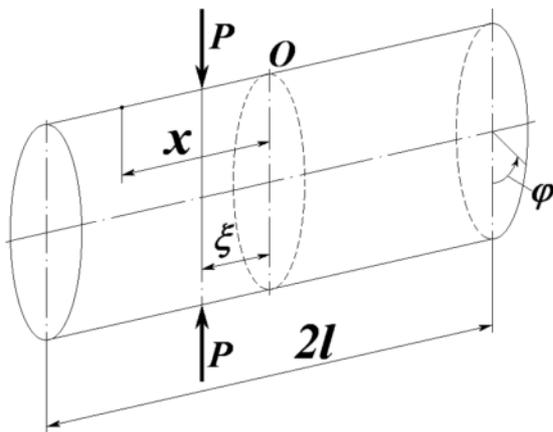


Рис. 3. Нагрузка оболочки сосредоточенными силами

формулы (2), получим

$$u = 0, \\ v = \frac{2qa^3}{\pi D} \sum_{n=2,4,\dots} \left\{ \frac{\sin n\varphi}{n(n^2 - 1)^2} \right\}, \\ w = \frac{2qa^3}{\pi D} \sum_{n=2,4,\dots} \left\{ \frac{\cos n\varphi}{(n^2 - 1)^2} \right\}. \quad (4)$$

Формулы (4) можно использовать для определения компонент упругой деформации оболочки, находящейся под действием нормального давления, являющегося функцией угловой координаты  $\theta$  и не зависящего от осевой координаты  $x$ .

Давление можно представить как систему элементарных погонных нагрузок с элементарной интенсивностью  $dq$

Распределённую погонную нагрузку можно рассматривать как систему элементарных сосредоточенных сил. В случае равномерно распределённой нагрузки интенсивностью  $q$

$$\sum P_i = q(2l), \\ \sum P_i \xi_i = 0. \quad (3)$$

Относительно начала координат каждому элементу распределённой нагрузки  $P$  с положительной координатой  $\xi_1$  в силу симметрии соответствует такой же элемент с отрицательной координатой ( $-\xi_1$ ), вследствие чего сумма равна нулю.

Подставляя выражения (3) в

$$dq = P(\theta) \cdot a \, d\theta. \tag{5}$$

Давление считаем распределённым по поверхности оболочки в пределах изменения угла  $\theta$  от  $-\theta_0$  до  $+\theta_0$ . Фиксируем произвольную точку срединной поверхности, положение которой определяется углом  $\varphi$  (рис. 4).

$$du = 0,$$

$$dv = \left\{ \frac{2P(\theta)a^4}{\pi D} \sum_{n=2,4,\dots} \left[ \frac{\sin n(\varphi - \theta)}{n(n^2 - 1)^2} \right] \right\} d\theta, \tag{6}$$

$$dw = \left\{ \frac{2P(\theta)a^4}{\pi D} \sum_{n=2,4,\dots} \left[ \frac{\cos n(\varphi - \theta)}{(n^2 - 1)^2} \right] \right\} d\theta.$$

Интегрируя выражения (6) получим компоненты вектора упругой деформации

$$u = 0,$$

$$v = \frac{2a^4}{\pi D} \cdot \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \left\{ P(\theta) \sum_{n=2,4,\dots} \left[ \frac{\sin n(\varphi - \theta)}{n(n^2 - 1)^2} \right] \right\} d\theta, \tag{7}$$

$$w = \frac{2a^4}{\pi D} \cdot \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \left\{ P(\theta) \sum_{n=2,4,\dots} \left[ \frac{\cos n(\varphi - \theta)}{(n^2 - 1)^2} \right] \right\} d\theta.$$

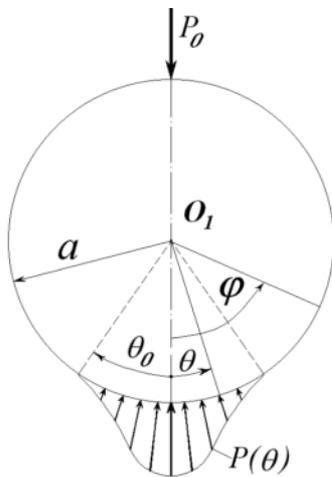


Рис. 4. Схема определения закона распределения нормального отсчёта координат давления [5 - 8]. Предварительно просуммируем ряд под знаком интеграла в третьей формуле системы (7), определяющей радиальную компоненту упругой деформации. Обозначим

$$\Phi(\varphi - \theta) = \sum_{n=2,4,\dots} \left[ \frac{\cos n(\varphi - \theta)}{(n^2 - 1)^2} \right]. \tag{8}$$

Полагаем  $\theta = 0$

$$\Phi(\varphi) = \sum_{n=2,4,\dots} \left[ \frac{\cos n\varphi}{(n^2 - 1)^2} \right]. \tag{9}$$

Дважды дифференцируем ряд (9), в результате чего получим дифференциальное уравнение

$$\Phi'' = - \sum_{n=2,4,\dots} \left[ \frac{(n^2 - 1) + 1}{(n^2 - 1)^2} \cos n\varphi \right] = - \sum_{n=2,4,\dots} \left[ \frac{\cos n\varphi}{(n^2 - 1)} \right] - \Phi. \tag{10}$$

Полагаем в правой части дифференциального уравнения (10)  $n = 2k$

$$\Phi'' + \Phi = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\varphi}{(4k^2 - 1)}. \quad (11)$$

Правая часть уравнения (11) представляет ряд Фурье и его можно заменить функцией, разложение которой он представляет [9]

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\varphi}{(4k^2 - 1)} = \frac{\pi}{4} |\sin \varphi| - \frac{1}{2}, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi. \quad (12)$$

Дифференциальное уравнение (11) представим с учётом значения (12)

$$\Phi'' + \Phi = \frac{\pi}{4} |\sin \varphi| - \frac{1}{2}. \quad (13)$$

Пусть  $0 \leq \varphi \leq \pi$ , тогда  $|\sin \varphi| = \sin \varphi$ . Уравнение (13) запишется в виде

$$\Phi'' + \Phi = \frac{\pi}{4} \sin \varphi - \frac{1}{2}. \quad (14)$$

Отыскиваем частное решение дифференциального уравнения (14)

$$\Phi'' = -\frac{1}{2} + A\varphi \cos \varphi. \quad (15)$$

Подставим уравнение (15) в уравнение (14) и определим константу  $A = -\frac{\pi}{8}$ .

Получим частное решение неоднородного дифференциального уравнения (14)

$$\Phi^* = -\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} \varphi \cdot \cos \varphi. \quad (16)$$

Общее решение дифференциального уравнения (14) содержит две произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$

$$\Phi = C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} \varphi \cdot \cos \varphi. \quad (17)$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определим, приравняв правые части выражений (9) и (17)

$$C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} \varphi \cdot \cos \varphi = \sum_{n=2,4,\dots} \left[ \frac{\cos n\varphi}{(n^2 - 1)^2} \right], \quad 0 \leq \varphi \leq \pi. \quad (18)$$

В правой части тождества (18) сделаем замену  $n = 2k$

$$C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} \varphi \cdot \cos \varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\varphi}{(4k^2 - 1)^2}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi. \quad (19)$$

Полагаем в равенстве (19)  $\varphi = 0$ , тогда получим

$$C_2 - \frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2 - 1)^2}. \quad (20)$$

Воспользуемся представлением

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2 - 1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1}. \quad (21)$$

Учитывая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} - 1, \quad (22)$$

подставим значение из равенства (22) в выражение (21) и получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2 - 1)^2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2 - 1)} - \frac{1}{4}. \quad (23)$$

Воспользуемся разложениями в ряд Фурье функций

$$|\varphi| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)\varphi}{(2k-1)^2}, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi, \quad (24)$$

$$|\sin \varphi| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\varphi}{(4k^2 - 1)}, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi. \quad (25)$$

Полагаем в формулах (24) и (25)  $\varphi = 0$ , получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad (26)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2 - 1)} = \frac{1}{2}. \quad (27)$$

Подставим выражения (26) и (27) в уравнение (23), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2 - 1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}. \quad (28)$$

Подставим значение (28) в равенство (20), определим постоянную  $C_2$

$$C_2 = \frac{\pi^2}{16}. \quad (29)$$

Дифференцируем тождество (19) по  $\varphi$ , получим

$$C_1 \cos \varphi - C_2 \sin \varphi - \frac{\pi}{8} \cdot \cos \varphi + \frac{\pi}{8} \varphi \cdot \sin \varphi = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin 2k\varphi}{(4k^2 - 1)^2}. \quad (30)$$

Полагаем в формуле (30)  $\varphi = 0$ , определим константу  $C_1$

$$C_1 = \frac{\pi}{8}. \quad (31)$$

Подставим выражения (30) и (31) в равенство (18), получим

$$\sum_{n=2,4,\dots} \left[ \frac{\cos n\varphi}{(n^2-1)^2} \right] = \frac{\pi}{8} \sin \varphi + \frac{\pi^2}{16} \cos \varphi - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} \varphi \cos \varphi, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi. \quad (32)$$

Пусть теперь  $\varphi < 0$ . Уравнение (13) запишется в виде

$$\Phi'' + \Phi = -\frac{\pi}{4} \sin \varphi - \frac{1}{2}. \quad (33)$$

Представим частное решение уравнения (33) в виде

$$\Phi^{**} = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} \varphi \cdot \sin \varphi. \quad (34)$$

Общее решение уравнение (33) принимает вид

$$C_3 \sin \varphi + C_4 \cos \varphi - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} \varphi \cdot \cos \varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\varphi}{(4k^2-1)^2}, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi. \quad (35)$$

Полагаем в равенстве (35)  $\varphi = 0$  и в результате получим

$$C_4 - \frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2}. \quad (36)$$

Подставляя значение (28) в равенство (36), определим постоянную  $C_4$

$$C_4 = \frac{\pi^2}{16}. \quad (37)$$

Дифференцируем уравнение (35)

$$C_3 \cos \varphi - C_4 \sin \varphi + \frac{\pi}{8} \cdot \cos \varphi - \frac{\pi}{8} \cdot \varphi \sin \varphi = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin 2k\varphi}{(4k^2-1)^2}. \quad (38)$$

Полагаем в выражении (38)  $\varphi = 0$  и определяем постоянную  $C_3$

$$C_3 = -\frac{\pi}{8}. \quad (39)$$

Таким образом, в случае  $\varphi \leq 0$ , из выражения (9) получим

$$\Phi = \sum_{n=2,4,\dots} \left[ \frac{\cos n\varphi}{(n^2-1)^2} \right] = -\frac{\pi}{8} \sin \varphi + \frac{\pi^2}{16} \cos \varphi - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} \varphi \cos \varphi, \quad -\pi \leq \varphi \leq 0. \quad (40)$$

Формулы (32) и (40) могут быть объединены

$$\sum_{n=2,4,\dots} \left[ \frac{\cos n\varphi}{(n^2-1)^2} \right] = \frac{\pi}{8} |\sin \varphi| + \frac{\pi^2}{16} \cos \varphi - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} |\varphi| \cos \varphi, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi. \quad (41)$$

В формуле (41) заменим угол  $\varphi$  на угол  $(\varphi - \theta)$  и подставим полученное выражение в третью формулу системы (7)

$$w(\varphi) = \frac{2a^4}{\pi D} \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \left\{ \left[ \frac{\pi}{8} |\sin(\varphi - \theta)| + \frac{\pi^2}{16} \cos(\varphi - \theta) - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} |\varphi - \theta| \cos(\varphi - \theta) \right] P(\theta) \right\} d\theta. \quad (42)$$

### Заключення

Выражение (2.71) устанавливает связь между нормальной нагрузкой в зубчатом зацеплении  $P(\theta)$  с радиальной деформацией полого тонкостенного цилиндра  $w(\varphi)$ , служащего в качестве упругого элемента в передачах с промежуточными телами качения. Это выражение обеспечивает возможность определения числа роликов одновременно участвующих в зацеплении, обоснованно назначать величину зазоров в зубчатом зацеплении, оптимизировать конструктивные параметры новых разновидностей высоконагруженных передач. Полученный результат также может быть использован при решении других задач теории упругости и теории прочности для выпукло - вогнутого контакта тел близкой кривизны, одним из которых является полый тонкостенный цилиндр.

### Список литературы:

1. Демидов С. П. Теория упругости / С. П. Демидов. - М.: Высшая школа, 1979. - С. 432.
2. Тимошенко С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Д. Гудьер. - М.: Наука, 1979. - 560 с.
3. Тимошенко С.П., Войновский - Кригер С. Пластинки и оболочки / С.П. Тимошенко. - М.: Наука, 1966. - 635 с.
4. Стрельников В.Н. Взаимодействие упругих роликов с вогнутыми зубьями близкой кривизны / В.Н. Стрельников. - М.: Машиностроение, 1992. - 322 с.
5. Стрельников В.Н. Напряжённо - деформированное состояние зубьев передачи с промежуточными телами качения / В.Н. Стрельников // Прогрессивные технологии и системы машиностроения. Междунар. сб. научн. тр. - 2003. - Вып. 26. - С. 90-108.
6. Стрельников В.Н. Напряжённо-деформированное состояние полого цилиндра / В.Н. Стрельников // Прогрессивные технологии и системы машиностроения. Междунар. сб. научн. тр. - 2004. - Вып. 27. - С. 254-265.
7. Стрельников В. Н. Контактная задача зубчатого зацепления с промежуточными телами качения / В. Н. Стрельников // Прогрессивные технологии и системы машиностроения. Междунар. сб. научн. тр. - 2004. - Вып. 27. - С. 238 - 254.
8. Стрельников В.Н. Напряжённо-деформированное состояние круговых зубьев / В. Н. Стрельников // Вестник НТУ «ХПИ». - 2005. - Вып. 40'2005. - С. 87 - 98.
9. Толстов Г.П. Ряды Фурье / Г.П. Толстов. - М.: Наука, 1980. - 381 с.

Надійшла до редакції 11.02.2013.

### Ю.В. Стрельников ДОСЛІДЖЕННЯ ДЕФОРМАЦІЙ ВАЛЬЦЯ У ЗАЧЕПЛЕННІ

*Встановлений функціональний зв'язок між нормальним навантаженням у зубчастому зачепленні та радіальною деформацією тонкостінного порожнистого циліндра, який виступає в якості силового пружного елемента для передач з проміжними тілами котіння.*

**Ключові слова:** передача, валець, тонкостінний циліндр, деформація, напруження.

### Y.V. Strelnikov GEARING ROLLER DEFORMATIONS INVESTIGATION

*Functional binding between gear normal load and thin-walled quill cylinder, which is used like force resilient member for intermediate rolling element drive was determined.*

**Key words:** drive, roller, thin-walled cylinder, deformation, tension.