

УДК 621.833

В.Н. Стрельников, д-р техн. наук, проф.,
Г.С. Суков, канд. экон. наук, **М.Г. Суков**, инж.
ПАО Новокраматорский машиностроительный завод, Украина
Тел./факс: 38 (06264) 7 – 22 – 49; E-mail: rs@nkmz.donetsk.ua

НАПРЯЖЕННО – ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ГИБКОГО КОЛЕСА В ВИДЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ЗАЩЕМЛЕННОЙ ПО ТОРЦАМ

В статье изложено решение задачи теории упругости о напряженно – деформированном состоянии гибкого колеса волновой зубчатой передачи, представленного в виде цилиндрической оболочки защемленной по торцам.

Ключевые слова: гибкое колесо, оболочка, сила, момент, перемещение, напряжения.

Введение

Одним из наиболее эффективных способов повышения нагрузочной способности машин и агрегатов является применение многопоточных конструктивных схем, в т. ч. с гибкими звеньями, упругие деформации которых упрощают технику дифференцирования силовых потоков. Многократно снижаются нагрузки на зубья, минимизируются габариты и металлоёмкость механического привода. Существующие волновые передачи обладают сравнительно низкой нагрузочной способностью – преимущественно передают вращающие моменты M_2 до 5 кНм.

В процессе исследования и освоения крупных волновых передач на ПАО «НКМЗ», наличие масштабного фактора вызвало существенные изменения соотношений геометрических и силовых параметров волновой передачи с деформациями гибкого звена. Проявились новые свойства крупных волновых передач, связанные с деформацией гибкого колеса, не характерные для небольших волновых передач: осевые силы, повышенные энергетические потери, заклинивание и проскок зубьев в зацеплении. В известных работах Волкова [1], Гинзбурга [2], Иванова [3], Ковалёва [4], Шувалова [5] и др. авторов, эти вопросы не нашли должного решения.

Одним из негативных проявлений масштабного фактора служит интерференция зубьев, представляющая наиболее значимые аспекты теории зубчатых зацеплений, определяющая геометрические условия существования зубчатой пары. При модуле зубьев $1,5 \div 2$ мм, крутящих моментах в сотни кНм, упругие деформации гибкого колеса превышают зазоры в зубчатом зацеплении, вызывая интерференцию зубьев 2^{го} рода. В период производственного освоения новой продукции, спроектированные по известным методикам и изготовленные на ПАО «НКМЗ» крупные волновые редукторы, по этой причине оказались не работоспособны.

Основной задачей данного исследования является определение деформаций и поля напряжений в оболочке гибкого колеса с целью оптимизации его конструктивных параметров.

Основное содержание и результаты работы

Гибкое колесо представляет полый цилиндр, на одном конце которого образован зубчатый венец, на другом – шлицевый венец, и они связаны тонкостенной оболочкой (рис. 1). Гибкое колесо является основным силовым кинематическим звеном волновой зубчатой передачи, определяющим ее несущую способность и ресурс работы. Гибкое колесо находится в условиях стесненного деформирования – растяжения в окружном

направлении, которые существенны для зацепления зубьев и изменения формы гибкого колеса под нагрузкой.

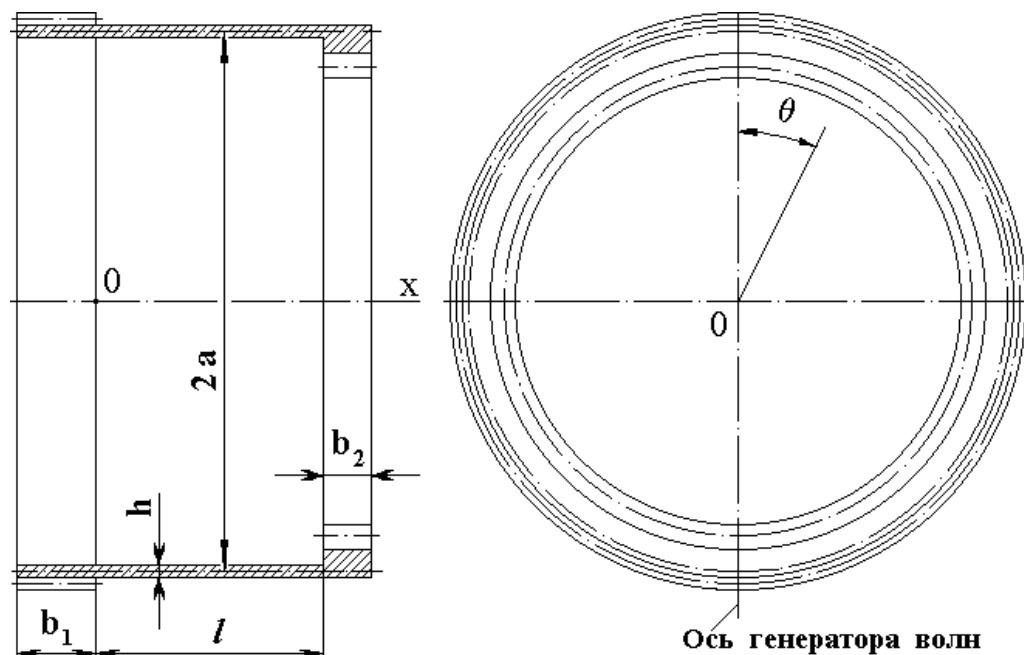


Рис. 1. Конструктивная схема гибкого колеса

Гибкое колесо волновой передачи можно рассматривать как тонкостенную цилиндрическую оболочку. Отношение толщины стенки гибкого колеса к диаметру окружности, делящей стенку колеса пополам, составляет 0,01232 (рис. 2).

Ограниченная прочность и долговечность гибкого колеса во многом определяет нагрузочные характеристики волновой передачи, в принцип работы которой заложен процесс волновой деформации гибкого звена сложно – напряженной детали, работающей в наиболее тяжелых условиях, не типичных для зубчатых передач. Напряжения в гибком звене возникают уже при сборке передачи. Частота их изменения за один оборот генератора зависит от числа волн деформации гибкого колеса, а его малый срок службы обусловлен износом материала, интенсифицирующийся наличием значительных концентраторов напряжений, что является основным фактором сравнительно низкой работоспособности волновых зубчатых передач.

Пусть цилиндрическая оболочка длиной l , с толщиной стенки h и радиусом срединной поверхности a закреплена с двух торцов в толстые плиты, поворачивающиеся относительно друг друга на некоторый угол. При этом сохраняется расстояние между плитами равное длине недеформированной оболочки l . В процессе поворота плиты не испытывают деформации. При деформации оболочки точка M , лежащая на ее поверхности и определяемая радиусом \bar{r} , получает перемещение \bar{U} и переходит в некоторую точку M_l , радиус которой \bar{r}^* равен

$$\begin{aligned} \bar{r}^* &= \bar{r} + \bar{U}, \\ \bar{U} &= u \bar{t}_1 + v \bar{t}_2 + w \bar{n}, \end{aligned} \quad (1)$$

где u, v, w – составляющие вектора перемещения \bar{U} по осям $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{n}$.

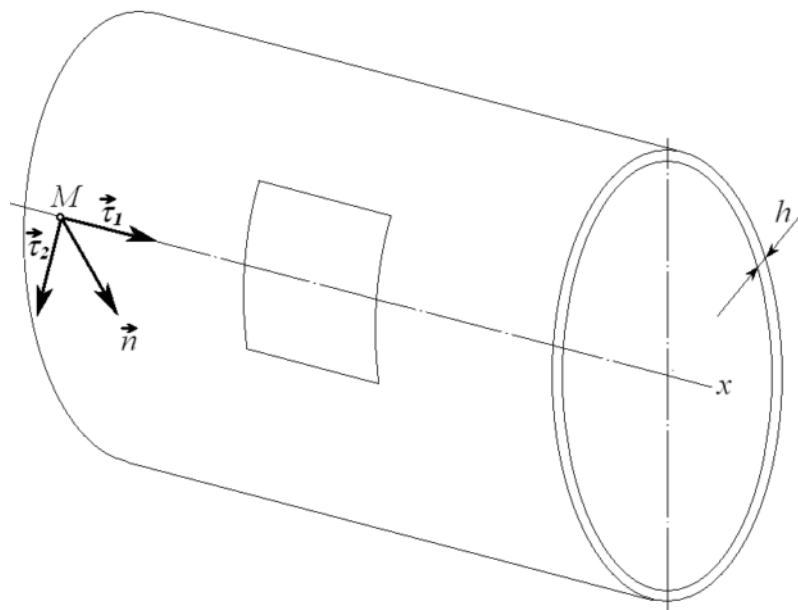


Рис. 2. Оболочка гибкого колеса волновой передачи

Выделим элемент оболочки двумя плоскостями, проходящими через ось оболочки и двумя плоскостями, перпендикулярными этой оси. Со стороны отброшенной части оболочки на выделенный элемент действуют усилия, которые сводятся к системе параллельных и касательных напряжений, уравнивающих выделенный элемент. Система нормальных и касательных напряжений, действующих на выделенный элемент оболочки, заменяется эквивалентной системой усилий и моментов N_x , N_θ , $N_{x\theta}$, M_x , M_θ , $M_{x\theta}$, приложенных по его боковым плоскостям (рис 3)

$$\begin{aligned}
 N_x &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial U}{\partial x} + \nu \left(\frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w}{a} \right) \right], \\
 N_\theta &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w}{a} + \nu \frac{\partial U}{\partial x} \right], \\
 N_{x\theta} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{a} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right), \\
 M_x &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu}{a^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right], \\
 M_\theta &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right], \\
 M_{x\theta} &= \frac{Eh^3}{12(1+\nu)a} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right),
 \end{aligned} \tag{2}$$

где ν - коэффициент Пуассона; E - модуль упругости первого рода.

Напряженно – деформированное состояние цилиндрической оболочки гибкого колеса представляется уравнениями равновесия

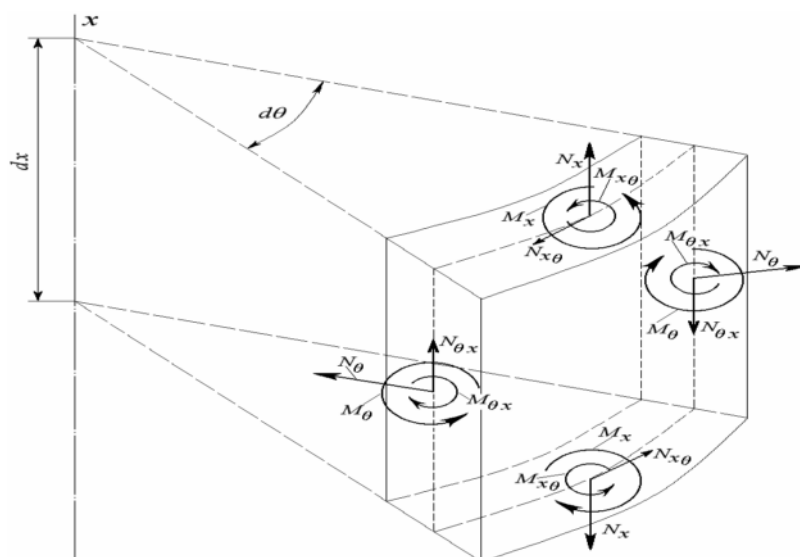


Рис. 3. Положительные направления усилий и моментов, действующих на выделенный элемент со стороны отброшенной части оболочки

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2a} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\nu}{a} \frac{1}{a^2} \frac{\partial w}{\partial x} + P_1 \frac{(1-\nu^2)}{Eh} &= 0, \\ \frac{1+\nu}{2a} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{h^2}{12a^2} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} \right) + \\ + \frac{h^2}{12a^2} \left(\frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) + P_2 \frac{(1-\nu)}{Eh} &= 0, \\ \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w}{a} - \frac{h^2}{12} \left(a \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2}{a} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{a^3} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right) - \\ - \frac{h^2}{12} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{1}{a^3} \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} \right) + P_3 \frac{a(1-\nu^2)}{Eh} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

В силу равномерности передачи крутящего момента от плит к поперечному сечению оболочки, производные перемещений u , v , w по θ равны нулю, $\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0$, а также равны нулю нагрузки $P_1 = P_2 = P_3 = 0$, с учетом чего уравнения (3) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\nu}{a} \frac{\partial w}{\partial x} &= 0, \\ \left(\frac{1-\nu}{2} \right) \left(1 + \frac{h^2}{12a^2} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= 0, \\ \nu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{ah^2}{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Решение второго уравнения системы (4) позволяет определить смещение v

$$v = C_1 x + C_2. \quad (5)$$

Постоянная интегрирования C_2 равна нулю при выборе начала координат на середине плиты оболочки и уравнение (5) примет вид

$$v = C_1 x. \quad (6)$$

Поворот образующей цилиндрической оболочки ψ связан с углом поворота конечного сечения φ следующим образом (рис. 4)

$$\psi = \frac{2a\varphi}{l} = a\varphi_0. \quad (7)$$

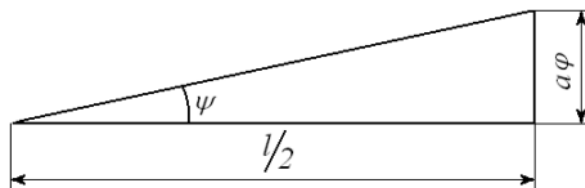


Рис. 4 Связь углов поворота образующей цилиндра и конечного сечения оболочки

Постоянная интегрирования C_1 в уравнении (6) определяется с учетом связи угла поворота образующей цилиндра со смещением точки, лежащей на образующей v (рис 5)

$$C_1 = \frac{dv}{dx} = \psi. \quad (8)$$

В третье уравнение системы (2) подставляются значения (8) и $\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$, последнее указывает на независимость смещений от угла θ

$$N_{x\theta} = GhC_1. \quad (9)$$

Усилие $N_{x\theta}$ является результирующим касательных напряжений τ боковой плоскости выделенного элемента единичной длины

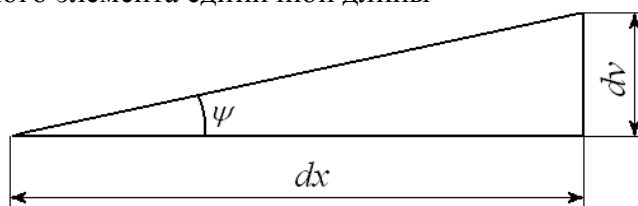


Рис. 5. Зависимость угловых и линейных параметров образующей цилиндра

$$N_{x\theta} = \tau h. \quad (10)$$

Совместным решением зависимостей (9) и (10) определяется постоянная интегрирования C_1

$$C_1 = \frac{\tau}{G}. \quad (11)$$

Смещение v определяется подстановкой значения постоянной интегрирования C_1 (11) в равенство (6)

$$v = \frac{\tau x}{G} \quad (12)$$

Определим величину вращающего момента M_2 приложенного к оболочке

$$M_2 = 2 \pi a^2 h \tau \quad (13)$$

и вызывающего касательные напряжения

$$\tau = \frac{M_2}{W_p} = \frac{M_2}{2 \pi a^2 h}, \quad (14)$$

где W_p – момент сопротивления при кручении.

Используя выражения (8), (11) и (14) можно установить угловое смещение оболочки

$$\psi = \frac{M_2}{W_p G}. \quad (15)$$

Из условия равенства перемещений

$$\psi x = a \varphi \quad (16)$$

и с учетом выражения (15) определяется угол относительного смещения нормальных сечений оболочки φ

$$\varphi = \frac{M_2 x}{W_p G a} = \frac{M_2 x}{G I_p}, \quad (17)$$

где $I_p = 2 \pi a^3 h$ – полярный момент инерции оболочки; $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – модуль упругости при сдвиге.

Из шестого уравнения системы (2) и с учетом зависимостей (8), (11), (14) и $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} = 0$ определяется момент $M_{x\theta}$ действующий на выделенный элемент оболочки

$$M_{x\theta} = \frac{h^2}{24 \pi a^3} M_2. \quad (18)$$

При кручении оболочки с защемленными концами (рис. 6) возникают растягивающие усилия, направленные по образующей цилиндра.

Установим зависимость между вращающим моментом, действующим на оболочку M_2 и величиной растягивающих напряжений, направленных вдоль образующей цилиндра. Из соотношения $\psi l = a \varphi$ определяется угол закручивания ψ

$$\psi = a \varphi_0, \quad (19)$$

где $\varphi_0 = \frac{\varphi}{l}$ – угол закручивания на единицу длины оболочки.

Растяжение оболочки Δl при закручивании на угол ψ

$$\Delta l = l \varepsilon = \frac{l}{\cos \psi} - l \approx l \frac{\psi^2}{2}, \quad (20)$$

где ε – относительное удлинение оболочки, определяющееся из предыдущего равенства (20)

$$\varepsilon = \frac{\psi^2}{2} = \varphi_0^2 \frac{a^2}{2}. \quad (21)$$

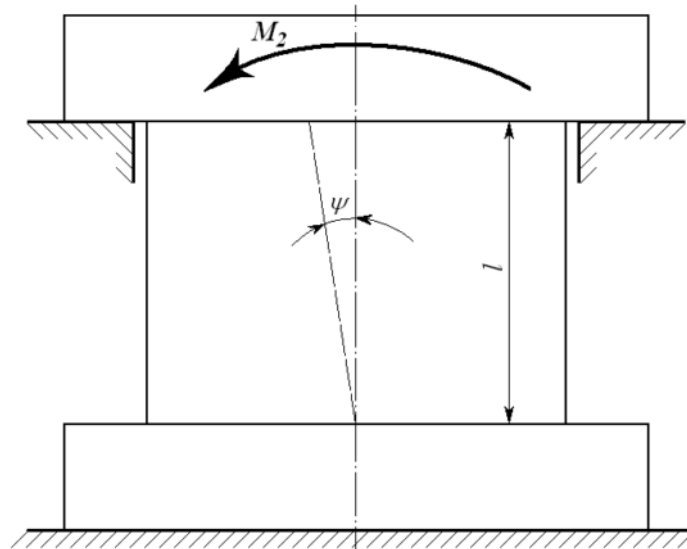


Рис. 6. Схема нагрузки оболочки вращающим моментом

В соответствии с законом Гука находим растягивающие напряжения в поперечных сечениях оболочки

$$\sigma = \varepsilon E = E \varphi_0^2 \frac{a^2}{2}. \quad (22)$$

Угол закручивания, приходящийся на единицу длины оболочки, можно выразить в следующем виде

$$\varphi_0 = \frac{M_2}{G I_p} = \frac{1 + \nu}{E \pi a^3 h} M_2. \quad (23)$$

Подставляя значение φ_0 из выражения (23) в уравнение (22), получим

$$\sigma = \frac{(1 + \nu)^2}{E \pi^2 a^4 h^2} M_2^2. \quad (24)$$

При достижении касательных напряжений τ максимально допустимых значений $[\tau]$ записываем выражение допустимого вращающего момента $[M_2]$, приложенного к оболочке

$$[M_2] = 2 \pi a^2 h [\tau]. \quad (25)$$

В соответствии с выражениями (24) и (25) получим формулу определения нормальных напряжений

$$\sigma = \frac{4(1 + \nu)^2}{E} [\tau]^2. \quad (26)$$

Для конструкционной стали: $E = 2,1 \cdot 10^4$ МПа; $\nu = 0,3$; $[\tau] = 100$ МПа. Из соотношения (26) определяем

$$\sigma = 0,325 \text{ МПа}, \text{ т. е. } \sigma = 0,32 \% [\tau].$$

Из полученных результатов следует, что растягивающие напряжения σ , возникающие в цилиндрической оболочке защемленной по торцам и нагруженной вращающим моментом M_2 , направленные вдоль образующей цилиндра, связаны с касательными напряжениями τ^2 постоянным коэффициентом $\frac{4(1+\nu)^2}{E} = 0,000322 \text{ 1/МПа}$.

Заключение

Выполненные исследования позволили реализовать поставленные задачи и установить следующее:

1. Разработать математическую модель напряженно – деформированного состояния цилиндрической оболочки гибкого колеса волновой зубчатой передачи, при нагрузке вращающим моментом M_2 , в условиях защемления оболочки по торцам, когда длина оболочки l остается постоянной ($l = const$).

2. Получены параметрические зависимости влияния геометрических соотношений конструкции оболочки и краевых условий на силовые факторы, приложенные к элементу оболочки гибкого колеса.

3. Растягивающие напряжения, возникающие в цилиндрической оболочке гибкого колеса, защемленной по торцам и нагруженной вращающим моментом M_2 , направленные вдоль образующей цилиндра, слишком малы и их можно не учитывать.

Список литературы:

1. Волков Д.П. Волновые зубчатые передачи / Д.П. Волков, А.Ф. Крайнев. – К.: Техника, 1976. – 224 с.
2. Гинзбург Е.Г. Волновые зубчатые передачи / Е.Г. Гинзбург. – Л.: Машиностроение, 1969. – 160 с.
3. Иванов М.Н. Волновые зубчатые передачи / М.Н. Иванов. – М.: Высшая школа, 1981. – 184 с.
4. Ковалёв Н.А. Передачи гибкими колёсами / Н.А. Ковалёв. – М.: Машиностроение, 1979. – 200 с.
5. Шувалов С. А. Расчёт волновых передач с учётом податливости звеньев / С.А. Шувалов // Вестник машиностроения. – 1974. - № 6. – С. 46 – 51.

Надійшла до редакції 11.02.2013.

В.М. Стрельников, Г.С. Суков, М.Г. Суков
НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНІЙ СТАН
ГНУЧКОГО КОЛЕСА У ВИГЛЯДІ
ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З
ЗАТИСНЕНИМИ ТОРЧАКАМИ

У статті викладено рішення задачі теорії пружності про напружено-деформований стан гнучкого колеса хвильової зубчатої передачі, яка представлена у вигляді циліндричної оболонки з затисненими торчачками.

Ключові слова: гнучке колесо, оболонка, сила, момент, переміщення, напруження.

V.N. Strelnikov, G.S. Sukov, M.G. Sukov
BUTT – FIXED – CYLINDRICAL - SHELL
FORM FLEXIBLE GEAR DEFLECTED
MODE

Elastic problem solving of butt-fixed-cylindrical-shell form wave gear flexible gear deflected mode is in the article.

Key words: flexible gear, shell, force, torque, movement, tension.