# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТЕНДА ДЛЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ НЕИЗМЕРЯЕМЫХ ПАРАМЕТРОВ ПОДВИЖНОГО МЕХАНИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА

Федоренко А. Н., группа СУА-09М
Руководитель проф. Ткаченко В.Н.

Постановка задачи. Для восстановления неизмеряемых параметров подвижного механического объекта чаще всего используются наблюдатели состояния. Достичь высокой точности результата восстановления возможно при условии наличия достоверной математической модели системы. Таким образом, ставиться задача построения математической модели стенда для восстановления неизмеряемых параметров подвижного механического объекта.

Существующие решения. Специализированные исследовательские стенды, производимые многими электротехническими фирмами, поставляются вместе с математической моделью, составленной с учетом особенностей кинематических связей между компонентами и внешних воздействий при перемещении рабочего механизма. Однако стоимость таких стендов многократно превышает стоимость комплектующих самого стенда.

Методика решения. Стенд для восстановления неизмеряемых параметров подвижного механического объекта (рис. 1) представляет собой подвижную платформу (1) с закрепленным на ней неустойчивым маятником (2). Маятник может свободно вращаться в вертикальной плоскости. Платформа передвигается по рельсам и приводится в движение двигателем постоянного тока (3) посредством передачи силы через соединительный трос. Управляющее воздействие задается системой стабилизации маятника (здесь не рассматривается) и формируется на основе данных о текущем положении платформы. На стенде установлены датчик тока якоря и датчик напряжения управления.

Восстановление параметров движения осуществляется наблюдателем состояния системы, поэтому модель системы должна отвечать условию наблюдаемости.

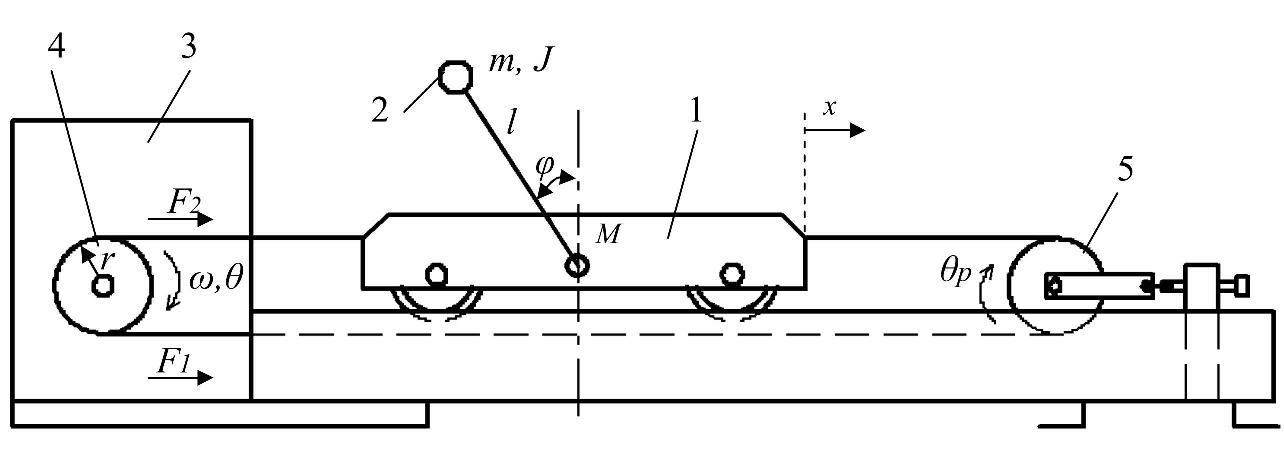


Рисунок 1 – Общий вид стенда

Рассматриваемая система состоит из следующих составляющих:

- платформа с маятником;
- двигатель.

Для получения общей математической модели системы необходимо получить модели всех ее компонентов.

Математическая модель платформы с маятником составлена на основании второго закона Ньютона для сил, действующих на платформу и маятник, и вращающих моментов маятника [1]:

$$(M+m)\ddot{x}+b\dot{x}-ml\ddot{\varphi}\cos\varphi+ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi=F(t), \tag{1}$$

$$(J+ml^2)\ddot{\varphi}-ml\ddot{x}\cos\varphi-mgl\sin\varphi=0, \tag{2}$$

где $m$ - масса маятника, $кг$; $M$ - масса платформы, $кг$; $g$ - ускорение свободного падения, $м/c^2$; $l$ - расстояние от точки крепления до центра тяжести маятника, $м$; $J$ - момент инерции маятника относительно его оси, $кг\cdot м^2$; $b$ - коэффициент трения качения платформы, $кг/c$; $F(t)$ - сила, действующая на платформу (управление), $H$; $x(t)$ - текущее положение платформы, $м$; $\varphi(t)$ - угол отклонения маятника от вертикали, $рад$.

Уравнения (1) и (2) являются нелинейными уравнениями. Линеаризацию системы можно провести в окрестности вертикального положения маятника $\varphi(t) \approx 0$, $\dot{\varphi}(t) \approx 0$, $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$. Тогда уравнения (1) и (2) преобразуются к виду:

$$(M+m)\ddot{x} + b\dot{x} - ml\ddot{\varphi} = F(t), \tag{3}$$

$$(J+ml^2)\ddot{\varphi} - ml\ddot{x} - mgl\varphi = 0. \tag{4}$$

Платформа приводится в движение двигателем постоянного тока с возбуждением от постоянных магнитов (ДПТПМ), поэтому обмотка возбуждения отсутствует. Рассматривая эквивалентную электрическую схему двигателя и используя закон Кирхгофа для напряжения [2], а также с учетом уравнения моментов [3] можно получить уравнения описывающие работу двигателя:

$$U_{УП} = L_Я \frac{di_Я}{dt} + R_Я i_Я + K_E\omega, \tag{5}$$

$$J\frac{d\omega}{dt} = K_E i_Я - K_b\omega - r(F_1 - F_2), \tag{6}$$

где $U_{УП}$ - напряжение управления, $В$; $R_Я$ - сопротивление обмотки якоря, $Ом$; $L_Я$ - индуктивность обмотки якоря, $Гн$; $\omega$ - частота вращения ротора, $рад/с$; $K_E$ - электромагнитный коэффициент двигателя, $Н/А$; $K_b$ - коэффициент трения вращения ротора, $кг/с$; $i_Я$ - ток в цепи якоря, $А$; $J$ - инерция нагрузки ротора двигателя, $кг \cdot м^2$; $r$ - радиус ролика 4 и 5 (рис. 1), $м$; $F_1 - F_2$ - разность сил натяжения, что соответствует силе, действующей на платформу, $Н$.

Заметим, что перемещение платформы $x = r\theta_P$, где $\theta_P$ - угол поворота валика 5 (рис. 1). Тогда уравнения для сил натяжения можно представить в виде:

$$F_1 = k(r\theta - r\theta_P) = k(r\theta - x), \tag{7}$$

$$F_2 = k(x - r\theta)\,, \tag{8}$$

где $k$ - коэффициент упругости троса, $\theta$ - угол поворота валика 4 (рис. 1).

Сила, действующая на платформу с маятником:

$$F_1 - F_2 = k(r\theta - x) - k(x - r\theta) = 2k(r\theta - x)\,. \tag{9}$$

Подставив выражение из (9) в уравнения (3-6) и выполнив преобразования, получим дифференциальные уравнения, описывающие рассматриваемую систему:

$$\begin{gathered}
\ddot{x} = -\frac{b(J+ml^2)}{Q}\dot{x} + \frac{m^2gl^2(M+m)}{Q}\varphi + 2kr\frac{J+ml^2}{Q}\theta - 2k\frac{J+ml^2}{Q}x = 0 \\
\ddot{\varphi} = -\frac{bml}{Q}\dot{x} + \frac{mgl(M+m)}{Q}\varphi + 2kr\frac{ml}{Q}\theta - 2k\frac{ml}{Q}x = 0 \\
\frac{di_{Я}}{dt} = -\frac{R_{Я}}{L_{Я}}i_{Я} - \frac{K_E}{L_{Я}}\omega + \frac{1}{L_{Я}}U_{УП} \\
\frac{d\omega}{dt} = \frac{K_E}{J}i_{Я} - \frac{K_b}{J}\omega - 2kr^2\theta + 2krx
\end{gathered} \tag{10}$$

Используя уравнения (10) можно составить модель стенда для восстановления неизмеряемых параметров подвижного механического объекта. Измеряемыми параметрами системы являются напряжение и ток в обмотке якоря двигателя, а восстанавливаемым параметром – текущее перемещение платформы. Поэтому для записи модели в переменных состояния примем компоненты вектора состояния в следующем виде: текущее перемещение платформы $x(t)$, скорость движения платформы $dx(t)/dt$, угол отклонения маятника $\varphi(t)$, скорость вращения маятника $d\varphi/dt$, ток в обмотке якоря двигателя $i_{Я}(t)$, угол поворота валика закрепленного на оси двигателя $\theta(t)$, скорость вращения вала двигателя $\omega(t)$. Тогда вектор состояния может быть записан в виде:

$$X(t) = [x \quad dx/dt \quad \varphi \quad d\varphi/dt \quad i_{Я} \quad \theta \quad \omega]^T\,. \tag{10}$$

Матрицы состояния A и управления B примут вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2k\dfrac{J+ml^2}{Q} & -\dfrac{b(J+ml^2)}{Q} & \dfrac{m^2gl^2(M+m)}{Q} & 0 & 0 & 2kr\dfrac{J+ml^2}{Q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2k\dfrac{ml}{Q} & -\dfrac{bml}{Q} & \dfrac{mgl(M+m)}{Q} & 0 & 0 & 2kr\dfrac{ml}{Q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{R_Я}{L_Я} & 0 & -\dfrac{K_E}{L_Я} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2kr & 0 & 0 & 0 & \dfrac{K_E}{J} & -2kr^2 & -\dfrac{K_b}{J} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{L_Я} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Проведя анализ полученной модели, можно говорить, что система отвечает условиям наблюдаемости и существует возможность построения наблюдателя состояния.

Выводы. Разработана математическая модель стенда для восстановления неизмеряемых параметров подвижного механического объекта. Исследована возможность построения наблюдателя состояния системы.

Перечень ссылок

1. Дорф Р., Бишоп Р.Современные системы управления. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2004. – 832 с.

2. Ключев В.И. Теория электропривода. Учебник для вузов. – 2-е изд. перераб. и доп. – М.:Энергоатомиздат, 2001. – 704 с.

3. Вольдек А.И., Попов В.В. Электрические машины. Введение в электромеханику. Машины постоянного тока и трансформаторы: Учебник для вузов. – СПб.: Питер, 2008. – 320 с.