

УДК: 539.3

Вовк Л.П., Кисіль К.С.

АНАЛІЗ СПЕКТРУ РЕЗОНАНСНИХ ЧАСТОТ ТЕРМОУПРУГИХ НЕОДНОРІДНИХ ОБЛАСТЕЙ С НЕГЛАДКОЮ ГРАНИЦЕЮ

Автомобільно-дорожній інститут ДВНЗ

„Донецкий національний технічний університет” м. Горлівка

У даній роботі було проведено чисельний аналіз спектра резонансних частот і власних форм коливань неоднорідної ізотропної пружної й термопружної областей, у випадку, коли перетин являє собою прямокутник. Розглядається залежність явища крайового резонансу від геометричних характеристик прямокутника. Проведено дослідження впливу пружних і термопружних характеристик матеріалів на спектр власних частот.

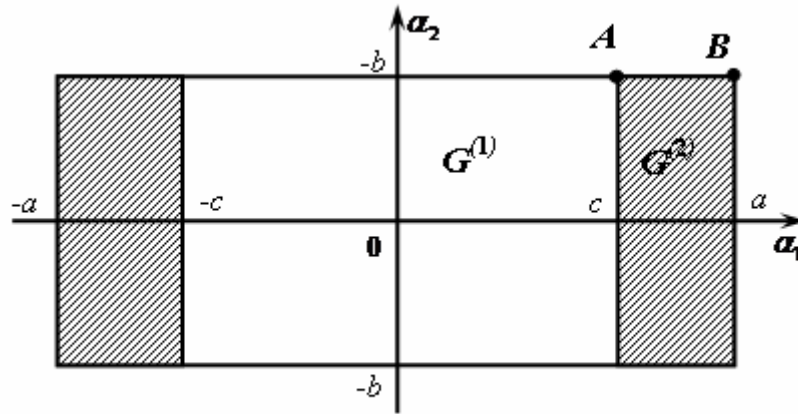
Ключові слова: термоупруга прямокутна область; крайовий резонанс; власні частоти.

In this work the numerical analysis of spectrum of resonance frequencies and own forms of vibrations of heterogeneous isotropic were conducted elastic and thermoelastic areas, in the case when a section is a rectangle. Dependence of the phenomenon of regional resonance is examined on geometrical descriptions of rectangle. Research of influence of elastic and thermoelastic descriptions of some isotropic materials is conducted on the spectrum of eigenfrequencies.

Keywords: rectangular thermoelastic area; regional resonance; eigenfrequencies.

Визначення характеру поведінки напружено-деформованого стану в околі нерегулярних точок зовнішніх і внутрішніх границь кусково-неоднорідних тіл дозволяє при чисельному аналізі найкращим чином апроксимувати рішення і побудувати інтегральний алгоритм його знаходження. Питанням дослідження рішень задач теорії пружності у околі кутових точок, які належать лініям розділу двох різнорідних середовищ присвячено досить багато наукових публікацій, серед яких відзначимо роботи [1-3]. Характер локальної особливості по напруженням у сингулярних точках сполучення трьох і чотирьох середовищ розглядалися у [4-5] отримані у цих роботах результати дають змогу, по-перше, розповсюдити відомий метод суперпозиції [6] на кусково-неоднорідні і термопружні області і, по-друге, дослідити вплив

термічних параметрів на локальну концентрацію напружень у нерегулярних зонах області.



Мал.1 Геометрія перерізу тіла

Нехай переріз деталі – деяка прямокутна область, яка займає в системі координат $\alpha_1 O \alpha_2$ область $D = G^{(1)} \cup G^{(2)}$ (мал.1). Області $G^{(m)}$ ($m = 1, 2$) зістиковано одна з одною. Вони є ізотропними, в загальному випадку мають різні пружні константи та визначаються нерівностями

$$G^{(1)} = \{(\alpha_1, \alpha_2) : |\alpha_1| \leq c; |\alpha_2| \leq b\}, G^{(2)} = \{(\alpha_1, \alpha_2) : \alpha_1 \in [-a, -c] \cup [c, a]; |\alpha_2| \leq b\},$$

де α_1, α_2 – декартові координати.

Нехай на границі області $\alpha_1 = \pm a$, $\alpha_2 = \pm b$ задано нормальне навантаження інтенсивності $q_1(\alpha_1)$ та $q_2(\alpha_2)$ відповідно, що гармонійно змінюється в часі з частотою ω . Передбачається, що дана область має вільний теплообмін з навколишнім середовищем. Безрозмірні амплітудні характеристики переміщень $U_i(x, y), i = 1, 2$ і приросту температури $\Theta(x, y)$ визначаються системою рівнянь зв'язаної термопружності в безрозмірних координатах для областей $G^{(1)}$ та $G^{(2)}$ відповідно[8]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_1^{(m)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1^{(m)}}{\partial y^2} + \left(1 + \frac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(m)}}\right) \left(\frac{\partial^2 U_1^{(m)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2^{(m)}}{\partial x \partial y} \right) &= \frac{\gamma^{(m)} T_0}{\mu^{(m)}} \cdot \frac{\partial \Theta^{(m)}}{\partial x} - \frac{\rho^{(m)} a^2 \omega^2}{\mu^{(m)}} U_1^{(m)} \\ \frac{\partial^2 U_2^{(m)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2^{(m)}}{\partial y^2} + \left(1 + \frac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(m)}}\right) \left(\frac{\partial^2 U_2^{(m)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_1^{(m)}}{\partial x \partial y} \right) &= \frac{\gamma^{(m)} T_0}{\mu^{(m)}} \cdot \frac{\partial \Theta^{(m)}}{\partial y} - \frac{\rho^{(m)} a^2 \omega^2}{\mu^{(m)}} U_2^{(m)} \\ \frac{\partial^2 \Theta^{(m)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta^{(m)}}{\partial y^2} - \frac{a^2 \omega^2}{\chi^{(m)}} \cdot \Theta^{(m)} - \frac{\delta^{(m)} a^2 i \omega}{T_0} \cdot \left(\frac{\partial U_1^{(m)}}{\partial x} + \frac{\partial U_2^{(m)}}{\partial y} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Тут були використані наступні позначення:

$$x = \frac{\alpha_{(1)}}{a}; y = \frac{\alpha_2}{a}; U_1^{(m)} = \frac{\tilde{U}_1^{(m)}}{a}; U_2^{(m)} = \frac{\tilde{U}_2^{(m)}}{a}; \Theta^{(m)} = \frac{\tilde{\Theta}^{(m)}}{T_0}; \sigma_{ij}^{(m)} = \frac{\tilde{\sigma}_{ij}^{(m)}}{\mu^{(m)}};$$

$$\tilde{\Theta}^{(m)} = T^{(m)} - T_0$$

$\tilde{U}_i^{(m)}(i, m=1,2)$ – компоненти вектора переміщень; $\tilde{\Theta}^{(m)}$ – приріст температури; $T^{(m)}$ – абсолютна температура точок тіла; T_0 – температура тіла у недеформованому і ненапруженому стані; $\rho^{(m)}$ – щільність; $\lambda^{(m)}, \mu^{(m)}$ – параметри Ляме,

$$\gamma^{(m)} = (3\lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)}) \cdot \alpha_t^{(m)}; \delta^{(m)} = \frac{\gamma^{(m)} T_0}{\lambda_0^{(m)}}; \chi^{(m)} = \frac{\lambda_0^{(m)}}{c_\varepsilon^{(m)}}, \text{ де}$$

$\alpha_t^{(m)}$ – коефіцієнт лінійного термічного розширення; $\lambda_0^{(m)}$ – коефіцієнт теплопровідності; $c_\varepsilon^{(m)}$ – питома теплоємність при постійній деформації.

При формулюванні граничних умов, враховуючи симетрію області, розглянемо напружений стан частини області, розташованої у першій чверті. Вводимо локальну безрозмірну координату

$$\hat{x} = \frac{(\alpha_1 - c)}{a}, \hat{x} \in [0, \delta_2]; \delta_2 = 1 - \delta, \delta = \frac{c}{a}$$

та безрозмірні амплітудні компоненти тензору напруги $\sigma_{\alpha\beta}^{(m)}$, пов'язані з переміщеннями законом Гука

$$\sigma_{11}^{(m)} = C_{11}^{(m)} U_{1,1}^{(m)} + C_{12}^{(m)} U_{2,2}^{(m)}, \quad \sigma_{22}^{(m)} = C_{12}^{(m)} U_{1,1}^{(m)} + C_{11}^{(m)} U_{2,2}^{(m)}, \quad \sigma_{12}^{(m)} = U_{1,2}^{(m)} + U_{2,1}^{(m)}, \quad \text{де}$$

$$C_{11}^{(1)} = 2 + \frac{\lambda^{(1)}}{\mu^{(1)}}, \quad C_{12}^{(m)} = C_{11}^{(m)} - 2.$$

Таким чином, граничні умови задачі запишуться наступним чином в безрозмірному вигляді:

$$\text{в області } \bar{G}^{(1)} = \{(x, y): |x| \leq \delta; |y| \leq \eta\}$$

$$\sigma_{1\beta}^{(1)}(\delta, y) = r_{21} \sigma_{1\beta}^{(2)}(0, y), \quad U_{\beta}^{(1)}(\delta, y) = U_{\beta}^{(2)}(0, y); \quad \sigma_{22}^{(1)}(x, \eta) = q_2^{(1)}(x), \quad \sigma_{12}^{(1)}(x, \eta) = 0$$

$$\frac{\partial \Theta^{(1)}}{\partial x} = \frac{\partial \Theta^{(2)}}{\partial \hat{x}}, \quad \Theta^{(1)} = \Theta^{(2)}, \quad \frac{\partial \Theta^{(1)}}{\partial y} + a \frac{\alpha^{(1)}}{\lambda_1^{(1)}} \Theta^{(1)} = 0$$

в області $\bar{G}^{(2)} = \{(\hat{x}, y) : 0 \leq \hat{x} \leq \delta_2; |y| \leq \eta\}$ (2)

$$\sigma_{11}^{(2)}(\delta_2, y) = q_1^{(2)}(y), \sigma_{12}^{(2)}(\delta_2, y) = 0; \sigma_{22}^{(2)}(\hat{x}, \eta) = q_2^{(2)}(\hat{x}), \sigma_{12}^{(2)}(\hat{x}, \eta) = 0$$

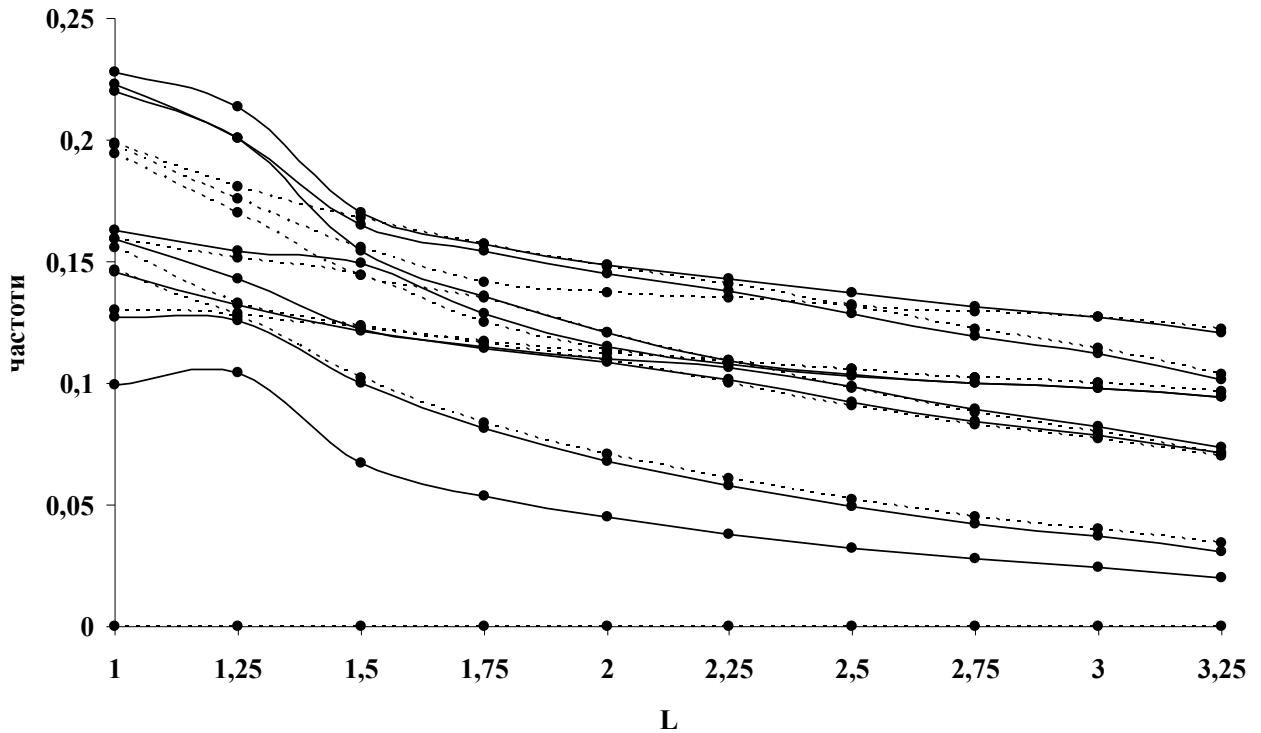
$$\frac{\partial \Theta^{(2)}}{\partial y} + a \frac{\alpha^{(2)}}{\lambda_1^{(2)}} \Theta^{(2)} = 0, \quad \frac{\partial \Theta^{(2)}}{\partial \hat{x}} + a \frac{\alpha^{(2)}}{\lambda_1^{(2)}} \Theta^{(2)} = 0, \quad \text{де } q_\beta^{(m)} = \frac{q_\beta}{\mu^{(m)}}, \quad \eta = \frac{b}{a}, \quad r_{12} = \frac{\mu^{(2)}}{\mu^{(1)}},$$

$\beta = 1, 2$; $\lambda_1^{(m)}$ - приведений коефіцієнт теплопровідності; $\alpha^{(m)}$ - коефіцієнт тепловіддачі.

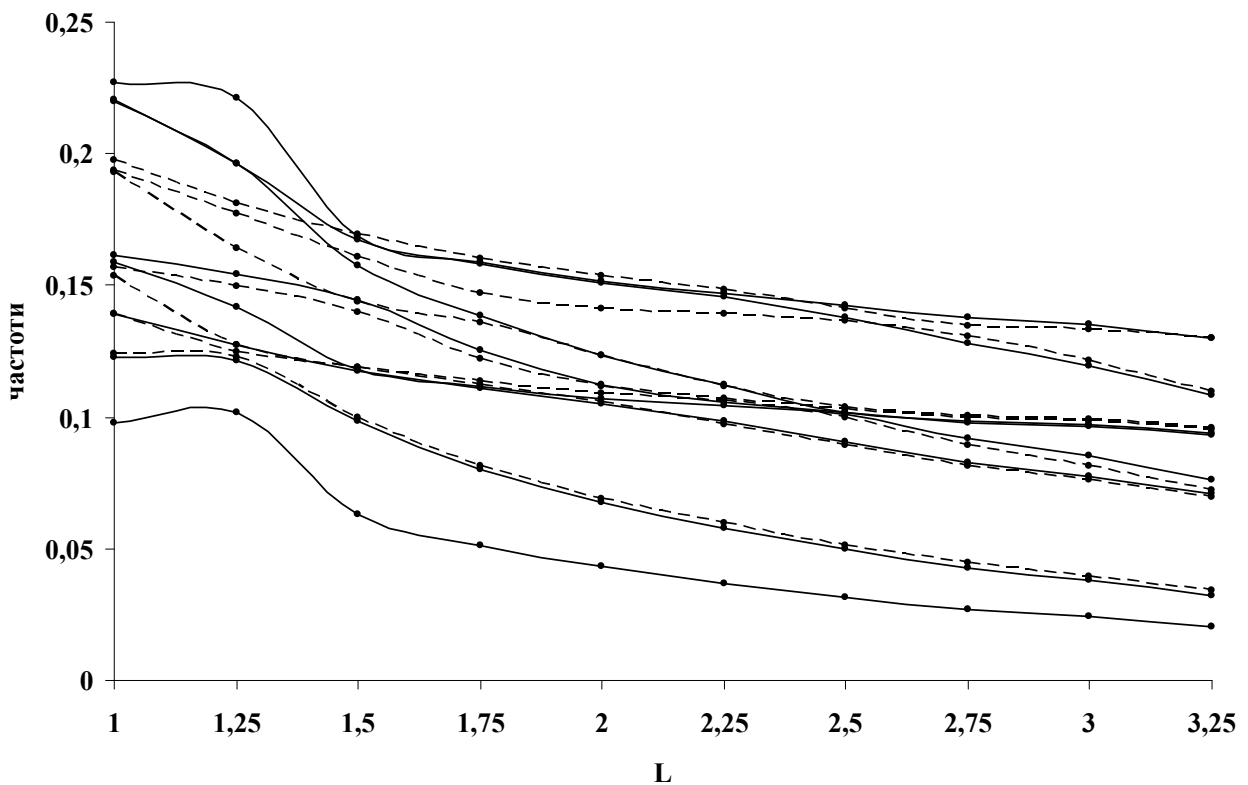
У даній роботі, використовуючи метод розв'язку, запропонований у праці А.В. Білоконя [7], граничну задачу (1)-(2) зведемо до системи інтегральних рівнянь. Безпосереднє виконання граничних умов (2) не дає можливості визначати в явному вигляді довільні постійні, що входять у загальний розв'язок задачі. Тому, дотримуючись алгоритму, розглянутого у роботах [7-9], замість сукупності граничних умов (2) розглянемо більш прості граничні умови, які звичайно, не відповідають початковій граничній задачі, однак дозволяють аналітично визначити довільні постійні в загальному розв'язку системи (1). У правих частинах допоміжних граничних умов будуть стояти невідомі функції, що задовольняють лише загальним вимогам (парність, безперервність, диференціюємість, та ін.). Повернення до вихідних граничних умов дає можливість визначити ці введені функції й остаточно одержати розв'язок початкової граничної задачі. Докладно алгоритм дослідження розглядається в роботах [10-13].

Почнемо чисельний аналіз з оцінки залежності явища крайового резонансу від зовнішніх розмірів перерізу (параметр $\eta = L^{-1}$). На малюнках 2-3 наведено графіки залежності резонансних частот від параметра L для неоднорідних перерізів: свинця(Pb, $G^{(1)}$)-сталі(St, $G^{(2)}$)-свинця(Pb, $G^{(1)}$) та свинця(Pb, $G^{(1)}$)-титану(Ti, $G^{(2)}$)-свинця(Pb, $G^{(1)}$). Преривчастою лінією позначено графіки залежності частот від параметра L для пружного, а сплошної, соответственно для термопружного матеріалів. Слід зазначити кількісну зміну (незначне збільшення) частот при збільшенні модуля зсуву для центрального матеріалу (St-Ti). Графічні залежності для пружного матеріалу відповідають

результатам, отриманим у роботах [4-5]. Крім того, у пружному випадку більш виражені ознаки крайового резонансу (наявність яскраво вираженого плато на спектрі (мал.2-3)), а у термопружному випадку відбувається їх «змазування».



Мал.2. Спектр резонансних частот для перерізу Pb – St - Pb



Мал.3. Спектр резонансних частот для перерізу Pb - Ti - Pb

У таблицях 1-2 наведено похибку обчислень резонансних частот для відповідних перерізів з термопружних матеріалів (Pb – St – Pb та Pb - Ti – Pb), (порівняно з відповідними пружними матеріалами) з якої виходить, що похибка обчислень зменшується при збільшенні параметра L, а також при збільшенні жорсткості використаного матеріалу.

**Похибка обчислення резонансних частот
для термопружного матеріалу (Pb – St - Pb)**

Таблиця 1

№ частоти	L=1	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50	2,75	3,00	3,25	3,50	3,75	4,00	4,25	4,50	4,75	5,00
4	-2,17	-0,94	-2,29	-3,00	-3,85	-4,80	-6,11	-7,58	-9,03	-11,52	-2,17	-0,94	-2,29	-3,00	-3,85	-4,80	-6,11
5	-0,53	3,21	-1,26	-1,78	-0,45	1,58	1,76	1,69	1,65	1,51	-0,53	3,21	-1,26	-1,78	-0,45	1,58	1,76
6	2,45	7,13	-1,07	-1,92	-2,21	-2,17	0,88	1,75	2,57	3,75	2,45	7,13	-1,07	-1,92	-2,21	-2,17	0,88
7	2,06	1,97	3,52	2,65	0,70	-1,24	-2,26	-2,24	-2,22	-2,19	2,06	1,97	3,52	2,65	0,70	-1,24	-2,26
8	11,77	15,18	6,45	0,33	-0,04	-0,31	-2,15	-2,23	-2,24	-2,23	11,77	15,18	6,45	0,33	-0,04	-0,31	-2,15
9	11,34	12,35	5,79	8,19	5,29	1,86	-2,13	-2,06	-1,99	-2,04	11,34	12,35	5,79	8,19	5,29	1,86	-2,13
10	12,98	15,37	1,34	0,21	0,54	1,63	3,28	1,36	-0,04	-1,33	12,98	15,37	1,34	0,21	0,54	1,63	3,28

**Похибка обчислення резонансних частот
для термопружного матеріалу (Pb - Ti - Pb)**

Таблиця 2

№ частоти	L=1	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50	2,75	3,00	3,25	3,50	3,75	4,00	4,25	4,50	4,75	5,00
4	-1,42	-1,29	-1,34	-1,68	-2,09	-2,54	-3,18	-3,88	-4,51	-5,68	-1,42	-1,29	-1,34	-1,68	-2,09	-2,54	-3,18
5	-0,05	2,25	-1,09	-1,35	-0,35	1,21	1,52	1,49	1,45	1,31	-0,05	2,25	-1,09	-1,35	-0,35	1,21	1,52
6	3,17	10,58	-0,36	-1,51	-1,82	-1,90	1,48	2,96	4,07	5,53	3,17	10,58	-0,36	-1,51	-1,82	-1,90	1,48
7	2,70	2,87	3,30	2,43	0,78	-1,17	-1,64	-1,92	-1,93	-1,92	2,70	2,87	3,30	2,43	0,78	-1,17	-1,64
8	12,32	16,28	8,57	1,89	0,39	0,76	-1,76	-1,90	-1,94	-1,96	12,32	16,28	8,57	1,89	0,39	0,76	-1,76
9	12,40	9,60	3,99	6,99	6,37	4,48	0,99	-1,70	-1,51	-1,50	12,40	9,60	3,99	6,99	6,37	4,48	0,99
10	13,16	18,22	-0,58	-1,20	-1,23	-0,87	1,03	2,53	1,40	-0,13	13,16	18,22	-0,58	-1,20	-1,23	-0,87	1,03

Можна сформулювати наступні висновки відносно особливостей спектру резонансних частот, справедливі для пружних і термопружних областей і підтвержені результатами чисельного аналізу. По-перше, термопружність матеріалу істотно ускладнює природу краєвого резонансу, оскільки плато не так яскраво виражені. По-друге, слід зазначити, що при зміні пружних характеристик матеріалу (зокрема збільшення його жорсткості) вплив «ефекту термопружності» стає менш вираженим, що підтверджує порівняльна

характеристика графіків зміни резонансних частот (мал. 2-3). Для випадку з більш «жорстким» матеріалом «всередині» з двох розглянутих (сталі та титану) плато в термопружному і пружному випадках практично однакові (мал.3). Даний висновок підтверджується й похибкою обчислення резонансних частот для титану (табл.2).

Визначення ПЛО у кутових точках перерізу областей дає можливість прогнозувати інтенсивність ЛКН у цих проблемних зонах і застосувати критерії міцності, беручи максимальні напруження саме в цих областях з урахуванням ПЛО.

Література:

1. Боджи Д. Действие поверхностных нагрузок на систему из двух соединенных вдоль одной из граней упругих клиньев, изготовленных из различных материалов и имеющих произвольные углы раствора // Тр. Амер. о-ва инженеров- механиков. Прикл. механика. 1971. Т. 38. №2. С. 87-96.
2. Вовк Л.П., Соболев Б.В. О концентрации волнового поля на границе раздела упругих сред // Прикладная математика и механика. – 2005. – Т. 69. – Вып. 2. – С. 269-278.
3. Вовк Л.П. Особенности локальной концентрации волнового поля на границе раздела упругих сред. – Донецк: Норд-Пресс, 2004. – 267с.
4. Вовк Л.П., Соболев Б.В. Особенности динамических напряжений в окрестности точки стыка трех упругих сред // Прикладная математика и механика. – 2005. – Т. 69. – Вып. 2. – С. 279-289.
5. Вовк Л.П. Анализ локальных особенностей волнового поля в сингулярных точках составной области // Вісник Сумського держ. університету. Сер. «Фізика, математика, механіка». – 2003. – №10(56). – С. 144-156.
6. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. – 283с.

7. Белоконь А.В. Об одном методе решения задач теории упругости для тел конечных размеров // Докл. АН СССР. – 1977. – Т. 233. – №1. – С. 56-59.
8. Вовк Л.П., Паригіна О.О. Застосування модифікованого методу Бубнова-Гальоркіна при розв'язку деяких динамічних задач теорії пружності // Тези доповідей VII-ї Міжнар. наук. конф. ім. акад. М.Кравчука. 14-16 травня 1998р. – Київ, 1998. – С. 97.
9. Вовк Л.П. Динамические задачи для тел сложной структуры. – Ростов-на-Дону: Ростовский гос. строит. ун-т, 2003. – 169с.
10. Вовк Л.П., Кисіль К.С. Якісний аналіз особливостей концентрації термічних напружень у деталях з нерегулярною границею // Вісті автомобільно-дорожнього інституту: Науково-виробничий збірник / АДІ ДонНТУ, Горлівка. – 2009. – №1 (8). – С.13-24.
11. Вовк Л.П., Кисіль К.С. Розв'язання крайових задач термопружних областей з негладкою границею. // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2009. – Том 14. – №4. – С.176-180.
12. Вовк Л.П., Кисель Е.С. Асимптотический метод исследования краевых задач теории термоупругости в областях с негладкой границей. – Материалы X-й Международной научно-практической конференции «Методы и алгоритмы прикладной математики в технике, медицине и экономике». – 26 февраля 2010г. – Новочеркасск: ЮРГТУ(НПИ). – 2010. – С.4-6.
13. Соболев Б.В., Вовк Л.П., Кисель Е.С. Обобщение метода суперпозиции решения краевых задач теории термоупругости для тел с нерегулярной границей // «Инновация, экология и ресурсосберегающие технологии на предприятиях машиностроения, авиастроения, транспорта и сельского хозяйства» Труды IX Международной научно-технической конференции. – Ростов н/Д: ИЦ ДГТУ, 2010 – С. 465-469.