ас. Кисіль К.С.
АДІ ДВНЗ ДонНТУ, м. Горлівка, Україна

МЕТОД СУПЕРПОЗИЦІЇ У РОЗРАХУНКУ ПРИЗМАТИЧНИХ ТЕРМОПРУЖНИХ ДЕТАЛЕЙ ПРЯМОКУТНОГО ПЕРЕРІЗУ

Загальновідомо, що наявність концентрації напруги може бути причиною руйнування матеріалу, отже аналіз концентрації напруги є вельми важливим і завжди актуальним питанням. Метою даної роботи служить узагальнення алгоритму методу суперпозиції для розрахунку призматичних термопружних деталей прямокутного перерізу з визначенням характеру напружено-деформованого стану у околу сингулярних кутових точок.

Розглянемо сталі симетричні коливання однорідної термопружної області, переріз якої представляється у вигляді прямокутної області $D=\{(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2):|\tilde{x}_1|\le a;|\tilde{x}_2|\le b\}$ де $\tilde{x}_1,\tilde{x}_2$ – декартові координати. На сторонах прямокутника $\tilde{x}_1=\pm a;\ \tilde{x}_2=\pm b$ задано нормальне навантаження інтенсивності $Q_1(\tilde{x}_1),\ Q_2(\tilde{x}_2)$ відповідно, що гармонійно змінюється в часі з частотою ω. Передбачається, що дана область має вільний теплообмін з навколишнім середовищем.

Безрозмірні амплітудні характеристики переміщень $U_i(x,y), i=1,2$ і приросту температури $\Theta(x,y)$ визначаються системою диференціальних рівнянь зв'язаної термопружності в частинних похідних [1]:

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}+\left(1+\frac{\lambda}{\mu}\right)\cdot\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_2}{\partial x\partial y}\right)=\frac{\gamma T_0}{\mu}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial x}-\frac{\rho a^2\omega^2}{\mu}U_1$$

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2}+\left(1+\frac{\lambda}{\mu}\right)\cdot\left(\frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U_1}{\partial x\partial y}\right)=\frac{\gamma T_0}{\mu}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial y}-\frac{\rho a^2\omega^2}{\mu}U_2 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}-\frac{a^2\omega i}{\chi}\Theta-\frac{\delta a^2 i\omega}{T_0}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}+\frac{\partial U_2}{\partial y}\right)=0$$

де $x=\frac{\tilde{x}_1}{a}$; $y=\frac{\tilde{x}_2}{a}$; $U_1=\frac{\tilde{U}_1}{a}$; $U_2=\frac{\tilde{U}_2}{a}$; $\Theta=\frac{\tilde{\Theta}}{T_0}$; $\sigma_{ij}=\frac{\tilde{\sigma}_{ij}}{\mu}$; $\tilde{\Theta}=T-T_0$,

$\tilde{U}_i,(i=1,2)$ – компоненти вектора переміщень; $\tilde{\Theta}$ - приріст температури;

T – абсолютна температура точок тіла; T_0 – температура тіла у недеформованому і ненапруженому стані; ρ – щільність; λ, μ – параметри Ляме, $\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha_t$; $\delta = \frac{\gamma T_0}{\lambda_0}$; $\chi = \frac{\lambda_0}{c_\varepsilon}$, де α_t – коефіцієнт лінійного термічного розширення; λ_0 – коефіцієнт теплопровідності; c_ε – питома теплоємність при постійній деформації.

Граничні умови сформульовані в безрозмірному вигляді:

Якщо $x = \pm 1$:
$$2\left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{3\nu}{1-2\nu}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y}\right) - \frac{1+\nu}{1-2\nu}a\Theta\right) = \frac{1}{\mu}\sigma_{11} = q_1(y)$$
$$\frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial U_2}{\partial x} = \frac{1}{\mu}\,q_2 = 0; \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial x} + a\frac{\alpha}{\lambda_1}\Theta = 0. \qquad (2)$$

Якщо $y = \pm\eta$, $\eta = \frac{b}{a}$:
$$2\left(\frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{3\nu}{1-2\nu}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y}\right) - \frac{1+\nu}{1-2\nu}a\Theta\right) = \frac{1}{\mu}\sigma_{22} = q_2(x)$$
$$\frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial U_2}{\partial x} = \frac{1}{\mu}\sigma_{12} = 0; \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial y} + a\frac{\alpha}{\lambda_1}\Theta = 0$$

λ_1 - приведений коефіцієнт теплопровідності;

α - коефіцієнт тепловіддачі.

Система диференціальних рівнянь (1) та граничні умови (2) формулюють відповідну крайову задачу відносно компонент вектора переміщень $\tilde{U}_i, (i = 1,2)$.

Нові граничні умови на відміну від початкової крайової задачі задають значення нормальних переміщень (функції $f_1(y), f_2(x)$), дотичних напружень і нормальних похідних від температури (функції $f_3(y), f_4(x)$) на границях прямокутника. Повернення до вихідної задачі приводить до системи інтегральних рівнянь (СІР) відносно введених додаткових функцій:

$$\sum_{\gamma=1}^{4} L_{m\gamma} f_\gamma = Q_\gamma,\ m = 1,2,3,4;\ \text{де},\ Q_\alpha = q_\alpha,\ \gamma = \alpha = 1,2;\ Q_\beta = -\frac{f_\beta}{T},\ \gamma = \beta = 3,4. \qquad (4)$$

Проводимо асимптотичний аналіз лівих частин СІР при наближенні до кутової точки, вважаючи, що поведінка невідомих функцій в околі кутових точок має степеневий характер і визначається показником локальної особливості (ПЛО) λ [1]. За умови відсутності особливості у правих частинах СІР отримуємо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - sin^2 \frac{\pi\lambda}{2} = 0 .$$

Враховуючи механічний зміст функцій $f_1(\xi), f_2(\xi)$ і вимагаючи обмеженості енергії усієї системи приходимо до висновку, що при побудуванні асимптотики рішення треба враховувати тільки один дійсний корінь $\lambda_0 = 1$ і безліч комплексних коренів $\lambda_k = \tau_k \pm i\sigma_k$ з додатною дійсною частиною [2]. Проведений асимптотичний аналіз дає підставу казати, що температура не має особливості у кутових точках області.

Після визначення додаткових функцій $f_1(y), f_2(x), f_3(y), f_4(x)$ з системи інтегральних рівнянь маємо змогу знайти усі невідомі крайової задачі та характеристики хвильового поля. Треба відзначити, що знаходження показників локальної особливості λ дає змогу дослідити напружено-деформований стан в усій області D, включаючи її кутові точки. Це приводить до ефективної оцінки концентрації динамічних напружень у околі цих точок, що обумовлює міцнісні характеристики усієї області.

Важливим напрямком подальшої роботи буде дослідження ПЛО для складених областей, що безумовно підвищить рівень практичного застосування запропонованої методики розрахунку. Перспективним має бути і аналіз розподілу внутрішньої енергії областей з урахуванням локальної концентрації напружень у околі нерегулярних точок границі.

Список літератури

1. Вовк Л.П. Особенности локальной концентрации волнового поля на границе раздела упругих сред. – Донецк: Норд-Пресс, 2004. – С.48.

2. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. Думка, 1981. – 284с.