УДК 539.3

Л.Вовк, доктор технічних наук; К.Кисіль, асистент
Автомобільно-дорожній інститут ДВНЗ
„Донецький національний технічний університет"
м. Горлівка, Україна

РОЗВЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТЕРМОПРУЖНИХ ОБЛАСТЕЙ З НЕГЛАДКОЮ ГРАНИЦЕЮ

Розглядається задача термодинамічної деформації деталей автотранспортних засобів, переріз яких має сингулярні точки, що зумовлює концентрацію напружень, яка і визначає міцність деталі в цілому. Проведено аналіз особливостей напружено-деформованого стану в околі нерегулярних точок границі області з урахуванням впливу переміщень на локальну концентрацію напружень. Математична модель задачі включає систему диференціальних рівнянь руху, граничні умови на бічній поверхні деталі перерізу. Аналітичний розв'язок задачі будується за допомогою модифікації методу суперпозиції.

L.Vovk; K.Kisel

SOLUTION OF BOUNDARY PROBLEM OF THERMOELASTIC AREAS WITH IRREGULAR BORDER

The task of thermodynamics deformation of details of vehicles the cut of which has irregular points is examined, that predetermines the concentration of tensions, which determines durability of detail on the whole. The analysis of features of the tensely deformed consisting is conducted of околі of irregular points of границі of area taking into account influence of moving on the local concentration of tensions. The mathematical model of task includes the system of differential equalizations of motion, maximum terms on the lateral surface of detail to the cut. The analytical decision of task is built by modification of method of superposition.

Інженерні методики міцнісного аналізу деталей машин у своїй більшості не враховують локальної концентрації напружень (ЛКН) у особливих зонах перерізу. Такі питання виникають при розрахунках роз'ємних та нероз'ємних з'єднань деталей автомобілів і розрахунку зубчастих зачеплень та основних видів механічних передач. Між тим саме в цих областях найчастіше спостерігається виникнення дефектів і їх розвиток. У зв'язку з цим можна стверджувати, що незалежно від обраного критерію міцності він обов'язково повинен враховувати саме максимальні напруження, які виникають у зонах ЛКН. Оскільки наявність ЛКН може бути причиною виходу деталі зі строю, то якісне і кількісне визначення міри концентрації є завжди важливим і актуальним питанням.

Розрахунок розподілу напружень у деталях автомобілів пов'язаний зі значними труднощами, які обумовлені складністю форми і внутрішньої структури деталей і умовами їх навантаження. Тому у наближених розрахунках частіше за все застосовують спрощенні моделі з експериментальною оцінкою їх ефективності, що зазвичай призводить до невірних висновків[1,2]. Огріхи критеріїв і розрахунків, що пропонуються, ще більше зростають, якщо необхідно розглянути динамічне деформування деталей, оскільки інтенсивність ЛКН у динамічних задачах суттєво зростає. Такі випадки виникають, наприклад, при розрахунках кривошипно-шатунних механізмів, міцності поршневих пальців двигунів внутрішнього згоряння

(ДВЗ), шатунних шийок колінчатого валу і т.д. Окрім того, з’являється необхідність врахування можливості проявлення резонансних ефектів.

Важлива особливість геометрії деталей, які підвержені ЛКН, обумовлена існуванням на границі їх перетину деяких сингулярних кутових точок, напружено-деформований стан (НДС) у околу яких і визначає міцність усієї деталі в цілому[3]. Тут також має місце поява нових хвильових ефектів, пов’язаних с концентрацією динамічних напружень. Аналіз наукових публікацій, присвячених даній проблемі[2-4], дозволяє стверджувати, що при дослідженні ЛКН у деталях ДВЗ, по-перше, не введено параметрів інтенсивності ЛКН, аналогічних широко відомим коефіцієнтам концентрації напружень і, по-друге, немає аналізу особливостей НДС у сингулярних зонах перетину деталей з урахуванням впливу температурних напружень на ЛКН.

Розглянемо сталі симетричні коливання однорідної термопружної області, переріз якої представляється у вигляді прямокутної області $D = \left\{ \left(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \right) : \left| \tilde{x}_1 \right| \le a; \left| \tilde{x}_2 \right| \le b \right\}$ де $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$ – декартові координати. На сторонах прямокутника $\tilde{x}_1 = \pm a;\ \tilde{x}_2 = \pm b$ задано переміщення $\Psi_1\left(\tilde{x}_1\right),\ \Psi_2\left(\tilde{x}_2\right)$ відповідно. Передбачається, що дана область має вільний теплообмін з навколишнім середовищем.

Безрозмірні амплітудні характеристики переміщень $U_i\left(x, y\right), i = 1,2$ і приросту температури $\Theta\left(x, y\right)$ визначаються системою диференціальних рівнянь зв'язаної термопружності в частинних похідних [5]:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right) \cdot \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\gamma T_0}{\mu} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial x} - \frac{\rho a^2 \omega^2}{\mu} U_1 \\
&\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} + \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right) \cdot \left(\frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\gamma T_0}{\mu} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial y} - \frac{\rho a^2 \omega^2}{\mu} U_2 \qquad (1) \\
&\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} - \frac{a^2 \omega i}{\chi} \Theta - \frac{\delta a^2 i \omega}{T_0} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y}\right) = 0
\end{aligned}
$$

де $x = \dfrac{\tilde{x}_1}{a}$; $y = \dfrac{\tilde{x}_2}{a}$; $U_1 = \dfrac{\tilde{U}_1}{a}$; $U_2 = \dfrac{\tilde{U}_2}{a}$; $\Theta = \dfrac{\tilde{\Theta}}{T_0}$; $\sigma_{ij} = \dfrac{\tilde{\sigma}_{ij}}{\mu}$; $\tilde{\Theta} = T - T_0$,

$\tilde{U}_i, \left(i = 1,2\right)$ – компоненти вектора переміщень; $\tilde{\Theta}$ - приріст температури;

T – абсолютна температура точок тіла; T_0 – температура тіла у недеформованому і ненапруженому стані; ρ – щільність; λ, μ – параметри Ляме, $\gamma = \left(3\lambda + 2\mu\right)\alpha_t$; $\delta = \dfrac{\gamma T_0}{\lambda_0}$; $\chi = \dfrac{\lambda_0}{c_\varepsilon}$, де α_t – коефіцієнт лінійного термічного розширення; λ_0 – коефіцієнт теплопровідності; c_ε – питома теплоємність при постійній деформації.

Граничні умови сформульовані в наступному вигляді:

Якщо $x = \pm 1$:

$$U_1(\pm 1, y) = \pm f_1(y), \qquad U_2(\pm 1, y) = \pm \psi_1(y), \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \alpha_t \frac{\alpha}{\lambda_1}\Theta = \psi_3(y) \tag{2}$$

Якщо $y = \pm \eta$, $\left(\eta = \frac{b}{a}\right)$:

$$U_2(x, \pm \eta) = \pm f_2(x), \qquad U_1(x, \pm \eta) = \pm \psi_2(x), \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \alpha_t \frac{\alpha}{\lambda_1}\Theta = \psi_4(x)$$

λ_1 - приведений коефіцієнт теплопровідності; α - коефіцієнт тепловіддачі.

Система диференціальних рівнянь (1) та граничні умови (2) формулюють відповідну крайову задачу відносно компонент вектора переміщень $\tilde{U}_i, (i = 1,2)$.

Застосовуючи методику модифікованого методу суперпозиції для отримання системи інтегральних рівнянь розглянемо допоміжну задачу яка характеризується системою рівнянь (1) та наступними граничними умовами на границі прямокутника:

$$U_1(\pm 1, y) = \pm f_1(y); \qquad U_2(x, \pm \eta) = \pm f_2(x)$$

$$\sigma_{12}(\pm 1, y) = \pm \varphi_1(y); \qquad \sigma_{12}(x, \pm \eta) = \pm \varphi_2(x) \tag{3}$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = \pm f_3(y), \text{ якщо } x = \pm 1; \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial y} = \pm f_4(x), \text{ якщо } y = \pm \eta.$$

Враховуємо, що $\varphi_1(y), \varphi_2(x)\ f_3(y), f_4(x)$ - невідомі функції, причому $\varphi_1(y) = -\varphi_1(y)$, $\varphi_2(x) = -\varphi_2(x)$, $f_3(y) = f_3(-y)$, $f_4(x) = f_4(-x)$, що виходить з характеру граничних умов (3). Допоміжна крайова задача (1), (3) не відповідає, звичайно, початковій граничній задачі, але припускає аналітичне рішення і дозволяє, по-перше, задовольнити частину початкових граничних умов і, по-друге, виразити усі характеристики початкової задачі через коефіцієнти Фур'є невідомих функцій $\varphi_1(y), \varphi_2(x), f_3(y), f_4(x)$.

Розв'язуючи допоміжну задачу (1)-(3) та приймаючи до уваги не використані граничні умови (2), зведемо задачу до системи інтегральних рівнянь, позначивши $T = a_t \frac{\alpha}{\lambda_1}$:

$$L_{13} f_3 + L_{14} f_4 + L_{15}\varphi_1 + L_{16}\varphi_2 = \psi_1 - (L_{11} f_1 + L_{12} f_2)$$

$$L_{23} f_3 + L_{24} f_4 + L_{25}\varphi_1 + L_{26}\varphi_2 = \psi_2 - (L_{21} f_1 + L_{22} f_2) \tag{4}$$

$$L_{31} f_1 + L_{32} f_2 + L_{33} f_3 + L_{34} f_4 + L_{35}\varphi_1 + L_{36}\varphi_2 = \frac{1}{T}(\psi_3 - f_3)$$

$$L_{41}f_1+L_{42}f_2+L_{43}f_3+L_{44}f_4+L_{45}\varphi_1+L_{46}\varphi_2=\frac{1}{T}\left(\psi_4-f_4\right)$$

Оператори $L_{m\gamma}$, де $m=\overline{1,4}$, $\gamma=\overline{3,6}$ визначаються за формулами:

$$L_{13}f_3=\sum_{k=1}^{\infty}\Delta_{13k}\,sin\,\alpha_k\left(y-\eta\right)\frac{1}{\eta}\int_{-\eta}^{\eta}f_{3k}\,cos\,\alpha_k\left(\xi-\eta\right)d\xi\,,\ L_{14}f_4=\sum_{j=1}^{\infty}\Delta_{14j}\int_{-1}^{1}f_{4j}\,cos\,\beta_j\left(\xi-1\right)d\xi$$

$$L_{15}\varphi_1=\sum_{k=1}^{\infty}\Delta_{15k}\,sin\,\alpha_k\left(y-\eta\right)\frac{1}{\eta}\int_{-\eta}^{\eta}\varphi_{1k}\,cos\,\alpha_k\left(\xi-\eta\right)d\xi\,,\ L_{16}\varphi_2=\sum_{j=1}^{\infty}\Delta_{16j}\int_{-1}^{1}\varphi_{2j}\,cos\,\beta_j\left(\xi-1\right)d\xi \text{ і т.д.}$$

Де $\Delta_{13k}\sim\frac{1}{\alpha_k^2}\cdot\frac{\Theta_1}{2\left(E_1+1\right)}$, $\Delta_{14j}\sim e^{-\beta_j(\eta-y)}\left(\eta-y\right)\cdot\frac{1}{2\beta_j}\cdot\frac{\Theta_1}{E_1+1}$, $\Delta_{15k}\sim\frac{1}{\alpha_k}\cdot\frac{E_1}{2\left(E_1+1\right)}$ і т.д.

Розклавши гіперболічні і тригонометричні функції, що входять в у структуру операторів $L_{m\gamma}$ за тригонометричними функціями $cos\,\alpha_k\left(y-\eta\right)$, $sin\,\alpha_k\left(y-\eta\right)$, $cos\,\beta_j\left(x-1\right)$, $sin\,\beta_j\left(x-1\right)$, зведемо (4) до нескінченної системи алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів Фур'є $f_{3k}, f_{4j}, \varphi_{1k}, \varphi_{2j}$. Для ефективного розв'язку системи досліджуємо поведінку функцій $f_3\left(y\right), f_4\left(x\right), \varphi_1(x), \varphi_2(y)$ в кутових точках прямокутника. Припустимо, функції $f_3\left(\xi\right), f_4\left(\xi\right), \varphi_1(x), \varphi_2(y)$ мають особливість в кутових точках, тобто

$$f_3\left(\xi\right)\underset{\xi\to\pm\eta}{\longrightarrow}\pm C\left(\eta\mp\xi\right)^{\lambda-1};\ f_4\left(\xi\right)\underset{\xi\to\pm1}{\longrightarrow}\pm D\left(1\mp\xi\right)^{\lambda-1},$$

$$\varphi_1\left(\xi\right)\underset{\xi\to\pm\eta}{\longrightarrow}\pm G\left(\eta\mp\xi\right)^{\beta-1};\ \varphi_2\left(\xi\right)\underset{\xi\to\pm1}{\longrightarrow}\pm I\left(1\mp\xi\right)^{\beta-1}.$$

λ, β - параметри, що характеризують особливості функцій $f_3\left(\xi\right)$, $f_4\left(\xi\right)$, $\varphi_1\left(\xi\right)$, $\varphi_2\left(\xi\right)$, а C, D, G, I - довільні постійні. Проводимо асимптотичний аналіз лівих частин СІР(4) при наближенні до кутової точки [6]. Маємо:

$$L_{13}f_3+L_{14}f_4+L_{15}\varphi_1+L_{16}\varphi_2=C\frac{\Theta_1}{2\left(E_1+1\right)}(1-x)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\alpha_k(1-x)}}{\alpha_k^{\lambda+1}}+D\frac{\Theta_1}{2\left(E_1+1\right)}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{sin\,\beta_j\left(1-x\right)}{\beta_j^{\lambda+2}}+$$

$$+G\frac{E_1}{2\left(E_1+1\right)}(1-x)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\alpha_k(1-x)}}{\alpha_k^{\beta}}+I\frac{E_1}{2\left(E_1+1\right)}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{sin\,\beta_j\left(1-x\right)}{\beta_j^{\beta+1}}=0$$

$$L_{23}f_3+L_{24}f_4+L_{25}\varphi_1+L_{26}\varphi_2=C\frac{\Theta_1}{2\left(E_1+1\right)}\frac{1}{\eta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{sin\,\alpha_k\left(\eta-y\right)}{\alpha_k^{\lambda+2}}+D\frac{\Theta_1}{2\left(E_1+1\right)}\left(\eta-y\right)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{e^{-\beta_j(\eta-y)}}{\beta_j^{\lambda+1}}+$$

$$+G\frac{E_1}{2\left(E_1+1\right)}\frac{1}{\eta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{sin\,\alpha_k\left(\eta-y\right)}{\alpha_k^{\beta+1}}+I\frac{E_1}{2\left(E_1+1\right)}\left(\eta-y\right)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{e^{-\beta_j(\eta-y)}}{\beta_j^{\beta}}=0$$

$$L_{33}f_3+L_{34}f_4+L_{35}\varphi_1+L_{36}\varphi_2=-C\left(\frac{T}{\eta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{cos\,\alpha_k\left(\eta-y\right)}{\alpha_k^{\lambda+1}}-\frac{1}{\eta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{cos\,\alpha_k\left(\eta-y\right)}{\alpha_k^{\lambda}}\right)+$$

$$+DT\left(-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{e^{-\beta_j(\eta-y)}}{\beta_j^{\lambda+1}}-\frac{1}{2}(\eta-y)\left(\Omega_2+\frac{\Theta_1\Omega_1}{(E_1+1)}\right)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{e^{-\beta_j(\eta-y)}}{\beta_j^{\lambda+2}}\right)+G\left(\frac{T}{\eta}\cdot\frac{\Omega_1}{2(E_1+1)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\alpha_k(\eta-y)}{\alpha_k^{\beta+2}}\right)+$$

$$+IT\frac{\Omega_1}{(E_1+1)}\cdot\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{e^{-\beta_j(\eta-y)}}{\beta_j^{\beta+2}}-(\eta-y)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{e^{-\beta_j(\eta-y)}}{\beta_j^{\beta+1}}\right)=0$$

$$L_{43}f_3+L_{44}f_4+L_{45}\varphi_1+L_{46}\varphi_2=CT\left(-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\alpha_k(1-x)}}{\alpha_k^{\lambda+1}}-\frac{1}{2}(1-x)\left(\Omega_2+\frac{\Theta_1\Omega_1}{(E_1+1)}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\alpha_k(1-x)}}{\alpha_k^{\lambda+2}}\right)+$$

$$-D\left(T\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\cos\beta_j(1-x)}{\beta_j^{\lambda+1}}-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\cos\beta_j(1-x)}{\beta_j^{\lambda}}\right)+GT\frac{\Omega_1}{(E_1+1)}\cdot\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\alpha_k(1-x)}}{\alpha_k^{\beta+2}}-(1-x)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\alpha_k(1-x)}}{\alpha_k^{\beta+1}}\right)+$$

$$+IT\left(\frac{\Omega_1}{2(E_1+1)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\beta_j(1-x)}{\beta_j^{\beta+2}}\right)=0$$

після сумування рядів отримаємо систему для визначення параметрів λ,β :

$$\begin{cases}G\beta+I\sin\frac{\pi\beta}{2}=0\\ I\beta+G\sin\frac{\pi\beta}{2}=0\\ C\lambda\sin\frac{\pi\lambda}{2}=0\\ D\lambda\sin\frac{\pi\lambda}{2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}G\beta+I\sin\frac{\pi\beta}{2}=0\\ I\beta+G\sin\frac{\pi\beta}{2}=0\end{cases}$$

З умови існування нетривіального рішення перших двох рівнянь даної системи отримаємо характеристичне рівняння для визначення параметра β :

$$\beta^2-\sin^2\frac{\pi\beta}{2}=0 \tag{5}$$

Характеристичне рівняння (5) має один дійсний корінь $\beta_0=1$ і безліч комплексних коренів $\beta_k=\tau_k\pm i\sigma_k$ [1, 2]. Звичайно, треба врахувати лише ті комплексні корені, для яких Re $\beta_k>1$. Раніше у роботі Вільямса [7] для різних граничних умов було досліджено залежність порядку сингулярності поля статичних напружень у вершині клину від його куту роствору. Рівняння (5) відповідає рівнянню (15) цієї роботи для клину з незакріпленими гранями и кутом роствору 90^0. Як бачимо, характер особливості механічного поля у кутовій точці не залежить від пружних параметрів області перерізу.

Враховуючи механічний зміст функцій $\varphi_1(\xi),\varphi_2(\xi)$ і вимагаючи обмеженості енергії усієї системи приходимо до висновку, що при побудуванні асимптотики рішення треба враховувати тільки один дійсний корінь $\beta_0=1$ і безліч комплексних коренів $\beta_k=\tau_k\pm i\sigma_k$ з додатною дійсною частиною.

Два останні рівняння системи дають підставу казати, що температура не має особливості у кутових точках області, оскільки $D = C = 0$.

Після визначення додаткових функцій $f_3(y), f_4(x), \varphi_1(x), \varphi_2(y)$ з системи інтегральних рівнянь (4) маємо змогу знайти усі невідомі крайової задачі (1)-(2) і усі характеристики хвильового поля.

Висновки. Треба відзначити, що знаходження показників локальної особливості β дає змогу дослідити напружено-деформований стан в усій області D, включаючи її кутові точки. Це в свою чергу приводить до ефективної оцінки концентрації динамічних напружень у околі цих точок, що обумовлює міцнісні характеристики усієї області.

Запропонований метод дає змогу розглядати усі можливі варіації граничних умов як у зміщеннях, так і в напруженнях, включаючи мішані крайові задачі [6]. Для цього треба інакше формулювати допоміжні задачі і звичайно вводити інші невідомі функції СІР.

Література

1. Гринченко В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах/ В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко – К.: Наук. думка, 1981. – 284с.
2. Вовк Л.П. Исследование динамических эффектов, возникающих при вибронагружении стыковых паяных соединений/ Л.П. Вовк// Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки. – 2004. – №1. – С. 60-64.
3. Белоконь А.В. Об одном методе решения задач теории упругости для тел конечных размеров/ А.В. Белоконь// Докл. АН СССР. – 1977. – Т. 233. – №1. – С. 56-59.
4. Локальные резонансы в слоистых средах/ А.А. Лямин, М.Г. Селезнев и др. – М.: ГНИЦ ПГК МО РФ, 2000. – 175с.
5. Подстригач Я.С. Обобщенная термомеханика/ Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно — Киев: Наукова думка, 1976. — 312 с.
6. Вовк Л.П., Вісті Автомобільно-дорожнього інституту: науково виробничий збірник/ Л.П. Вовк, К.С. Кисіль/ АДІ ДВНЗ «ДонНТУ». – Горлівка, 2009. - №1(8). – С. 13-23.
7. Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plate in extension/ M.L. Williams// J. Appl. Mech. – 1952. – Vol. 19. – №4. – P. 526-528.