Вовк Л.П., Кисіль К.С.
АДІ ДВНЗ ДонНТУ, м. Горлівка, Україна

Асимптотичний аналіз крайових задач еліптичного типу для областей з негладкою границею

Ключові слова: термопружна область, метод суперпозиції, сингулярні точки

Раніше [1, 2] було побудовано модифікацію методу суперпозиції для дослідження крайових задач гармонічних коливань пружних ізотропних областей з негладкою границею. Щодо узагальнення цього методу на термопружні області, то подібні модифікації на даний час невідомі.

Метою даної роботи є побудова нового методу розв'язання крайових задач коливань кінцевих ізотропних термопружних областей з негладкою границею, який будується на асимптотичному аналізі поведінки невідомих функцій у сингулярних точках границі. Це дає змогу запропонувати ефективний алгоритм розв’язання визначальної системи інтегральних рівнянь, який може бути застосований для широкого класу крайових задач еліптичного типу.

Розглянемо сталі симетричні коливання однорідної термопружної області, переріз якої представляється у вигляді прямокутної області $D=\left\{\left(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2\right):\left|\tilde{x}_1\right|\le a;\left|\tilde{x}_2\right|\le b\right\}$ де $\tilde{x}_1,\tilde{x}_2$ – декартові координати. На сторонах прямокутника $\tilde{x}_1=\pm a;\ \tilde{x}_2=\pm b$ задано нормальне навантаження інтенсивності $Q_1\left(\tilde{x}_1\right),\ Q_2\left(\tilde{x}_2\right)$ відповідно, що гармонійно змінюється в часі з частотою ω. Передбачається, що дана область має вільний теплообмін з навколишнім середовищем.

Безрозмірні амплітудні характеристики переміщень $U_i\left(x,y\right), i=1,2$ і приросту температури $\Theta\left(x,y\right)$ визначаються системою диференціальних рівнянь зв'язаної термопружності в частинних похідних [3]:

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}+\left(1+\frac{\lambda}{\mu}\right)\cdot\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_2}{\partial x\partial y}\right)=\frac{\gamma T_0}{\mu}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial x}-\frac{\rho a^2\omega^2}{\mu}U_1$$

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2}+\left(1+\frac{\lambda}{\mu}\right)\cdot\left(\frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U_1}{\partial x\partial y}\right)=\frac{\gamma T_0}{\mu}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial y}-\frac{\rho a^2\omega^2}{\mu}U_2 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}-\frac{a^2\omega i}{\chi}\Theta-\frac{\delta a^2 i\omega}{T_0}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}+\frac{\partial U_2}{\partial y}\right)=0$$

де $x=\frac{\tilde{x}_1}{a}$; $y=\frac{\tilde{x}_2}{a}$; $U_1=\frac{\tilde{U}_1}{a}$; $U_2=\frac{\tilde{U}_2}{a}$; $\Theta=\frac{\tilde{\Theta}}{T_0}$; $\sigma_{ij}=\frac{\tilde{\sigma}_{ij}}{\mu}$; $\tilde{\Theta}=T-T_0$,

$\tilde{U}_i,(i=1,2)$ – компоненти вектора переміщень; $\tilde{\Theta}$ - приріст температури; T – абсолютна температура точок тіла; T_0 – температура тіла у недеформованому і ненапруженому стані; ρ – щільність; λ,μ – параметри Ляме, $\gamma=(3\lambda+2\mu)\alpha_t$; $\delta=\frac{\gamma T_0}{\lambda_0}$; $\chi=\frac{\lambda_0}{c_\varepsilon}$,

де α_t – коефіцієнт лінійного термічного розширення; λ_0 – коефіцієнт теплопровідності; c_ε – питома теплоємність при постійній деформації.

Граничні умови сформульовані в безрозмірному вигляді:

Якщо $x=\pm1$:

$$2\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}+\frac{3\nu}{1-2\nu}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}+\frac{\partial U_2}{\partial y}\right)-\frac{1+\nu}{1-2\nu}a\Theta\right)=\frac{1}{\mu}\sigma_{11}=q_1(y)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial y}+\frac{\partial U_2}{\partial x}=\frac{1}{\mu}\,q_2=0;\qquad \frac{\partial\Theta}{\partial x}+a\frac{\alpha}{\lambda_1}\Theta=0. \qquad (2)$$

Якщо $y=\pm\eta$, $\left(\eta=\frac{b}{a}\right)$:

$$2\left(\frac{\partial U_2}{\partial y}+\frac{3\nu}{1-2\nu}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}+\frac{\partial U_2}{\partial y}\right)-\frac{1+\nu}{1-2\nu}a\Theta\right)=\frac{1}{\mu}\sigma_{22}=q_2(x)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial y}+\frac{\partial U_2}{\partial x}=\frac{1}{\mu}\sigma_{12}=0;\qquad \frac{\partial\Theta}{\partial y}+a\frac{\alpha}{\lambda_1}\Theta=0$$

λ_1 - приведений коефіцієнт теплопровідності; α - коефіцієнт тепловіддачі.

Система диференціальних рівнянь (1) та граничні умови (2) формулюють відповідну крайову задачу відносно компонент вектора переміщень $\tilde{U}_i,(i=1,2)$.

Застосовуючи методику модифікованого методу суперпозиції для отримання системи інтегральних рівнянь розглянемо допоміжну задачу яка характеризується системою рівнянь (1) та наступними граничними умовами на границі прямокутника:

$$U_1(\pm1,y)=\pm f_1(y);\qquad U_2(x,\pm\eta)=\pm f_2(x)$$

$$\sigma_{12}(\pm1,y)=0;\qquad \sigma_{12}(x,\pm\eta)=0 \qquad (3)$$

$\frac{\partial\Theta}{\partial x} = f_3(y)$, якщо $x = \pm 1$; $\frac{\partial\Theta}{\partial y} = f_4(x)$, якщо $y = \pm\eta$.

Враховуємо, що $f_1(y), f_2(x), f_3(y), f_4(x)$ - невідомі функції, причому $f_1(y) = f_1(-y)$, $f_2(x) = f_2(-x)$, $f_3(y) = f_3(-y)$, $f_4(x) = f_4(-x)$, що виходить з характеру граничних умов (3). Допоміжна крайова задача (1),(3) не відповідає, звичайно початковій граничній задачі, але припускає аналітичне рішення і дозволяє, по-перше, задовольнити частину початкових граничних умов і, по-друге, виразити усі характеристики початкової задачі через коефіцієнти Фур'є невідомих функцій $f_1(y), f_2(x), f_3(y), f_4(x)$.

Розв'язуючи допоміжну задачу (1)-(3) та приймаючи до уваги не використані граничні умови (2), зведемо задачу до системи інтегральних рівнянь:

$$\sum_{\gamma=1}^{4} L_{m\gamma} f_\gamma = Q_\gamma,\ m = 1,2,3,4; \text{ де, } Q_\alpha = q_\alpha,\ \gamma = \alpha = 1,2;\ Q_\beta = -\frac{f_\beta}{T},\ \gamma = \beta = 3,4. \qquad (4)$$

Оператори $L_{m\gamma}$ визначаються за формулами:

$$L_{11} f_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\alpha_k}{\Omega^2} \Delta_{11k} \cos\alpha_k (y-\eta) \frac{1}{\eta} \int_{-\eta}^{\eta} f_{1k} \cos\alpha_k (\xi-\eta) d\xi + (E_1+1) k_1 ctgk_1 \frac{1}{2\eta} \int_{-\eta}^{\eta} f_{1k}(\xi) d\xi$$

$$L_{12} f_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\beta_j}{\Omega^2} \Delta_{12j} \int_{-1}^{1} f_{2j} \cos\beta_j (\xi-1) d\xi + (E_1-1) k_2 \frac{\cos(k_2 y)}{\sin(k_2\eta)} \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f_{2j}(\xi) d\xi \text{ і т.д.}$$

Розклавши гіперболічні і тригонометричні функції, що входять в у структуру операторів $L_{\alpha\gamma}$ за тригонометричними функціями $\cos\alpha_k(y-\eta)$, $\sin\alpha_k(y-\eta)$, $\cos\beta_j(x-1)$, $\sin\beta_j(x-1)$, зведемо (4) до нескінченної системи алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів Фур'є $f_{1k}, f_{2j}, f_{3k}, f_{4j}$. Для ефективного розв'язку системи досліджуємо поведінку функцій $f_1(y), f_2(x), f_3(y), f_4(x)$ в кутових точках прямокутника. Припустимо, що функції $f_1(\xi), f_2(\xi)$ неперервні в даній області, а їх похідні мають особливість в кутових точках, тобто $f_1'(\xi) \underset{\xi\to\pm\eta}{\longrightarrow} \pm A(\eta \mp \xi)^{\lambda-1}$; $f_2'(\xi) \underset{\xi\to\pm 1}{\longrightarrow} \pm B(1 \mp \xi)^{\lambda-1}$;

функції $f_3(\xi), f_4(\xi)$ мають особливість в кутових точках, тобто

$$f_3(\xi) \underset{\xi\to\pm\eta}{\longrightarrow} \pm C(\eta \mp \xi)^{\beta-1};\ f_4(\xi) \underset{\xi\to\pm 1}{\longrightarrow} \pm D(1 \mp \xi)^{\beta-1}.$$

λ, β - параметри, що характеризують особливості функцій $f_1(\xi), f_2(\xi)$, $f_3(\xi)$, $f_4(\xi)$, а A, B, C, D - довільні постійні. Проводимо асимптотичний аналіз лівих частин СІР(4) при наближенні до кутової точки. Позначимо $T = \frac{\alpha}{\lambda_1} a$. Маємо:

$$L_{11}f_1 + L_{12}f_2 + L_{13}f + L_{14}f = \frac{2E_1}{(E_1+1)\eta} A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{cos\,\alpha_k(\eta - y)}{\alpha_k^{\lambda}} + \frac{2E_1}{(E_1+1)} B\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta_j(\eta-y)}}{\beta_j^{\lambda}} - (\eta - y)\sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta_j(\eta-y)}}{\beta_j^{\lambda-1}}\right) +$$

$$+ \frac{E_1\Theta_1}{(E_1+1)\eta} C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{cos\,\alpha_k(\eta-y)}{\alpha_k^{\beta+1}} + \frac{\Theta_1}{(E_1+1)} D\left(E_1 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta_j(\eta-y)}}{\beta_j^{\beta}} + (\eta - y)\sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta_j(\eta-y)}}{\beta_j^{\beta+1}}\right) = 0$$

$$L_{21}f_1 + L_{22}f_2 + L_{23}f_3 + L_{24}f_4 = \frac{2E_1}{(E_1+1)\eta} A\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_k(1-x)}}{\alpha_k^{\lambda}} - (1-x)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_k(1-x)}}{\alpha_k^{\lambda-1}}\right) +$$

$$+ \frac{2E_1}{(E_1+1)} B \sum_{j=1}^{\infty} \frac{cos\,\beta_j(1-x)}{\beta_j^{\lambda}} +$$

$$+ \frac{\Theta_1}{(E_1+1)\eta} C\left(E_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_k(1-x)}}{\alpha_k^{\beta+1}} + (1-x)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_k(1-x)}}{\alpha_k^{\beta+1}}\right) + \frac{E_1\Theta_1}{(E_1+1)} D \sum_{j=1}^{\infty} \frac{cos\,\beta_j(1-x)}{\beta_j^{\beta+1}} = 0$$

$$\frac{-\Omega_1 T}{(E_1+1)\eta} A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{cos\,\alpha_k(\eta-y)}{\alpha_k^{\alpha+1}} + C\frac{1}{\eta}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{cos\,\alpha_k(\eta-y)}{\alpha_k^{\beta+1}}(T+1)\right) +$$

$$+ \frac{-\Omega_1 T}{(E_1+1)} B\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta_j(\eta-y)}}{\beta_j^{\alpha+1}} + (\eta-y)\sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta_j(\eta-y)}}{\beta_j^{\beta}}\right) + TD\sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta_j(\eta-y)}}{\beta_j^{\beta}} = 0$$

$$\frac{-\Omega_1 T}{(E_1+1)\eta} A\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_k(1-x)}}{\alpha_k^{\alpha+1}} + (1-x)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_k(1-x)}}{\alpha_k^{\beta}}\right) + T\frac{1}{\eta} C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_k(1-x)}}{\alpha_k^{\beta}} +$$

$$+ \frac{-\Omega_1 T}{(E_1+1)} B \sum_{j=1}^{\infty} \frac{cos\,\beta_j(1-x)}{\beta_j^{\alpha+1}} + D\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{cos\,\beta_j(1-x)}{\beta_j^{\beta+1}}(T+1)\right) = 0,$$

після сумування рядів отримаємо систему для визначення параметрів λ, β:

$$\begin{cases} sin\frac{\pi\lambda}{2} A + \lambda B = 0 \\ \lambda A + sin\frac{\pi\lambda}{2} B = 0 \\ T_1 D\beta = 0 \\ T_2 C\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sin\frac{\pi\lambda}{2} A + \lambda B = 0 \\ \lambda A + sin\frac{\pi\lambda}{2} B = 0 \end{cases}$$

З умови існування нетривіального рішення перших двох рівнянь даної системи отримаємо характеристичне рівняння для визначення параметра λ:

$$\lambda^2 - sin^2\frac{\pi\lambda}{2} = 0 \qquad (5)$$

Характеристичне рівняння (5) має один дійсний корінь $\lambda_0 = 1$ і безліч комплексних коренів $\lambda_k = \tau_k \pm i\sigma_k$ [1, 2]. Звичайно, треба врахувати лише ті комплексні корені, для яких Re $\lambda_k > 1$. Раніше у роботі Вільямса [4] для різних граничних умов було досліджено залежність порядку сингулярності поля статичних напружень у вершині клину від його куту ростворy. Рівняння (5) відповідає рівнянню (15) цієї роботи для клину з незакріпленими гранями и кутом ростворy 90^0. Як бачимо, характер особливості механічного поля у кутовій точці не залежить від пружних параметрів області перерізу.

Враховуючи механічний зміст функцій $f_1(\xi), f_2(\xi)$ і вимагаючи обмеженості енергії усієї системи приходимо до висновку, що при побудуванні асимптотики рішення треба враховувати тільки один дійсний корінь $\lambda_0 = 1$ і безліч комплексних коренів $\lambda_k = \tau_k \pm i\sigma_k$ з додатною дійсною частиною.

Два останні рівняння системи дають підставу казати, що температура не має особливості у кутових точках області, оскільки $D = C = 0$.

Після визначення додаткових функцій $f_1(y), f_2(x), f_3(y), f_4(x)$ з системи інтегральних рівнянь (4) маємо змогу знайти усі невідомі крайової задачі (1)-(2) і усі характеристики хвильового поля. Треба відзначити, що знаходження показників локальної особливості λ дає змогу дослідити напружено-деформований стан в усій області D, включаючи її кутові точки. Це в свою чергу приводить до ефективної оцінки концентрацііі динамічних напружень у околі цих точок, що обумовлює міцнісні характеристики усієї області.

Список використаних джерел

1. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. Думка, 1981. – 284с.
2. Вовк Л.П. Исследование динамических эффектов, возникающих при вибронагружении стыковых паяных соединений // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки. – 2004. – №1. – С. 60-64.
3. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Обобщенная термомеханика. — Киев: Наукова думка, 1976. — 312 с.
4. Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plate in extension // J. Appl. Mech. – 1952. – Vol. 19. – №4. – P. 526-528.