

УДК 004.08

*К.А. Ручкин, В.В. Трофимов*Донецкий государственный институт искусственного интеллекта, г. Донецк, Украина  
c\_ruchkin@mail.ru, trofimov1984@mail.ru

## Численный анализ динамических систем с помощью показателей Ляпунова

В статье рассмотрен модифицированный алгоритм Бенетина численного вычисления характеристических показателей для произвольной динамической системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. В дополнение к работе [1], где вычислены характеристические показатели уравнений Эйлера-Пуассона [2], разработана интерактивная компьютерная система вычисления показателей Ляпунова произвольной системы, позволяющая отображать характеристические показатели на плоскую и сферическую карты, наглядно определять характер поведения не только конкретной траектории, но и всего фазового потока динамической системы.

### Введение

Характеристические показатели Ляпунова позволяют проводить качественный анализ динамических систем. Существует несколько практических способов вычисления спектра ляпуновских показателей [3]. Основная идея всех алгоритмов заключается в следовании за траекториями в течение небольших промежутков времени и вычислении скоростей их расхождения, и последующем усреднении этих значений по всему аттрактору. Но большинство методов расчета характеристических показателей предполагают существование аналитического решения системы, получение которого часто затруднительно или вообще невозможно.

В работе рассматривается численный метод вычисления показателей Ляпунова при различных начальных условиях и значениях конструктивных параметров произвольной нелинейной динамической системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Характеристические показатели могут быть использованы для определения устойчивости квазипериодического и хаотического поведения так же, как и для определения устойчивости состояний равновесия и периодических решений. Они позволяют определить фрактальную размерность аттрактора, энтропию динамической системы, характерное время предсказуемости поведения системы.

**Постановка задачи.** Для динамической системы, заданной системой уравнений вида

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = f(t, \bar{y}, \bar{k}), \quad (1)$$

где  $t$  – время,

$\bar{y}$  – фазовые переменные системы,

$\bar{k}$  – конструктивные параметры системы,

определить устойчивость решения

$$\bar{y} = \bar{y}(t, \bar{k}), \quad \bar{y}_0 = \bar{y}(t_0) \quad (2)$$

при заданных параметрах и начальных условиях.

Основная цель работы – разработка алгоритма численного вычисления характеристических показателей и создание на его основе компьютерной интерактивной системы, позволяющей находить решение произвольной динамической системы вида (1), вычислять её характеристические показатели при различных начальных условиях и значениях конструктивных параметров, отображать характеристические показатели на плоскую и сферическую карты.

## 1. Анализ исследований

Для решения поставленной задачи разработан блок символьных вычислений, позволяющий задавать систему уравнений в символьном виде. Это дает возможность применить вычисления для произвольной системы уравнений. В дополнение к работе [1], где применяется метод Рунге-Кутты 4-го порядка, с целью повышения точности расчетов добавлены методы интегрирования высоких порядков: методы Рунге-Кутты 5-го и 8-го порядка, экстраполяционный алгоритм Булиша-Штера [4], [5], позволяющие достичь точности порядка  $10^{-20}$ . Добавлен блок расчета матрицы частных производных правых частей заданной системы уравнений, используемый для получения уравнений возмущенного движения.

В отличие от работы [2], где вычислены характеристические показатели периодических решений системы Эйлера-Пуассона, разработанный алгоритм и построенное на его основе программное обеспечение позволяют вычислить характеристические показатели для произвольного решения при различных начальных условиях и параметрах системы.

Данная система служит дополнением и подтверждением результатов, полученных в работе [6], где разработана многофункциональная среда, позволяющая проводить анализ поведения динамической системы с помощью сечения Пуанкаре и примененная к задаче о движении твердого тела (уравнения Эйлера-Пуассона).

## 2. Численное вычисление характеристических показателей

Выделим основные свойства методов расчёта ляпуновских показателей.

1. Они начинаются с реконструирования аттрактора, и в случае невозможности этой операции вычислить значения ляпуновских показателей не удаётся.

2. При работе в реконструированном фазовом пространстве все методы фокусируются на принятой за основу сравнения траектории на протяжении всего движения на аттракторе.

3. Они непосредственно или неявно трактуют каждую выбранную точку как центр малой области, сферы или гиперсферы, которые обладают главными осями. Эволюция системы неизбежно нарушает ортогональность этих осей, следовательно, приходится периодически проводить операцию реортонормирования главных осей, т.к. работать с взаимно-ортогональными осями одинаковой длины проще.

4. Они значительно лучше работают при расчёте положительных показателей, чем при расчёте отрицательных. По крайней мере, для хаотических аттракторов, близлежащие траектории значительно дальше расходятся на протяжении большей части аттрактора. Для того чтобы выявить детерминированный хаос, достаточно обнаружить хотя бы один положительный ляпуновский показатель, при этом не

обязательно знать весь спектр показателей. Дополнительной трудностью при оценке отрицательных показателей является зависимость сложности их расчёта от уровня шумов (погрешностей) в исходных данных.

Для вычисления нескольких ляпуновских показателей необходимо отслеживать эволюцию соответствующего числа векторов возмущения вдоль рассматриваемой фазовой траектории. Если не предпринимать специальных мер, то в каждом векторе будет представлена составляющая с максимальным ляпуновским показателем, которая будет доминировать на больших временах, и оценить следующие показатели не удастся. Попытка рассчитать полную матрицу эволюции и ее сингулярные числа также обычно не приводит к успеху.

Работоспособный метод оценки спектра ляпуновских показателей можно сконструировать как обобщение алгоритма Бенеттина [3], причем переопределение векторов возмущения должно состоять не только в изменении нормы, но сопровождаться их ортогонализацией.

Процедура, позволяющая получить заданное число  $k$  показателей, наибольших по величине из набора, занумерованного в порядке убывания, состоит в следующем. Выбирается некоторая начальная точка  $\bar{y}_0$  и отслеживается вместе с исходящей из нее траекторией эволюция  $k$  векторов возмущения. Исходная система дифференциальных уравнений решается численно совместно с  $k$  комплектами уравнений в вариациях. В качестве начальных векторов возмущения задается набор векторов  $\tilde{y}_{1,0}^0, \tilde{y}_{2,0}^0, \dots, \tilde{y}_{k,0}^0$ , которые ортогональны друг другу и нормированы на единицу. Через некоторое время  $t$  траектория придет в точку  $\bar{y}_1$ , а векторы возмущения будут  $\tilde{y}_{1,1}, \tilde{y}_{2,1}, \dots, \tilde{y}_{k,1}$ . После перенормировки и ортогонализации векторов возмущения получим набор  $\tilde{y}_{1,1}^0, \tilde{y}_{2,1}^0, \dots, \tilde{y}_{k,1}^0$ . Далее продолжаем счет, отправляясь от точки  $\bar{y}_1$  и векторов возмущения  $\tilde{y}_{1,1}^0, \tilde{y}_{2,1}^0, \dots, \tilde{y}_{k,1}^0$ . Через очередной интервал времени  $t$  получаем новый набор векторов возмущения  $\tilde{y}_{1,2}, \tilde{y}_{2,2}, \dots, \tilde{y}_{k,2}$ , который вновь подвергается ортогонализации и перенормировке. Описанная последовательность действий повторяется достаточно большое число раз  $M$ , при этом по ходу вычислений подсчитываются суммы

$$S_i = \sum_{j=1}^M \ln \|\tilde{y}'_{i,j}\|, \quad i = \overline{1, k}, \quad (3)$$

в которых фигурируют векторы возмущения до перенормировки, но после ортогонализации. Оценка ляпуновских показателей получается как

$$\Lambda_i = \frac{S_i}{Mt}, \quad i = \overline{1, k}. \quad (4)$$

### 3. Численный анализ показателей Ляпунова

Представление о возможных режимах динамики системы дает построение карты характеристических показателей в зависимости от одного или нескольких управляющих параметров системы или начальных условий.

Трехмерная карта показателей Ляпунова системы Эйлера-Пуассона при изменении  $\omega_x$  и  $\omega_y$  от  $-400$  до  $400$ , параметрах системы  $J = \text{diag}(1; 2; 1,5)$ ,  $r = (2; 1; 1)^T$  и начальных условиях  $\omega_z = 0$ ,  $v = (0; 0; 1)^T$  представлена на рис. 2.

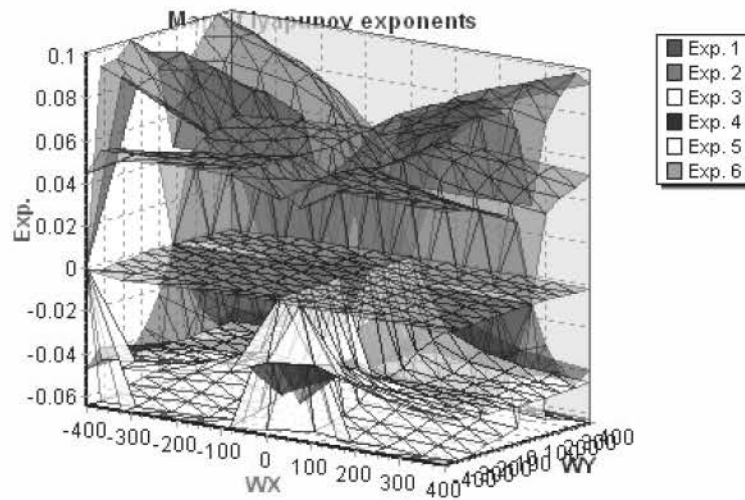


Рисунок 2 –Трехмерная карта характеристических показателей системы Эйлера-Пуассона при изменении  $\omega_x$  и  $\omega_y$  от  $-400$  до  $400$

Три показателя отрицательные, два положительных и один остается близким к нулю. Присутствие положительных показателей свидетельствует о хаотическом поведении системы. Система Эйлера-Пуассона не обладает диссипацией [7], что согласуется с картой – сумма показателей остается равной нулю.

Возьмем в качестве начальных данных следующие значения:  $\omega = (100; 600; 350)$ ,  $v = (0; 0; 1)$ ,  $r = (0; 0; 0)$ ,  $J = \text{diag}(2; 2; 2)$ . Для этого случая сферическая карта представлена на рис. 3а, а трехмерная карта при изменении  $r_y$  и  $r_z$  от  $-10$  до  $10$  – на рис. 3б.

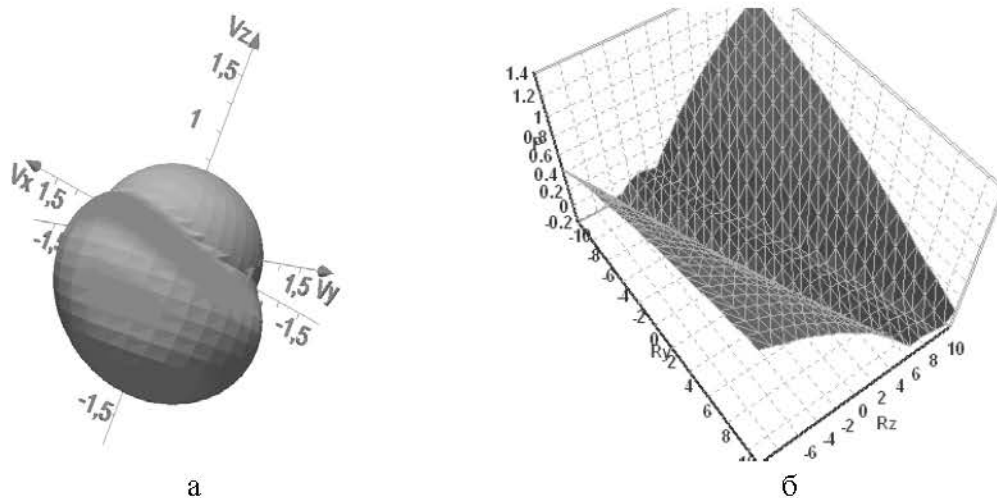


Рисунок 3 – Сферическая поверхность (а) и трехмерная карта при изменении  $r_y$  и  $r_z$  от  $-10$  до  $10$  (б)

Данные карты построены для максимального характеристического показателя. Областям регулярного поведения системы на сферической карте соответствует часть сферы с меньшим радиусом, а на трехмерной карте – искривления поверхности, где показатели меньше нуля.

#### 4. Оценка быстродействия применяемых методов вычисления показателей Ляпунова

Выделим применяемые математические методы:

- а) численный расчет показателей Ляпунова:
  - расширенный алгоритм Бенетина;
  - б) численное интегрирование:
    - метод Рунге-Кутта 5-го порядка;
    - метод Рунге-Кутта 8-го порядка;
    - экстраполяционный алгоритм Булиша-Штера;
    - в) ортогонализация:
      - метод Грама-Шмидта;
      - г) численное дифференцирование:
        - экстраполяционный алгоритм Ричардсона;
        - прямое применение определения производной.

Основными показателями эффективности применяемых численных методов является, в первую очередь, точность, а также время вычислений и занимаемая оперативная память ЭВМ.

На точность вычислений влияет ошибка округления вычислительной машины и точность самого метода. Так как для уменьшения ошибки округления требуются специализированные вычислительные ресурсы, доступ к которым чаще всего ограничен или вообще невозможен, то основным средством контроля точности остается подбор метода. Выбор же метода сильно зависит от решаемой задачи и чаще всего является творческим.

Точность методов численного расчета характеристических показателей и ортогонализации зависит только от ошибки округления. Поэтому основными методами контроля точности являются алгоритмы численного интегрирования и дифференцирования. Численное дифференцирование применяется только в тех случаях, когда сложно или невозможно найти матрицу частных производных правых частей заданной системы дифференциальных уравнений. Его сложность в квадратичной форме зависит от размерности системы.

В данной работе применяются наиболее распространенные и универсальные методы интегрирования Рунге-Кутта. Для сравнения их эффективности были вычислены показатели Ляпунова при различных значениях задаваемой точности интегрирования. В таблицах 1-3 приведены результаты расчетов для системы Лоренца.

Таблица 1 – Результаты расчетов характеристических показателей системы Лоренца при различных значениях точности интегрирования для метода Рунге-Кутта 5-го порядка

Точность	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	Время вычислений
$10^{-3}$	0,86998768	0,00020076	-14,20638674	2 с
$10^{-5}$	0,88520586	-0,00208126	-14,54799358	5 с
$10^{-10}$	0,89200970	-0,00305827	-14,55561809	31 с
$10^{-15}$	0,90143083	-0,00501552	-14,56308198	4 мин 34 с
$10^{-20}$	0,89854275	-0,01137113	-14,55383829	51 мин 17 с

Таблица 2 – Результаты расчетов характеристических показателей системы Лоренца при различных значениях точности интегрирования для метода Рунге-Кутты 8-го порядка

Точность	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	Время вычислений
$10^{-3}$	0,87997945	-0,00105565	-14,52438399	3 с
$10^{-5}$	0,90338026	-0,00068206	-14,56919259	5 с
$10^{-10}$	0,89789468	-0,00289915	-14,5616698	12 с
$10^{-15}$	0,89678006	-0,00142124	-14,5620255	42 с
$10^{-20}$	0,90108384	-0,00420805	-14,5635425	2 мин 53 с

Таблица 3 – Результаты расчетов характеристических показателей системы Лоренца при различных значениях точности интегрирования для экстраполяционного алгоритма Булиша-Штера

Точность	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	Время вычислений
$10^{-3}$	0,87618053	0,00005646	-13,1762249	4 с
$10^{-5}$	0,90514634	-0,00595149	-14,51789688	6 с
$10^{-10}$	0,89861168	-0,00227299	-14,56300528	13 с
$10^{-15}$	0,88035388	-0,00195722	-14,54506330	24 с
$10^{-20}$	0,89744274	-0,00226917	-14,56184024	52 с

Аналитически полученные показатели Ляпунова для системы Лоренца [3]:  
 $\lambda_1 = 0,897$ ;  $\lambda_2 = 0$ ;  $\lambda_3 = -14,563$

В таблицах 4 – 6 приведены результаты расчетов для системы Эйлера-Пуассона.

Таблица 4 – Результаты расчетов характеристических показателей системы Эйлера-Пуассона при различных значениях точности интегрирования для метода Рунге-Кутты 5-го порядка

Точность	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	Время вычислений
$10^{-3}$	0,037704	0,002949	0,008402	0,018419	-0,016341	-0,003171	1 мин 46 с
$10^{-5}$	0,012050	8,671e-10	0,002682	-0,001134	-0,016331	-0,000456	3 мин 44 с
$10^{-10}$	0,012591	6,857e-9	0,002682	-2,138e-7	-0,01633	-4,618e-9	38 мин 42 с
$10^{-15}$	0,013024	5,276e-9	0,002683	-1,968e-7	-0,01633	-3,673e-11	6 ч 20 мин
$10^{-20}$	–	–	–	–	–	–	–

Таблица 5 – Результаты расчетов характеристических показателей системы Эйлера-Пуассона при различных значениях точности интегрирования для метода Рунге-Кутты 8-го порядка

Точность	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	Время вычислений
$10^{-3}$	2,667e-8	2,667e-8	6,667e-9	-0,002682	-0,106079	-0,103397	1 мин 17 с
$10^{-5}$	0,013028	1,101e-8	0,002682	-0,000476	-0,01633	-0,000144	2 мин 14 с
$10^{-10}$	0,013648	4,818e-9	0,002682	-1,295e-7	-0,01633	-2,842e-10	9 мин 17 с
$10^{-15}$	0,013648	4,412e-9	0,002682	-1,364e-7	-0,01633	-3,258e-12	39 мин 41 с
$10^{-20}$	0,013648	5,592e-9	0,002681	-1,429e-7	0,01633	-1,349e-14	2 ч 46 мин



Таблица 6 – Результаты расчетов характеристических показателей системы Эйлера-Пуассона при различных значениях точности интегрирования для экстраполяционного алгоритма Булиша-Штера

Точность	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	Время вычислений
$10^{-3}$	2,667e-8	2,667e-8	6,667e-9	-0,002682	-0,39902	-0,396338	2мин 34с
$10^{-5}$	0,016168	1,03e-8	0,002683	0,002238	-0,01633	0,000282	4мин 45с
$10^{-10}$	0,013648	4,818e-9	0,002682	-1,431e-7	-0,01633	-3,687e-9	10мин 53с
$10^{-15}$	0,013648	4,419e-9	0,002682	-1,283e-7	-0,01633	-1,261e-14	24мин
$10^{-20}$	0,013649	4,384e-9	0,002682	-1,172e-7	-0,01633	-2,573e-16	45мин 50с

Из приведенных данных видно, что методы интегрирования низких порядков быстро работают при небольшой точности вычисления. При увеличении же точности экстраполяционный алгоритм Булиша-Штера значительно быстрее. Такая зависимость вызвана тем, что в алгоритмы 5-го и 8-го порядка заложены методы сравнительно более высокого порядка. В отличие от них, в основе экстраполяционного алгоритма лежит модифицированный метод прямоугольников, а повышение точности выполняется автоматически при помощи экстраполяции, требующей дополнительных затрат процессорного времени. Таким образом, при относительно низких требованиях к точности методы 5-го и 8-го порядка достигают необходимого результата уже за несколько шагов, в то время как экстраполяционный алгоритм выполняет дополнительные вычисления для повышения порядка и выбора шага. Увеличение требуемой точности приводит к тому, что алгоритм Булиша-Штера быстро выбирает необходимый порядок метода и шаг интегрирования, а остальные методы производят множество «пробных» шагов для вычисления шага интегрирования, что в свою очередь приводит к дополнительным ошибкам округления.

Метод Рунге-Кутты 5-го порядка следует применять, только если необходима точность не выше  $10^{-5}$ , метод 8-го порядка –  $10^{-10}$ . При более высоких требованиях к точности применяется экстраполяционный алгоритм.

Для сравнения используемых методов дифференцирования были вычислены показатели Ляпунова системы Лоренца, а результаты вычислений сведены в табл. 7.

Таблица 7 – Сравнение методов дифференцирования

Метод	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	Время вычислений
экстраполяционный алгоритм Ричардсона	0,885825	-0,003163	-14,549329	3 мин 35 с
прямое применение определения производной	0,914538	-0,009065	-14,57214	27 с

Алгоритм, основанный на прямом применении производной, работает значительно быстрее, но обеспечивает меньшую точность. В общем случае оба алгоритма обеспечивают приемлемую точность при условии, что величины, входящие в уравнения правых частей исходной системы уравнений, не значительно отличаются порядками. Иначе, ошибка округления резко возрастает и становится сравнимой с результатом дифференцирования.

Если сравнивать все вышеперечисленные методы интегрирования и дифференцирования по занимаемой памяти ЭВМ, то все они требуют практически одинаковый объем памяти.

## Заключение

Разработанный алгоритм позволяет оценить характеристические показатели при различных начальных данных и параметрах системы произвольной нелинейной динамической системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Предложенный способ отображения характеристических показателей на плоскую и сферическую карты позволяет наглядно определить характер поведения не только конкретной траектории, но и всего фазового потока динамической системы.

Применение методов интегрирования низких порядков и простых алгоритмов дифференцирования позволяет быстро получить характеристические показатели с достаточно высокой точностью. Более сложные методы, хотя и требуют больших затрат времени, обеспечивают высокоточные расчеты, подтверждаемые аналитически полученными результатами.

## Литература

1. Ручкин К.А., Трофимов В.В. Численный анализ характеристических показателей системы уравнений Эйлера-Пуассона // Искусственный интеллект. – 2005. – С. 56-64.
2. Гашененко И.Н., Кучер Е.Ю. Характеристические показатели периодических решений уравнения Эйлера-Пуассона // Механика твердого тела. – Донецк, 2002. – Вып. 32. – С. 50-59.
3. Kuznetsov S.P., Sataev I.R. Nonlinear dynamics. – Institute of Radio-Engineering and Electronics RAS, Saratov Division, 2001.
4. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М.: Мир, 1990. – 512 с.
5. Бордовицына Т.В. Современные численные методы в задачах небесной механики. – М.: Наука, 1984. – 136 с.
6. Ручкин К.А. Компьютерное моделирование динамики твердого тела с неподвижной точкой // Классические задачи динамики твердого тела. – 2004. – С. 48-49.
7. Гашененко И.Н., Лапенко С.В., Ручкин К.А. Визуальное моделирование хаотической динамики тяжелого твердого тела // Укр. матем. конгресс, 2001. – С. 14-15.

*К.А. Ruchkin, V.V. Trofymov*

### **The Numerical Analysis of Dynamic Systems Using Lyapunov's Exponents**

In article modified Benettin's algorithm of numerical calculation of characteristic exponents for any dynamic system of the ordinary differential equations of the first order is considered. In addition to work [1] where characteristic exponents of the Euler-Poisson's equations [2] are calculated, the interactive computer system for calculation of Lyapunov's exponents of any system is developed, allowing to display characteristic parameters on flat and spherical maps, evidently to determine character of behavior not only a concrete trajectory, but also all phase stream of dynamic system.

*Статья поступила в редакцию 19.06.2006.*