УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ТЕРМОУПРУГОСТИ В ОБЛАСТЯХ С НЕГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ

Л.П. Вовк, доктор технических наук, Е.С. Кисель, ассистент
Автомобильно-дорожный институт ГВУЗ
„Донецкий национальный технический университет” г. Горловка, Украина

Предлагается метод определения локальных термомеханических характеристик волнового поля в конечной прямоугольной области, которая учитывает особенности компонент тензора напряжения и температуры в окрестности нерегулярных точек границы - угловых точек прямоугольника.

Известно, что наличие концентрации напряжения может быть причиной разрушения материала, следовательно, анализ концентрации напряжения является весьма важным и всегда актуальным вопросом. Целью данной работы служит обобщение алгоритма метода суперпозиции для решения первой краевой задачи термоупругости в прямоугольной области с определением характера напряженно-деформированного состояния в окрестности сингулярных угловых точек.

Рассмотрим гармонические симметричные колебания однородной термоупругой области, сечение которой представляет прямоугольную область $D=\left\{\left(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2\right):\left|\tilde{x}_1\right|\le a;\left|\tilde{x}_2\right|\le b\right\}$ где $\tilde{x}_1,\tilde{x}_2$ - декартовые координаты. На сторонах прямоугольника $\tilde{x}_1=\pm a;\ \tilde{x}_2=\pm b$ задана нормальная нагрузка интенсивности $Q_1\left(\tilde{x}_1\right)$, $Q_2\left(\tilde{x}_2\right)$ соответственно, которая гармонично изменяется во времени с частотой ω. Предусматривается, что данная область имеет свободный теплообмен с окружающей средой. Безразмерные амплитудные характеристики перемещений $U_i\left(x,y\right), i=1,2$ и прироста температуры $\Theta\left(x,y\right)$ определяются системой дифференциальных уравнений связанной термоупругости в частных производных [1]:

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}+\left(1+\frac{\lambda}{\mu}\right)\cdot\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_2}{\partial x\partial y}\right)=\frac{\gamma T_0}{\mu}\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial x}-\frac{\rho a^2\omega^2}{\mu}U_1$$

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2}+\left(1+\frac{\lambda}{\mu}\right)\cdot\left(\frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U_1}{\partial x\partial y}\right)=\frac{\gamma T_0}{\mu}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial y}-\frac{\rho a^2\omega^2}{\mu}U_2 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}-\frac{a^2\omega i}{\chi}\Theta-\frac{\delta a^2 i\omega}{T_0}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}+\frac{\partial U_2}{\partial y}\right)=0$$

где $x=\frac{\tilde{x}_1}{a}$; $y=\frac{\tilde{x}_2}{a}$; $U_1=\frac{\tilde{U}_1}{a}$; $U_2=\frac{\tilde{U}_2}{a}$; $\Theta=\frac{\tilde{\Theta}}{T_0}$; $\sigma_{ij}=\frac{\tilde{\sigma}_{ij}}{\mu}$; $\tilde{\Theta}=T-T_0$,

$\tilde{U}_i,(i=1,2)$ - компоненты вектора перемещений; $\tilde{\Theta}$ - прирост температуры; T - абсолютная температура точек тела; T_0 - температура тела в недеформированном и ненапряженном состоянии; ρ - плотность; λ,μ - параметры Ляме, $\gamma=(3\lambda+2\mu)\alpha_t$; $\delta=\frac{\gamma T_0}{\lambda_0}$; $\chi=\frac{\lambda_0}{c_\varepsilon}$ где α_t - коэффициент линейного термического расширения; λ_0 - коэффициент теплопроводности; c_ε - удельная теплоемкость при постоянной деформации.

Граничные условия сформулированы в безразмерном виде:

Если $x=\pm1$: $\quad 2\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}+\frac{3\nu}{1-2\nu}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}+\frac{\partial U_2}{\partial y}\right)-\frac{1+\nu}{1-2\nu}a\Theta\right)=\frac{1}{\mu}\sigma_{11}=q_1(y)$

$$\frac{\partial U_1}{\partial y}+\frac{\partial U_2}{\partial x}=\frac{1}{\mu}q_2=0; \qquad \frac{\partial\Theta}{\partial x}+a\frac{\alpha}{\lambda_1}\Theta=0. \qquad (2)$$

Если $y=\pm\eta$, $\eta=\frac{b}{a}$: $\quad 2\left(\frac{\partial U_2}{\partial y}+\frac{3\nu}{1-2\nu}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}+\frac{\partial U_2}{\partial y}\right)-\frac{1+\nu}{1-2\nu}a\Theta\right)=\frac{1}{\mu}\sigma_{22}=q_2(x)$

$\frac{\partial U_1}{\partial y}+\frac{\partial U_2}{\partial x}=\frac{1}{\mu}\sigma_{12}=0$; $\quad \frac{\partial\Theta}{\partial y}+a\frac{\alpha}{\lambda_1}\Theta=0$, где λ_1- приведённый коэффициент теплопроводности; α - коэффициент теплоотдачи.

Вводится в рассмотрение вспомогательная краевая задача, которая допускает аналитическое решение и граничные условия которой, в отличие от исходной краевой задачи, задают значение нормальных перемещений (функции $f_1(y), f_2(x)$), касательных напряжений и нормальных производных от температуры (функции $f_3(y), f_4(x)$) на границах прямоугольника. Возвращение к исходной задаче приводит к системе интегральных уравнений (СИУ) относительно введенных дополнительных функций:

$$\sum_{\gamma=1}^{4} L_{m\gamma} f_\gamma = Q_\gamma, m = 1,2,3,4; \text{ де, } Q_\alpha = q_\alpha, \ \gamma = \alpha = 1,2; \ Q_\beta = -\frac{f_\beta}{T}, \ \gamma = \beta = 3,4. \qquad (4)$$

Проводим асимптотический анализ левых частей СИУ при приближении к угловой точке, считая, что поведение неизвестных функций в окрестности угловых точек имеет характер степени и определяется показателем локальной особенности (ПЛО) λ [1]. По причине отсутствия особенности в правых частях СИУ получаем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - sin^2 \frac{\pi\lambda}{2} = 0.$$

Учитывая механическое значение функций $f_1(\xi), f_2(\xi)$ и требуя ограниченности энергии всей системы, приходим к выводу, что при построении асимптотики решения учитываем только один действительный корень $\lambda_0 = 1$ и большое количество комплексных корней $\lambda_k = \tau_k \pm i\sigma_k$ с положительной действительной частью [2]. Из асимптотического анализа следует, что температура не имеет особенности в угловых точках области.

После определения дополнительных функций $f_1(y), f_2(x), f_3(y), f_4(x)$ из СИУ имеем возможность найти все неизвестные краевой задачи. Нахождение ПЛО λ дает возможность эффективно оценить концентрацию динамических напряжений в окрестности сингулярных точек границы, что обусловливает прочностные характеристики всей области.

Направлением дальнейшей работы будет исследование ПЛО для составных областей, что, безусловно, повысит уровень практического применения предложенной методики расчета. Перспективным должен быть и анализ распределения внутренней энергии областей с учетом локальной концентрации напряжений в окрестности нерегулярных точек границы.

Литература

1. Вовк Л. П. Особенности локальной концентрации волнового поля на границе раздела упругих сред. - Донецк: Норд-Пресс, 2004. - С. 48.
2. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. Думка, 1981. – 284с.