Неисправности автоматов, сохраняющие их поведение

О. М. Копытова

omkop@list.ru

Донецкий национальный технический университет, Донецк

Введение

Конечные автоматы широко используются для описания поведения различных устройств и систем, от управляющих и вычислительных до организационных. Изменения в их структуре и поведении при повреждающих воздействиях окружающей среды во многих случаях адекватно описываются преобразованиями графа переходов, задаваемыми перебросками его дуг [1]. Если при этом не меняются отметки дуг (пары вход-выходных символов), то такие переброски можно понимать как "неисправности" функции переходов автомата. Известно [2], что в результате переброски ровно одной дуги в приведенном автомате получается автомат, не изоморфный исходному, т.е. поведение "неисправного" автомата в этом случае всегда отличается от поведения исправного. Таким образом, всякий приведенный автомат оказывается неустойчивым к переброске ровно одной дуги. Однако в ряде случаев автомат может быть устойчивым (по сохранению поведения) при перебросках более, чем одной дуги. В работе исследуются условия, при которых переброска k дуг в приведенном автомате, где k>1, не изменяет его поведения. Найдены необходимые условия в терминах поведенческих и структурных свойств графа переходов автомата, при которых переброска нескольких дуг в приведенном автомате приводит к автомату, эквивалентному исходному. Показано, что переброска с сохранением поведения допустима только для некоторых дуг, удаление которых из графа переходов автомата приводит к его подграфу, обладающему определенной симметрией.

Постановка задачи

Пусть $A = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ — приведенный автомат Мили, где A, X, Y — алфавиты состояний, входов и выходов соответственно, а δ, λ — функции переходов и выходов. Автомат A будем также рассматривать как множество дуг E_A, где дуга — это четверка (s, x, y, t), если $\delta(s, x) = t$, $\lambda(s, x) = y$. Пусть $e = (s, x', y', s_1)$ — дуга автомата A. Под переброской дуги e, например, в состояние s_2 будем понимать замену этой дуги дугой (s, x', y', s_2). При $s_1 \neq s_2$ переброску назовём нетривиальной. Далее, если не оговорено противное, рассматриваются нетривиальные переброски. Пусть автомат A' получен из автомата A переброской некоторого множества дуг $M \subseteq E_A$, среди которых хотя бы одна переброска нетривиальная (такие множества перебросок также называем нетривиальными). Задача заключается в том, чтобы определить условия, при которых автомат A' остается изоморфным исходному автомату A.

В [3] сформулированы достаточные условия сохранения поведения автоматом при переброске двух дуг, и показано, что для любого натурального $k > 1$ существует приведенный автомат, в котором найдется подмножество из k дуг, одновременная переброска которых приводит к изоморфному автомату. В настоящей работе основное внимание направлено на получение необходимых условий, при которых возможна переброска дуг в общем случае.

Основные результаты

Переброска двух дуг. Пусть автомат A' является результатом переброски некоторых двух различных дуг в автомате A, например, в автомате A' дуга (s, x', y', s_1) заменена дугой (s, x', y', s_2), а дуга (t, x'', y'', t_1) заменена дугой (t, x'', y'', t_2). Обозначим через ε отношение эквивалентности на множестве состояний прямой суммы автоматов A и A' (состояние s в автомате A' переименовывается в s'). Состояния a и b автомата A называются k-эквивалентными, если для всякого входного слова p длины k выполняется равенство $\lambda(a, p) = \lambda(b, p)$.

Лемма 1. *Состояния s и t 1-эквивалентны.*

Следствие 1. *В автомате с двумя состояниями невозможно перебросить две дуги таким образом, чтобы полученный автомат был изоморфен исходному.*

Лемма 2. $(s, s') \notin \varepsilon$, $(t, t') \notin \varepsilon$.

Теорема 3. *Справедливы следующие утверждения:*

1)на перебрасываемых дугах вход-выходные отметки совпадают: $x' = x''$, причём x' есть начальная буква кратчайшего слова, различающего s и t;

2)состояния s и t, из которых перебрасываются дуги, различны.

Полученные необходимые условия сохранения автоматом поведения при перебросках двух дуг совместно с достаточными условиями из [3] позволяют выделять автоматы такой структуры, при которой возможна переброска, сохраняющая поведение автомата. Более того, на этой основе могут быть определены условия допустимой переброски $2k$ дуг. В этом случае множество M перебрасываемых дуг имеет четную мощность и разбивается на такие пары дуг, для каждой из которых найденные условия выполняются независимо.

Переброска k дуг. Пусть M — множество перебрасываемых дуг в A, $|M| = k \geqslant 2$, а M' — множество переброшенных дуг в A' и $\tilde{M} = M \bigcup \varphi^{-1}(M')$. Обозначим через A_M и $A_{\tilde{M}}$ частичные автоматы, полученные из A в результате удаления всех дуг из множеств M и $\tilde{M}$ соответственно.

Утверждение 4. *Если φ — изоморфизм автомата A на A', то φ — автоморфизм автомата $A_{\tilde{M}}$.*

Частичный автомат R_u с выделенным в нем состоянием u называется идентификатором состояния s автомата A, если при любом гомоморфизме φ автомата R_u в автомат A выполняется равенство $\varphi(u) = s$ [1]. Частичный автомат R_u назовем структурным идентификатором состояния s, если последнее равенство выполняется при любом изоморфном вложении R_u в A. Множество всех идентификаторов состояния s в автомате A, включая и структурные, обозначим $I_s(A)$.

Утверждение 5. *Для любого состояния s из A справедливо $I_s(A_M) \subseteq I_s(A)$.*

Следствие 2. *Если φ — изоморфизм автомата A на A', $\varphi(s) = t$ и $s \neq t$, то $I_s(A_M) = I_t(A_M) = \emptyset$.*

Наличие идентификаторов в автомате A_M позволяет определить множество состояний автомата A, которые остаются неподвижными при любых изоморфизмах A в A' (т.е. при всевозможных перебросках дуг из M, сохраняющих поведение A).

Множество автоморфизмов автомата A_M вместе с операцией их суперпозиции является группой. Обозначим ее G_M.

Теорема 6. *Если автомат A', полученный из A нетривиальной переброской дуг множества M, изоморфен A, то группа G_M нетривиальна.*

Группа G_M определяет некоторое множество неподвижных состояний. В частности, из утверждения 6 и следствия 2 следует, что такими будут все те состояния автомата A, для которых множество идентификаторов в автомате A_M не пусто.

Одним из предельных случаев, когда неподвижны все состояния и группа G_M тривиальна, является следующий. Пусть λ_s^1 — множество вход-выходных слов длины 1, порожденных состоянием s автомата A, которое будем отождествлять с соответствующим ему частичным автоматом.

Следствие 3. *Если для любого $s \in A$ выполняется $\lambda_s^1 \in I_s(A)$, то при любой переброске непустого множества дуг автоматы A и A' не изоморфны.*

Заключение

Полученные комбинаторно-алгебраические условия сохранения поведения при перебросках двух и более дуг позволяют выделить ряд структур автоматов, для которых это возможно. Например, можно указать графы переходов, содержащие в качестве неподвижного ядра сильно связные подавтоматы, а вне его — некоторое множество состояний и инцидентных им дуг, переброска которых не меняет поведения автомата. Это множество дуг определяет некоторую частичную симметрию исходного автомата, которая описывается определенной выше группой G_M.

Литература

[1] *Грунский И. С., Козловский В. А.* Синтез и идентификация автоматов. — К.: Наукова думка, 2004. — 245 с.

[2] *Грунский И. С., Копытова О. М.* О структуре контрольного эксперимента для определенно-диагностируемого автомата // Теория управляющих систем. — Киев: Наукова думка, 1987. — С. 40–54.

[3] *Копытова О. М.* О структуре автоматов, сохраняющих поведение при перебросках дуг // Труды VIII Международной конференции "Дискретные модели в теории управляющих систем". — М: Макс-Пресс, 2009. — С. 155–159.