

## ВЫБОР СТАТИСТИКИ ДЛЯ ОЦЕНКИ ОБОГАТИТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

Ариненков Ю. Д., канд. тех. наук, доцент,  
Донецкий национальный технический университет

*Поставлена задача обосновать предпочтительную статистику для оценки ошибок обоганительного эксперимента и полноты раскрытия элементарных фракций полезных ископаемых и дано её решение.*

*Put problem to motivate a preferred statistics for the evaluation of enrichment experiment mistakes and fullness of opening the elementary factions useful fossilized and is given its decision.*

При разработке методов оценки раскрытия элементарных фракций и прогноза параметров обогащения для различных обоганительных аппаратов автором в работах [1, 2] было отмечено, что по результатам экспериментальных исследований среднее модулей ошибок аппроксимирующей характеристики  $C_{мо}$  оказывалось не только меньшим по сравнению со среднеквадратической ошибкой  $C_{ко}$ , но и более критичным в области поиска условия минимума этих ошибок. Привлекательная своей простотой, там же рассматривалась идея получить нормированный по верхнему уровню критерий степени раскрытия элементарных фракций полезных ископаемых как отношение указанных статистик  $C_{мо}/C_{ко}$ . Здесь ставится задача установить, которая из этих трёх статистик является наиболее предпочтительной для оценки ошибок обоганительных процессов.

В научной литературе по моделированию производственных процессов сведения о применении равномерной или чебышевской метрики ошибок редки, например [3, 4], но и они сопровождаются замечанием о безусловном преимуществе среднеквадратических оценок. В статистике изучался также момент отношения среднего модулей ошибок  $C_{мо}$  к среднеквадратической ошибке модели  $C_{ко}$  [4], составлены таблицы квантилей его распределения [5]. Как рабочую гипотезу, рассмотрим возможность применения этого соотношения в

качестве оценки ошибок обогатительного эксперимента и критерия полноты раскрытия элементарных фракций.

На 21 год ранее [4] Гири (Geary R.C.) в работе [6] предложил считать наиболее предпочтительным для оценки отклонения распределения случайных величин от нормального выборочный момент

$$d = \frac{1}{ns^*} \cdot \sum_{i=1}^n |\xi_i - \bar{\xi}|, \quad n \geq 50,$$

где  $n$  - количество точек распределения;

$\bar{\xi}$  - среднее ;

$\xi_i$  - отклонение  $i$ -ой точки от среднего;

$(s^*)^2$  - выборочная дисперсия.

В ряде работ других авторов [4, 5] величина нормированного среднего абсолютного отклонения, равная

$$\delta = \frac{M|\xi - a|}{\sigma} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0,79788,$$

где  $M|\xi - a|$  - среднее чебышевской метрики,

рассматривалась как оценка близости распределения случайных величин к нормальному, хотя в [5] подчёркивается, что эта оценка всё же не строгая.

В работе автора [2] показано, что критерий Гири даже при 10 опытах может быть равен 1, но всегда будет более  $2^{0,5}n^{-0,5}$ , что для  $n=10$  составит величину 0,44721, и даже для  $n=50$  - будет больше 0,2, так что нижний предел критерия Гири существенно зависит от количества точек  $n$ . Устранить полностью влияние этой нежелательной зависимости простым нормированием критерия, как это сделано в работе [2], невозможно, толерантная компенсирующая функция не известна, а увеличение количества опытов затруднительно. Но в задачах оценки и прогноза результатов обогащения в этом и нет необходимости, так как оцениваются кусочно-линейные графики ошибок, для которых можно принять  $n = \infty$ .

В теории обогащения полезных ископаемых распределение фракций исходного материала представляют детерминированной (в

пределах конкретной поставки) зависимостью  $\gamma_{и}(\lambda)$ , где  $\lambda$ -качество фракций, например, их элементарная зольность,  $\gamma_{и}$  - суммарный выход фракций. Тем не менее, с оговоркой о том, что это распределение является следствием проявления случайных факторов в геологической истории образования полезного ископаемого, к нему применяют термины и методы математической статистики. Плотность распределения  $\gamma_{и}(\lambda)$  получают как производную от  $\gamma_{и}(\lambda)$ :  $u_{и}(\lambda)=d\gamma_{и}(\lambda)/d\lambda$ .

По известным распределениям фракций в исходном материале  $\gamma_{и}(\lambda)$  и в концентрате  $\gamma_{к}(\lambda)$  распределение извлечения фракций в концентрат представляют отношением  $\epsilon_{к}(\lambda)=d\gamma_{к}(\lambda)/d\gamma_{и}(\lambda)$ . Дифференцированием  $\epsilon_{к}(\lambda)$  по  $\lambda$  получим плотность распределения  $u_{к}(\lambda)$ .

Характер этих распределений легко распознаётся по их графикам, а для численной оценки разработан специальный показатель сепарабельности  $\Theta$  [7]. На основе этого показателя в работе [9] обоснован метод имитации характеристики плотности распределения фракций и самого распределения фракций полезного ископаемого. Фактически там реализована теорема-критерий правильности решения прямой и обратной задач - оценки характеристик показателем сепарабельности  $\Theta$  и построения характеристик по этой оценке. Сравнение оценок различных распределений  $\gamma_{и}(\lambda)$  показало, что критерий Гири оказывается существенно неоднозначным в сравнении с  $\Theta$ . Поэтому в последующем изучалась предпочтительность применения чебышевской метрики, среднеквадратического отклонения или критерия Гири как их отношения для поиска минимума ошибки аппроксимации экспериментального распределения фракций концентрата.

Для корректного применения критерия Гири в этом случае необходимо установить соответствие между отклонениями кривых друг от друга и ошибками этого отклонения, т.е. по известной схеме учесть вес отдельных точек:

$$C_{\infty} = M|\xi| = \frac{\sum_{i=1}^n |\xi_i g_i|}{\sum_{i=1}^n g_i}, \quad (1)$$

$$C_{\text{н}} = \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i^2 g_i}{\sum_{i=1}^n g_i}}, \quad (2)$$

где  $\xi_i$  - отклонение прогнозируемой кривой от экспериментальной в точке  $i$ ,

$g_i$  - вес  $i$ -ой точки как величина  $i$ -того интервала аргумента кривой.

Однако, теперь возникает вопрос, что принимать за ошибку  $\xi_i$  между кривыми - ошибку по  $\lambda$  или ошибку по  $\gamma$ ? С точки зрения суммирования ошибок с учётом их веса это задача на вычисление площади между кривыми, так что выбор прямой или обратной функций не повлияет на результат вычисления этой площади по чебышевской метрике, но проявится через знаменатели в (1) и (2): если в качестве  $\xi_i$  принять  $\Delta\lambda_i$ , то формулы (1) и (2) дадут оценки ошибок по  $\lambda$ , иначе - по  $\gamma$ . Так как в основной задаче варьированием коэффициента избирательности  $I_{\text{изб}}$  изменяется распределение фракций, то в качестве ошибок принимаем расстояние между кривыми в направлении оси  $\gamma$ , т.е. полагаем  $\xi_i = \Delta\gamma_i$ ,  $g_i = \Delta\lambda_i$ .

Особенность вычисления ошибок  $\xi_i = \Delta\gamma_i$  состоит в том, что сопоставляемые распределения фракций по экспериментальным данным  $\gamma_{\text{эк}}(\lambda)$  и по результатам аппроксимации  $\gamma_{\text{ка}}(\lambda)$  представляются кусочно-линейными функциями, опорные точки которых не совпадают друг с другом. Для получения толерантности сопоставляемых массивов опорных точек принимается, что каждая опорная точка одного массива на основании метода линейной интерполяции порождает новую опорную точку в другом массиве в интервале, который оказывается подходящим "ищущей опорной точке". Учёт этих особенностей описания изучаемых распределений позволил исключить возможные ошибки применения формул (1) и (2).

Результаты множества выполненных имитационных исследований не противоречили рабочей гипотезе. Однако, как известно, для опровержения гипотезы достаточно одного отрицательного результата, и такой результат был получен при анализе данных исследования обогащения угля класса 6-150 мм в шнековом (спиральном) сепара-

торе СВШ-15 [8]. Результаты выполненного анализа с помощью программы EXPERT12 показаны на рисунке.

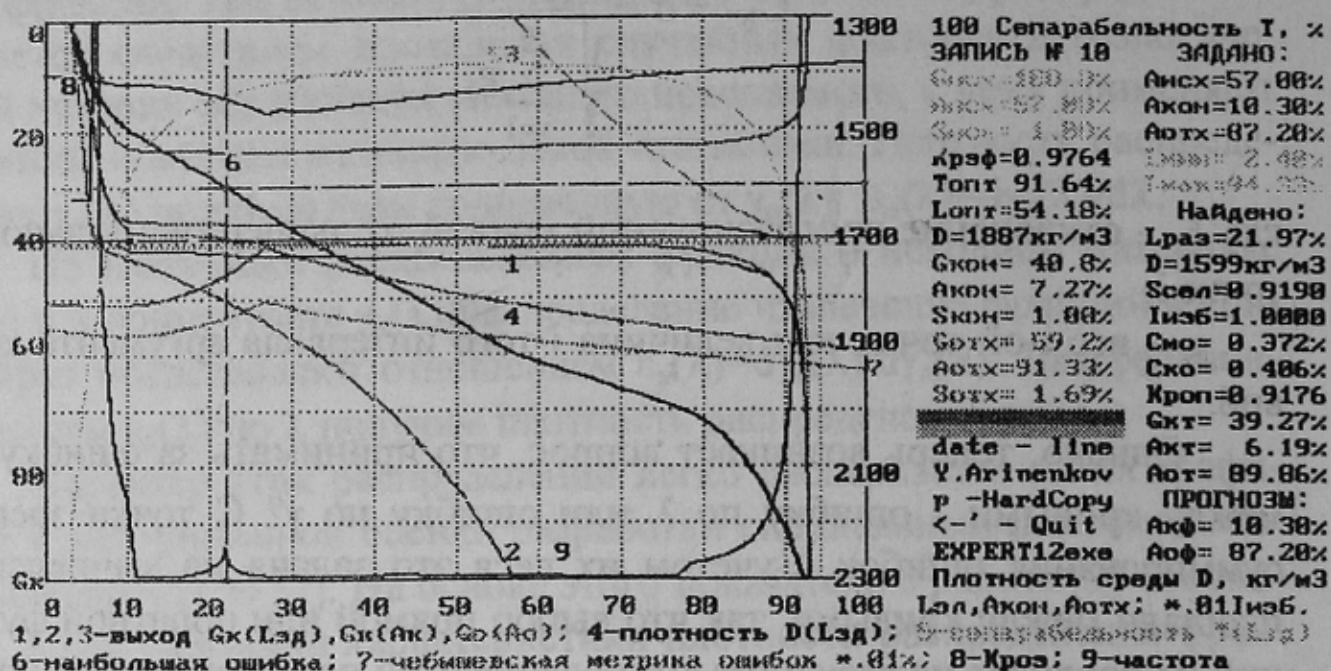


Рисунок - Несовпадение абсцисс минимума критерия Гири и ошибок

Этот эксперимент выполнен авторами работы [8] на углях высокой зольности  $A_{\text{н}}^{\text{д}} = 57\%$  и, по нашей оценке, при высокой их сепарабельности  $T_{\text{отт}}=91,64\%$ .

Как видно из полученных результатов, сепарационный процесс имел низкую селективность  $S_{\text{сел}}=0,92$  при избирательности  $I_{\text{изб}}=1$ . Ошибка описания выходов фракций концентрата в чебышевской метрике составила  $0,372\%$ , суммарные параметры получены без ошибок, в пределах заданного формата печати результатов.

Однако, в отличие от результатов предыдущих исследований [1, 2], здесь наблюдается глобальный минимум критерия Гири (верхняя тёмная кривая с прогибом вниз) при глобальном максимуме ошибок  $S_{\text{мо}}$  и  $S_{\text{ко}}$  (почти параллельные кривые), а не при их минимуме. Так как этот отрицательный результат приобретал статус решающего для заключения о непригодности критерия Гири, логичным было проверить истинность самого этого результата. Совершенно ясно, что вопрос истинности (правильности, достоверности) экспериментальных данных работы [8], если его и поставить по причине излишней предосторожности, не будет иметь какого-либо отношения к обсуждаемой ситуации: критерий должен объективно оценивать любые масси-

вы данных. Истинная причина отрицательного результата может быть следствием либо ошибки программной реализации метода с применением критерия Гири, что проверяемо, либо принципиального недостатка структуры самого критерия.

При проверке применяемых в программе алгоритмов особое внимание было обращено на реализацию формулы (2). Перебор вариантов вычисления интеграла подкоренного выражения (2) не повлиял на результат применения критерия Гири, каких-либо ошибок в программе не обнаружено.

Следовательно, на основании полученного результата нужно признать, что критерий Гири оказывается неоднозначным, гипотезу о возможности применения этого критерия для оценки результатов поиска оптимальной величины коэффициента избирательности следует отбросить как несостоятельную.

Для решения поставленной задачи достаточно анализировать зависимость  $C_{\text{мо}}(I_{\text{изб}})$ , минимум которой однозначно и более критично, чем  $C_{\text{ко}}$ , определяет оптимальную аппроксимирующую функцию для описания прогнозируемой характеристики.

Таким образом, установлено несоответствие критерия Гири условию однозначности и при поиске минимума ошибок и при оценке раскрытия фракций в обогатительных задачах. Рекомендованное для практического применения среднее модулей ошибок (чебышевская метрика) в форме (1) корреспондирует с положениями теории описания параметров обогатительных процессов и оценивает эффекты (площадь отклонения характеристики ошибок от средневзвешенной ошибки), которые подобным образом учитываются в показателе сепарабельности [7]. При этом чебышевская метрика в форме (1) оказывается более критичной при поиске минимума ошибок, чем среднеквадратическая ошибка по (2), и поэтому является безусловно предпочтительной.

Критерию Гири в задаче оценки раскрытия элементарных фракций противопоставлен показатель сепарабельности (7), который оказывается толерантным во всех обогатительных задачах, тем более, что с помощью этого показателя разработан метод имитации теоретических характеристик плотности распределения фракций полезного ископаемого, см. работу автора [9], позволяющий в конечном счёте оценить именно сам коэффициент раскрытия фракций, при этом

учитывается не только частота фракций, но и характер её распределения в пределах диапазона физического существования фракций.

Список источников.

1. Ариненков Ю.Д. Оценка и прогноз параметров обогащения. // Наукові праці Донецького державного технічного університету Матеріали науково-технічної конференції «Гірнична електромеханіка і автоматика» 20-24 листопада 2001 р. Серія: Гірничо-електромеханічна. - Донецьк, 2001. Випуск 35. -С.10-15.
2. Ариненков Ю.Д. Оценка раскрытия элементарных фракций полезных ископаемых // Наукові праці Доцецького державного технічного університету. Серія: Гірничо-електромеханічна. - Донецьк, 2002. Випуск 42. - С.32-38.
3. Лотов А.В. Введение в экономико-математическое моделирование. - М.: Наука, Гл.ред. физ.-мат. лит., 1984. С. 112.
4. Pearson E.S., Hartley H.O. Biometrika tables for staticians. V.1. - Cambridge University Press, 1956.
5. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. - М.: Наука, 1983. - 416с.
6. Geary R.S. The ratio of the mean deviation to the standard deviation as a test of normality / - Biometrika, 1935, -Vol. 27, p. 310-332.
7. Arinenkov Y. Universal model for research both optimization of technological processes and circuits of coal preparation factories on the COMPUTER // 2nd Regional APCOM'97 Symposium on COMPUTER APPLICATIONS AND OPERATIONS RESEARCH IN THE MINERAL INDUSTRIES. Moscow, Russia - 1997. - Moscow: The Moscow State Mining University Publishing Center, 1997. - 536 p., p. 209-214.
8. Молявко А.Р., Кинареевский В.А. Новая технология обогащения разубоженных углей разрезом комбината «Кемеровуголь» // Обогащение и брикетирование угля: Реф. сб. - М.: ЦНИИТЭИУ, 1975. № 2 (161). - С.8-10.
9. Ариненков Ю.Д. Имитация характеристики плотности распределения фракций полезного ископаемого // Наукові праці Доцецького державного технічного університету. Серія: Інформатика, обчислювальна техніка. - Донецьк, 2002. Випуск 30. - С. 168-176.