

## ОЦЕНКА РАСКРЫТИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФРАКЦИЙ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

Ариненков Ю.Д., канд. тех. наук, доцент  
Донецкий национальный технический университет

*Поставлена задача обосновать критерий раскрытия элементарных фракций полезного ископаемого в задачах оценки и прогноза параметров оптимальных режимов обогатительных процессов для целей исследования технологии в промышленных условиях и расчёта технологических схем и дано её решение.*

*Put problem to motivate a criterion of opening the elementary factions useful fossilized in problems of evaluation and forecast of parameters of optimum modes of coal preparation processes for the whole technology study in industrial conditions and calculation of technological schemes and is given its decision.*

Степень раскрытия элементарных фракций полезного ископаемого является показателем подготовленности сыпучего материала к последующей сепарации с целью выделения полезного продукта. Для повышения степени раскрытия фракций применяют энергоёмкие измельчительные процессы. В научной литературе по дроблению и измельчению полезных ископаемых обычно много внимания уделяется вопросу описания раскрытия минеральных зёрен через геометрические представления, что, конечно, логично, но только в одной работе [1] упоминается о предложении П.К. Сена и С. Пой определять степень раскрытия минералов по результатам их флотации. Действительно, измельчение необходимо постольку, поскольку оно способствует повышению сепарабельности измельчаемого материала. Однако, оценка сепарабельности материала [2], несмотря на специальные меры компенсации, всё же зависит и от содержания компонентов в исходном материале, и от режима его сепарации, что будет вносить заметные ошибки в оценку свойств измельчённого материала. Поэтому здесь ставится задача разработать критерий раскрытия элементарных фракций, величина которого не зависит ни от содержания компонентов в исходной руде, ни от режима сепарации измельчённого продукта, и необходимые предпосылки для решения такой задачи имеются.

Так, в работе автора [3] предложено к обогащительным системам применять принцип моделирования "as is", без поиска несуществующих закономерностей в форме полиномиальных аппроксимаций, и в полном соответствии с этим принципом в работе автора [4] при обосновании правильности показателя селективности (точности) сепарационного процесса и прогноза его параметров установлено не наблюдавшееся ранее соотношение: при варьировании коэффициента избирательности в прогнозирующей модели среднеквадратическая ошибка модели  $C_{ко}$  и среднее модулей ошибок  $C_{мо}$  синхронно изменялись и так, что их минимумы достигались при почти одинаковых значениях аргумента (коэффициента избирательности), причём, всегда соблюдалось  $C_{мо} < C_{ко}$ . Рассмотрим возможность применения этого соотношения в качестве критерия полноты раскрытия элементарных фракций.

Пусть имеется массив данных

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}, \quad n \geq 2. \quad (1)$$

Воспользуемся известной зависимостью

$$\left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n x_i \cdot x_j. \quad (2)$$

Пусть массив (1) будет центрированный, т.е.  $x_i$  - ошибки, и поэтому

$$\sum_{i=1}^n x_i = 0, \quad (3)$$

и из зависимости (2) получаем

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = -2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n x_i \cdot x_j, \quad (4)$$

В этой формуле правая часть является альтернативой обычно применяемой в вычислениях левой части, поэтому альтернативное выражение для вычисления среднеквадратической ошибки будет следующее:

$$\delta = \sqrt{-\frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n x_i \cdot x_j}. \quad (5)$$

Рассмотрим оценку ошибок, заменив в массиве  $X$  элементы  $x_i$  их модулями:

$$|X| = \{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_i|, \dots, |x_n|\}. \quad (6)$$

Теперь вместо зависимости (2) имеем



$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i|\right)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n |x_i \cdot x_j|. \quad (7)$$

Из (7) сумма квадратов отклонений составит величину

$$\sum_{i=1}^n |x_i|^2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|\right)^2 - 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n |x_i \cdot x_j|. \quad (8)$$

На основании равенства левых частей (4) и (8) можно утверждать, что среднее модулей ошибок составит величину

$$C_{\text{мо}} = \sqrt{\frac{2}{n^2} \left( \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n |x_i \cdot x_j| - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n x_i \cdot x_j \right)}. \quad (9)$$

Теперь можем ввести понятие коэффициента рассеяния ошибок

$$K_{\rho_0} = \frac{C_{\text{мо}}}{\delta} = \sqrt{\frac{1}{n} \left( 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n |x_i \cdot x_j|}{\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n x_i \cdot x_j} \right)}. \quad (10)$$

Проанализируем свойства полученного критерия. Так, наибольшее значение  $K_{\rho_0}$  имеет место, если все  $|x_i| > 0$ ,  $|x_i| = |x_j|$ ,  $i \neq j$ , причём, сама величина модуля не будет играть роли. Например, для массива размера  $n=10$ ,  $X = \{-5, -5, -5, -5, -5, 5, 5, 5, 5, 5\}$ , получим

$$K_{\rho_0} = \sqrt{\frac{1}{10} \left( 1 + \frac{1125}{125} \right)} = 1.$$

Наименьшее значение  $K_{\rho_0}$  будет иметь место при единственной ковариации  $x_i \cdot x_j < 0$ , при этом будет  $|x_i| = |x_j|$ , а величина модуля также не будет играть роли. Получим  $K_{\rho_0} = (2n^{-1})^{1/2}$ , при  $n \rightarrow \infty$   $K_{\rho_0} \rightarrow 0$ . Например, для массива размера  $n=10$ ,  $X = \{-5, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$  найдём  $K_{\rho_0} = (2 \cdot 10^{-1})^{1/2} = 0,44721$ . Таким образом, нижний предел критерия  $K_{\rho_0}$  существенно зависит от количества точек  $n$ . Для устранения этой зависимости воспользуемся известным правилом нормирования, получим критерий рассеяния ошибок нормированный  $K_{\rho_{\text{он}}}$ ,

$$K_{\rho_{\text{он}}} = \frac{K_{\rho_0} \sqrt{n} - \sqrt{2}}{\sqrt{n} - \sqrt{2}}. \quad (11)$$

Далее введём следующие аналогии:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \Leftrightarrow \beta_{\text{и}} = \frac{\int_0^{\gamma_{\text{и}}} \lambda(\gamma) d\gamma}{\gamma_{\text{и}}},$$

$$X_i - \bar{X} \Leftrightarrow [\lambda(\gamma) - \beta_{\text{и}}],$$

где  $\lambda(\gamma)$  - зольность фракции от выхода,  $\beta_{\text{и}}$  - зола исходного. Тогда среднее модулей отклонений кривой  $\lambda(\gamma)$  от  $\lambda = \beta_{\text{и}}$  составит

$$C_{\text{мол}} = \frac{\int_0^{\gamma_{\text{и}}} |\lambda(\gamma) - \beta_{\text{и}}| d\gamma}{\gamma_{\text{и}}}, \quad (12)$$

среднеквадратическое отклонение кривой  $\lambda(\gamma)$  от  $\lambda = \beta_{\text{и}}$  составит

$$C_{\text{кол}} = \sqrt{\frac{\int_0^{\gamma_{\text{и}}} [\lambda(\gamma) - \beta_{\text{и}}]^2 d\gamma}{\gamma_{\text{и}}}}. \quad (13)$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что вместо дискретных данных теперь рассматриваются непрерывные кусочно-линейные зависимости, что эквивалентно бесконечно большому количеству точек, поэтому коэффициент раскрытия элементарных фракций можно сразу записать без нормирования как

$$K_{\text{рэф}} = \left( \frac{C_{\text{мол}}}{C_{\text{кол}}} \right)^{4,814}, \quad (14)$$

где показатель степени выравнивает шкалу этого критерия, тоже (10), так, что на равномерном распределении ошибок его оценка 0,8659 станет равной 0,5. Результаты работы модифицированной программы-прототипа [4] на конкретном примере обсуждаются ниже.

Фракционный состав обогащаемого угля и полученного концентрата представлен в табл. 1.

Исходными данными для работы программы являются также зольность исходного материала  $A_{\text{и}}=41,70\%$ , зольность полученного концентрата  $A_{\text{к}}=26,07\%$ , зольность полученных отходов  $A_{\text{х}}=77,44\%$ . Результаты работы программы показаны на рисунке.



Таблица 1 - Фракционный состав исходного угля и концентрата

№ п/п	Плотность фракции кг/м <sup>3</sup>	Выход фракции, %	Зола фракции, %	Сера фракции, %	Выход концентрата, у.е.
0	1100-1200	0,00	18,50	1,00	0,00
1	1200-1500	53,71	19,40	1,00	53,52
2	1500-1600	7,74	34,80	1,00	7,49
3	1600-1700	3,61	42,90	1,00	3,03
4	1700-1800	2,16	47,50	1,00	1,21
5	1800-1900	1,90	55,80	1,00	0,88
6	1900-2200	30,88	80,80	1,00	3,44
7	2200-2300	0,00	84,17	1,00	0,00
	1200-2200	100,00	41,70	1,00	69,57

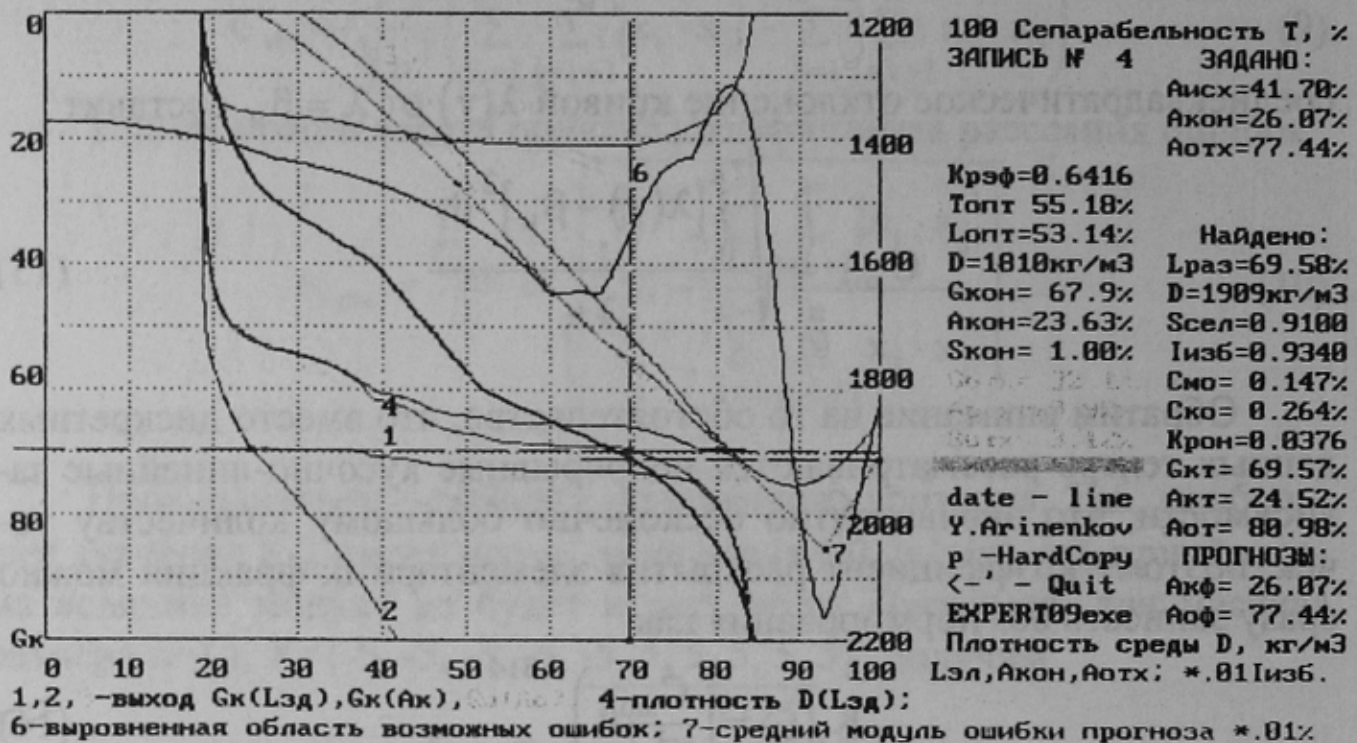


Рисунок - Результаты работы программы EXPERT09

Из представленных на этом рисунке результатов исследования свойств обогащаемого угля, оценки селективности обогащения и применимости этой оценки в качестве прогнозирующей модели обращает на себя внимание зависимость критерия  $K_{рон}$  от величины коэффициента избирательности  $I_{изб}$ . Эта зависимость при успешном эксперименте, как в данном случае, имеет чётко выраженный глобальный минимум на уровне 0,0376, что, как показали имитационные исследования на числовых массивах, приближённо соответствует нормальному распределению ошибок (функция нормального распределения по Гауссу не имеет ограничений по величине ошибок, в то время как область реального обогатительного эксперимента физически ограничена). Ясно, что эта зависимость является отражением со-

отношения между оценками  $C_{мо}$  и  $C_{ко}$ : там, где эти оценки сближаются, коэффициент  $K_{рон}$  принимает значения 0,9 и выше (распределение ошибок приближается к бимодальному), при наибольшем различии этих оценок в реальных экспериментах обычно  $K_{рон} \approx 0,035$  (приблизительно соответствует нормальному распределению ошибок). Это делает целесообразным применение коэффициента  $K_{рон}$  для информационного сопровождения всех экспериментальных исследований с помощью программы EXPERT09, однако, для контроля ошибок эксперимента ценность информации в виде оценки  $C_{мо}$  сохраняется.

Правильность сделанных выводов можно проверить сопоставлением исходных данных табл.1 с результатами прогнозирования фракционного состава концентрата и отходов, синтезированного программой EXPERT09 и представленного в табл.2.

Таблица 2 - Прогноз фракционного состава концентрата и отходов

Плотность выделения	Фракции концентрата		Всплывший концентрат		Фракции отходов		Всплывшие отходы	
	Выход, %	Зола, %	Выход, %	Зола, %	Выход, %	Зола, %	Выход, %	Зола, %
1100-1200	11,58	18,53	11,58	18,53	0,04	18,53	0,04	18,53
1200-1500	41,95	19,64	53,53	19,40	0,14	19,64	0,18	19,40
1500-1600	6,84	34,41	60,36	21,10	0,90	37,78	1,08	34,71
1600-1700	2,51	42,90	62,88	21,97	1,10	42,90	2,18	38,83
1700-1800	1,50	47,50	64,38	22,57	0,66	47,50	2,84	40,84
1800-1900	1,32	55,80	65,70	23,24	0,58	55,80	3,42	43,37
1900-2200	3,87	74,16	69,57	26,07	27,01	81,75	30,43	77,44

Из этой таблицы видно, что указанные ошибки наблюдаются только в пределах фракций, суммарные параметры ошибок не имеют.

Коэффициент раскрытия элементарных фракций  $K_{рэф}$  по (14) является непрерывным аналогом дискретной оценки  $K_{рон}$  по (10), но области их применения различны:  $K_{рон}$  разработан для поиска минимума ошибок эксперимента, а  $K_{рэф}$  предназначен для поиска максимума раскрытия фракций. Тем не менее, установленные свойства одного из них формально могут быть приняты таковыми же и для другого. Так, на представленном рисунке в левой колонке числовой информации приведена величина коэффициента раскрытия элементарных фракций  $K_{рэф} = 0,6416$ . Судя по форме кривой  $\gamma(\lambda)$ , нужно согласиться, что эта характеристика представляет в своём составе большое количество промежуточных фракций, показатель сепарабельности также имеет очень малую величину  $T_{опт} = 55,18\%$ , так что раскрытие элементарных фракций низкое. Важно, что эта оценка характеризует форму кривой



$\gamma(\lambda)$  вне зависимости от метода (формулы и коэффициентов) её описания и поэтому будет наиболее объективной оценкой степени раскрытия элементарных фракций в задаче выбора режима оптимального измельчения сыпучего материала. Модифицированная программа EXPERT09 будет полезна для идентификации моделей процессов обогащения при управлении работой обогатительной фабрики по макромоделю её технологии [5].

Таким образом, в результате выполненного исследования установлена возможность оценивать степень разброса ошибок моделирования (прогнозирования) фракционного состава на основе соотношения среднего модуля ошибок и среднеквадратической ошибки, позволившего сформулировать коэффициент разброса ошибок  $K_{po}$  и изучить его свойства на основе альтернативного описания выражений для вычисления ошибок.

На основе аналогий структуры формулы вычисления средней величины числового массива и определения средневзвешенной зольности интегрированием непрерывной функции общего вида и также аналогии вычисления дискретных ошибок и отклонений величины элементарной зольности непрерывной функции от заданной зольности разделения на уровне зольности изучаемого материала по аналогии с коэффициентом  $K_{po}$  предложен и разработан коэффициент раскрытия элементарных фракций, не зависящий от метода (формулы и коэффициентов) его описания и поэтому предлагаемый как наиболее объективная оценка степени раскрытия элементарных фракций в задаче выбора режима оптимального измельчения сыпучего материала.

Список источников.

1. Серго Е.Е. Дробление, измельчение и грохочение полезных ископаемых. Москва, "Недра", 1985. 286с.
2. Ариненков Ю.Д. Методы анализа и синтеза показателей обогатимости. /В кн.: Применение ЭВМ и математических методов в горном деле. Труды 17-го международного симпозиума. СССР. Москва, 20 - 25 октября 1980 г. Москва, Недра, 1982. Томов 3, том 2, 468 с., с.447 - 451.
3. Arinenkov Y. Universal model for research both optimization of technological processes and circuits of coal preparation factories on the COMPUTER / 2nd Regional APCOM'97 Symposium on COMPUTER APPLICATIONS AND OPERATIONS RESEARCH IN THE MINERAL INDUSTRIES. Published by: The Moscow State Mining University Publishing Center. Moscow, Russia - 1997. 536p., p.209-214.
4. Ариненков Ю.Д. Оценка и прогноз параметров обогащения. // "Наукові праці Донецького державного технічного університету". Випуск 35. Серія: гірничо-електромеханічна. Донецьк: ДонНТУ, 2001. 211с., с.10-15.
5. Ариненков Ю.Д. Макромодель схемы обогатительной технологии. /В кн. "Наукові праці Донецького державного технічного університету". Випуск 27. Серія: Гірничо-електромеханічна. Донецьк, 2001. 462с., с.7-16.