ISSN 1025-6415

Доповіді

НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

МАТЕМАТИКА
ПРИРОДОЗНАВСТВО
ТЕХНІЧНІ НАУКИ

9 2012

Зміст

Математика

Гефтер С. Л., Стулова Т. Е. О корректности некоторого нерезонансного операторно-дифференциального уравнения в пространстве целых функций экспоненциального типа 7

Ковалев А. М., Неспирный В. Н., Суйков А. С. Существование функции со знакопостоянной производной для автономных систем дифференциальных уравнений 13

Лавренюк Я. В. Про незвідні системи твірних у групах автоморфізмів кореневих дерев . 19

Інформатика та кібернетика

Зуб С. С., Ляшко С. И., Ляшко В. С. Об устойчивости орбитального движения двух магнитных тел 23

Скобелев В. В. Анализ задачи распознавания автомата над кольцом 29

Стоян В. А., Двірничук К. В. До побудови інтегрального еквіваленту лінійних диференціальних моделей 36

Шевченко А. И., Миненко А. С., Золотухина О. А. Численный анализ одной нелинейной математической модели 44

Механіка

Жук О. П., Кубенко В. Д., Жук Я. О. Про радіаційну силу плоскої акустичної хвилі, яка діє на тверде сферичне тіло в заповненій рідиною циліндричній порожнині 48

Лила Д. М. Эксцентричная форма неустойчивости вращающегося составного плоского кругового диска 55

Мартынюк А. А. О стабилизации движения систем с последействием импульсными возмущениями 62

Фізика

Аверков Ю. О. Влияние дефектного слоя на границе фотонного кристалла и плазмоподобной среды на свойства поверхностных электромагнитных состояний 66

Теплофізика

Круковский П. Г., Яцевский В. А. Гидродинамические особенности течения и теплообмена во взаимосвязанных каналах силовых масляных трансформаторов 72

Матеріалознавство

Азаренков М. О., Кіріченко В. Г., Коваленко О. В., Литовченко С. В. Фазові перетворення інтерметалідів та моделювання ядерних трансмутаційних ефектів у цирконієвих сплавах 79

УДК 517.988

Член-корреспондент НАН Украины **А. И. Шевченко, А. С. Миненко, О. А. Золотухина**

Численный анализ одной нелинейной математической модели

Исследуется задача Стефана с учетом конвективного движения в жидкой фазе. Построено приближенное решение задачи с применением метода малого параметра.

Постановка задачи. Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^3$ — заданная область, граница которой $\partial\Omega$ состоит из двух замкнутых, связных гладких поверхностей Γ^+ и Γ^-, не имеющих самопересечений, причем поверхности $\Gamma^\pm$ предполагаются принадлежащими классу $\mathrm{H}^{5+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Пусть далее $\Gamma_t (t \in [0,T])$ — гладкие замкнутые поверхности, лежащие внутри Ω, такие, что Γ^+ лежит внутри ограничений области, границей которой является Γ_t. Свободная поверхность Γ_t — граница раздела фаз в момент времени t — разбивает область Ω на две связные подобласти Ω_t^- и Ω_t^+, занимаемых твердой и жидкой фазами соответственно. Требуется определить вектор скорости $\vec{V}(x,t)$, давление $p(x,t)$, распределения температур твердой и жидкой фаз $u^-(x,t)$ и $u^+(x,t)$ и свободную поверхность Γ_t по следующим условиям:

$$\frac{\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{V}(x,t) + \nabla p(x,t) = \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\vec{V}(x,t) + \vec{f}(u^+), \quad \nabla\vec{V}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in D_T^+, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u^+(x,t) + (\vec{V}\nabla)u^+(x,t) - a_+^2\nabla^2 u^+(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in D_T^+, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u^-(x,t) - a_-^2\nabla^2 u^-(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in D_T^-, \tag{3}$$

$$u^\pm(x,t)\big|_{t=0} = A^\pm(x), \qquad u^\pm(x,t)\big|_{x\in\Gamma^+\bigcup\Gamma^-} = B^\pm(x,t), \tag{4}$$

$$\vec{V}(x,t)\big|_{t=0} = \vec{C}(x), \qquad \vec{V}(x,t)\big|_{x\in\Gamma^+\bigcup\Gamma_t} = 0, \tag{5}$$

$$u^\pm(x,t)|_{x\in\Gamma_t} = 0, \quad \sum_{i=1}^{3}\left[K_-\frac{\partial u^-}{\partial x_i} - K_+\frac{\partial u^+}{\partial x_i}\right]\cos(n,x_i) + K\cos(n,t) = 0, \quad x \in \Gamma_t, \tag{6}$$

где $D_T^\pm = \{(x,t)\colon x \in \Omega_t^\pm, t \in (0,T)\}$; $\partial\Omega^\pm = \Gamma_t\bigcup\Gamma^\pm$; $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$; $\vec{n}$ — нормаль к Γ_t, направлена в сторону Ω_t^+. Предполагается, что $B^\pm(x,t) \in \mathrm{H}^{3+\beta,(3+\beta)/2}(\Gamma^\pm \times [0,T])$, $0 < \beta < \alpha$, $A^\pm(x) \in \mathrm{H}^{5+\alpha}(\overline{\Omega}_0^\pm)$, $\vec{C}(x) \in \mathrm{H}^{2+\alpha}(\overline{\Omega}^+)$, где $\Omega_0^\pm$ — области, на которые разбивает Ω граница раздела фаз Γ_0 в момент времени $t = 0$ и $B^\pm(x,t) \geqslant \varepsilon_0 > 0$ при $(x,t) \in \Gamma^\pm \times [0,T]$.

Параметры $a_\pm$, $K_\pm$, K, Re, ε_0 считаются положительными постоянными, а $\vec{f}(u^+)$ — принадлежащей классу $C^2(R^1)$, $\vec{f}'(u^+)$ — ограниченной в R^1. Задача (1)–(6) при малых значениях t разрешима в классе гладких функций, при этом $u^\pm \in \mathrm{H}^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{D_T^\pm})$, $\vec{V} \in \mathrm{H}^{2+\beta,(2+\beta)/2}(\overline{D_T^\pm})$, а свободная поверхность Γ_t принадлежит классу $\mathrm{H}^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}$ [1].

Настоящая работа посвящена приближенному анализу задачи (1)–(6).

Приближенное решение задачи (1)–(6). Для точек поверхности Γ_0 введем координаты $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, через $x(\omega) \in \Gamma_0$ или через ω будем обозначать также соответствующие точки в R^3. Далее, пусть $\vec{n}(\omega)$ — нормаль к Γ_0, направленная внутрь Ω_0^+. В работе [1] установлено, что поверхность Γ_t можно представить в виде $\Gamma_t = \{x = x(\omega) + \vec{n}(\omega)\rho(\omega, t)\}$ с некоторой функцией $\rho(\omega, t)$ класса $\mathrm{H}^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\Gamma_0 \times [0, T])$, так что $\rho(\omega, 0) = 0$.

Предположим, что при малых значениях Re неизвестные нашей задачи можно представить в виде степенного ряда:

$$u^{\pm}(x,t) = u_0^{\pm}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (\mathrm{Re})^k u_k^{\pm}(x,t);$$

$$V_i(x,t) = V_{i0}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (\mathrm{Re})^k V_{ik}(x,t), \qquad i = 1,2,3;$$

$$\rho(\omega,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\mathrm{Re})^k \rho_k(\omega,t).$$

В работах [1–8] изучены нулевые и первые приближения задачи (1)–(6) для малых чисел Re. При этом установлено, что $u_0^{\pm} = A^{\pm}(x)$, $\vec{V}_0(x) = \vec{C}(x)$, $\rho_1(\omega,t) \in \mathrm{H}^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\Gamma_0 \times [0,T])$, $u_1^{\pm}(x,t) \in \mathrm{H}^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{D_T^{\pm}})$, причем $\rho_1(\omega,t)$ находим как неподвижную точку сжимающегося оператора M_1:

$$M_1\rho_1 = \frac{1}{K}\int_0^t \left(K_- \frac{\partial u_1^-}{\partial n} - K_+ \frac{\partial u_1^+}{\partial n} + f(x,t)\right) dt, \qquad x(\omega) \in [0,T],$$

а $f_1(x,t)$ — некоторая функция класса $\mathrm{H}^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}$.

Приближенное построение поверхности $\mathbf{\Gamma_t}$. Рассмотрим случай, когда $B^{\pm} = B^{\pm}(x)$ и $\Omega = \{(x_1,x_2,x_3)\colon r^2 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < R^2\}$. Тогда нулевое приближение находим как решение следующей задачи:

$$\begin{cases} \nabla^2 u^{\pm}(x) = 0, & x \in \Omega_0^{\pm}, \quad A^{\pm}(x)|_{\Gamma^{\pm}} = B^{\pm}(x), \quad u^{\pm}(x)|_{\Gamma_0} = 0, \\ \vec{C}(x) = 0, & x \in \overline{\Omega_0^{\pm}}, \quad |\nabla u^-(x)| - |\nabla u^+(x)| = 0, \quad x \in \Gamma_0. \end{cases} \tag{7}$$

Заметим, что замена $\widetilde{u}^- = K_- u^-$ при $x \in \Omega^-$ и $\widetilde{u}^+ = K_+ u^+$, если $x \in \Omega^-$сводит задачу (7) к случаю $|\nabla u^-(x)| = |\nabla u^+(x)|$, $x \in \Gamma_0$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что это условие выполнено. Нулевое приближение $u_0^{\pm}(x)$, Γ_0 найдем из условия минимума функционала $Y(u_0^{\pm}, \Gamma_0) = \iiint\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 dx_1 dx_2 dx_3$ (здесь $\Omega = \Omega_0^+ \bigcup \Omega_0^-$ и $u = u^-$ при $x \in \Omega^-$ и $u = u^+$, если $x \in \Omega^+$).

Далее, рассматривая функционал Yв сферических координатах, получим

$$Y(u_0) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_r^R \left(u_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}u_0^2 + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta}u_\varphi^2\right)\rho^2 \sin\theta\, d\varphi\, d\theta\, d\rho.$$

Минимум функционала ищем в следующем виде:

$$u = B^+ + \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - r^2}(B^- + B^+) + (R^2 - \rho^2)(\rho^2 - r^2)\sum_{k=0}^{\infty} C_k \rho^k.$$

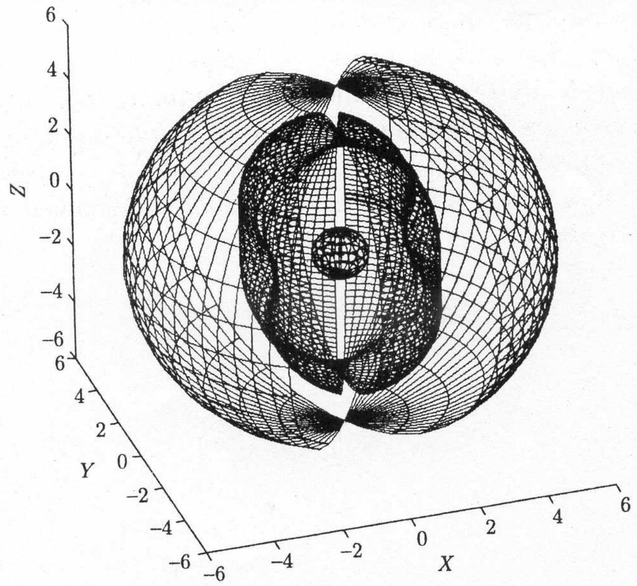

Рис. 1

Неизвестные коэффициенты C_K определяются методом Ритца. В частности, в случае нулевого приближения

$$u_0 = B^+ + \frac{R^2-\rho^2}{R^2-r^2}(B^- + B^+) + (R^2-\rho^2)(\rho^2 - r^2)C_0,$$

из уравнения $\partial Y(u_0)/\partial C_0 = 0$ определим коэффициент C_0. Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Поверхность Γ_0 представляет собой поверхность класса C^∞, не имеющую самопересечений и расположенную относительно Γ^+ и Γ^- аналогично поверхности Γ_t в задаче* (1)–(6).

Доказательство следует из принципа максимума, примененного к гармонической функции $\Psi(x) = -\dfrac{\partial u_0(x)}{\partial \vec{r}}$ оценок $-\dfrac{\partial u_0(x)}{\partial \vec{r}}\Big|_{\overline{\Omega}} \geqslant \widetilde{\varepsilon}_0 > 0$ и теоремы о неявной функции, примененной к $\Psi(x)$. Здесь $\vec{r}$ — радиус-вектор точки x.

Отсюда следует, что поверхность $\Gamma_0\colon \rho = \rho_0(\varphi,\theta)$ можно найти из условия $u_0(\varphi,\theta,\rho_0(\varphi,\theta)) = 0$. Тогда для поверхности Γ_t можно воспользоваться уравнением [2]:

$$\Gamma_t = \rho(\varphi,\theta,t) = \rho_0(\varphi,\theta) - \mathrm{Re}\,\frac{u_1^\pm(\varphi,\theta,t)}{|\nabla A^\pm(\varphi,\theta)|} + o(\mathrm{Re}).$$

На рис. 1 представлена поверхность Γ_t при следующих значениях параметров: $t = 200$ $R = 6$, $r = 0{,}8$, $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/3$, $-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$, $B^+ = 3[\cos^2\theta + \cos^2\varphi]$, $B = -0{,}35[\cos^2\theta + \cos^2\varphi] - 0{,}1$. Свободная поверхность Γ_t расположена между сферами радиусов R и r.

Предложенный алгоритм построения поверхности Γ_t позволяет исследовать эту поверхность в зависимости от параметров задачи (1)–(6).

1. *Шевченко А. И., Миненко А. И.* Задача Стефана при наличии конвекции // Доп. НАН України. – 2012. – № 1. – С. 20–25.
2. *Миненко А. С.* Вариационные задачи со свободной границей. – Киев: Наук. думка, 2005. – 341 с.

3. *Шевченко А. И., Миненко А. С.* Приближенный анализ многомерной конвективной задачи Стефана // Доп. НАН України. – 2010. – № 4. – С. 30–34.
4. *Шевченко А. И., Миненко А. С.* Приближенный анализ стационарной конвективной задачи Стефана // Там само. – 2010. – № 5. – С. 36–40.
5. *Шевченко А. И., Миненко А. С.* Приближенный анализ пространственной конвективной задачи Стефана // Там само. – 2010. – № 10. – С. 29–33.
6. *Миненко А. С.* Исследование одной конвективной задачи Стефана методом Ритца // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 11. – С. 1546–1556.
7. *Миненко А. С.* О минимизации одного интегрального функционала методом Ритца // Там само. – 2007. – **58**, № 10. – С. 1385–1394.
8. *Шевченко А. И., Миненко А. С.* Математическое моделирование процессов кристаллизации металла с учетом конвекции и примесей // Доп. НАН України. – 2011. – № 6. – С. 35–39.

Институт информатики и искусственного интеллекта ДонНТУ, Донецк

Поступило в редакцию 20.02.2012

Член-кореспондент НАН України **А. І. Шевченко, А. С. Міненко, О. А. Золотухіна**

Числовий аналіз однієї нелінійної математичної моделі

Досліджується задача Стефана з урахуванням конвекції в рідині. Із застосуванням методу малого параметра побудовано наближений розв'язок задачі.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A. I. Shevchenco, A. S. Minenko, O. A. Zolotukhina**

Numerical analysis of a nonlinear mathematical model

The Stefan convection problem in the liquid phase is investigated. The approximate solution is constructed by using the method of small parameter.