УДК 531.3

МЕТОДЫ РАСЧЕТА БУРИЛЬНЫХ КОЛОНН НА ПРОДОЛЬНЫЙ УДАР

Шевченко Ф.Л., докт. техн. наук, проф.,
Улитин Г.М., канд. техн. наук, доц.,
Донецкий государственный технический университет

Рассматривается расчёт весомого стержня на продольный удар методом Фурье.

It is consider the calculation of weights pivot at the longitudinal shock by Fourier method.

Бурильная колонна буровой установки роторного типа (или РТБ) представляет собою трубный став, на котором подвешен рабочий инструмент (бур) и утяжелитель. Расчетную схему можно представить в виде стержня переменной длины l с погонной массой m и жесткостью EF. Для рассмотрения колебательных процессов, возникающих в колонне во время эксплуатации установки будем считать, что стержень жестко защемлен верхним сечением, а на нижнем сечении приложена сосредоточенная масса M, которая может прикладываться к колонне внезапно. Такая нагрузка может проявится при внезапном перемещении верхнего сечения вследствие его задержки, а затем внезапного срыва. Это равносильно тому, что масса нижнего груза прикладывается к стержню с некоторой скоростью v. При такой нагрузке в стержне возникают продольные колебания, которые описываются волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \qquad c = \sqrt{\frac{EF}{m}}. \tag{1}$$

Решение этого уравнения может быть выполнено методом Даламбера или методом Фурье. Решение по Даламберу, описывающее движение прямых и обратных волн деформаций $f(z)$ аргументов $z=ct-x$ и $z=ct+x$, сводится к дифференциальному уравнению

$$f''(z) + \frac{1}{\xi l} f'(z) = f''(z-2l) - \frac{1}{\xi l} f'(z-2l), \qquad \xi = \frac{M}{ml}, \tag{2}$$

что приводит к расчетным формулам для перемещений сечений $u(z)$ и напряжений $\sigma(z)$ [1]:

$$u(z) = -\frac{v}{c}\xi l\left(1 - e^{-z/\xi l}\right), \qquad \sigma(z) = E\frac{v}{c}e^{-z/\xi l} \quad \text{при } 0 < z < 2l, \qquad (3),$$

$$u(z) = -\frac{v}{c}\xi l\left[-e^{-z/\xi l} + \left(1 + 2\frac{z-2l}{\xi l}\right)e^{-(z-2l)/\xi l}\right],$$

$$\text{при } 2l < z < 4l \quad (4)$$

$$\sigma(z) = E\frac{v}{c}\left[e^{-z/\xi l} + \left(1 - 2\frac{z-2l}{\xi l}\right)e^{-(z-2l)/\xi l}\right].$$

На основании этих формул , при выборе начала координат на свободном конце стержня, легко построить эпюры перемещений и напряжений. На рис. 1 показаны такие эпюры $u(0,t)$, $\sigma(0,t)$, $\sigma(l,t)$ для случая $\xi=1$. Наибольшие напряжения $\sigma = 2{,}27Ev/c$ возникают в заделке при $t = 3l/c$.

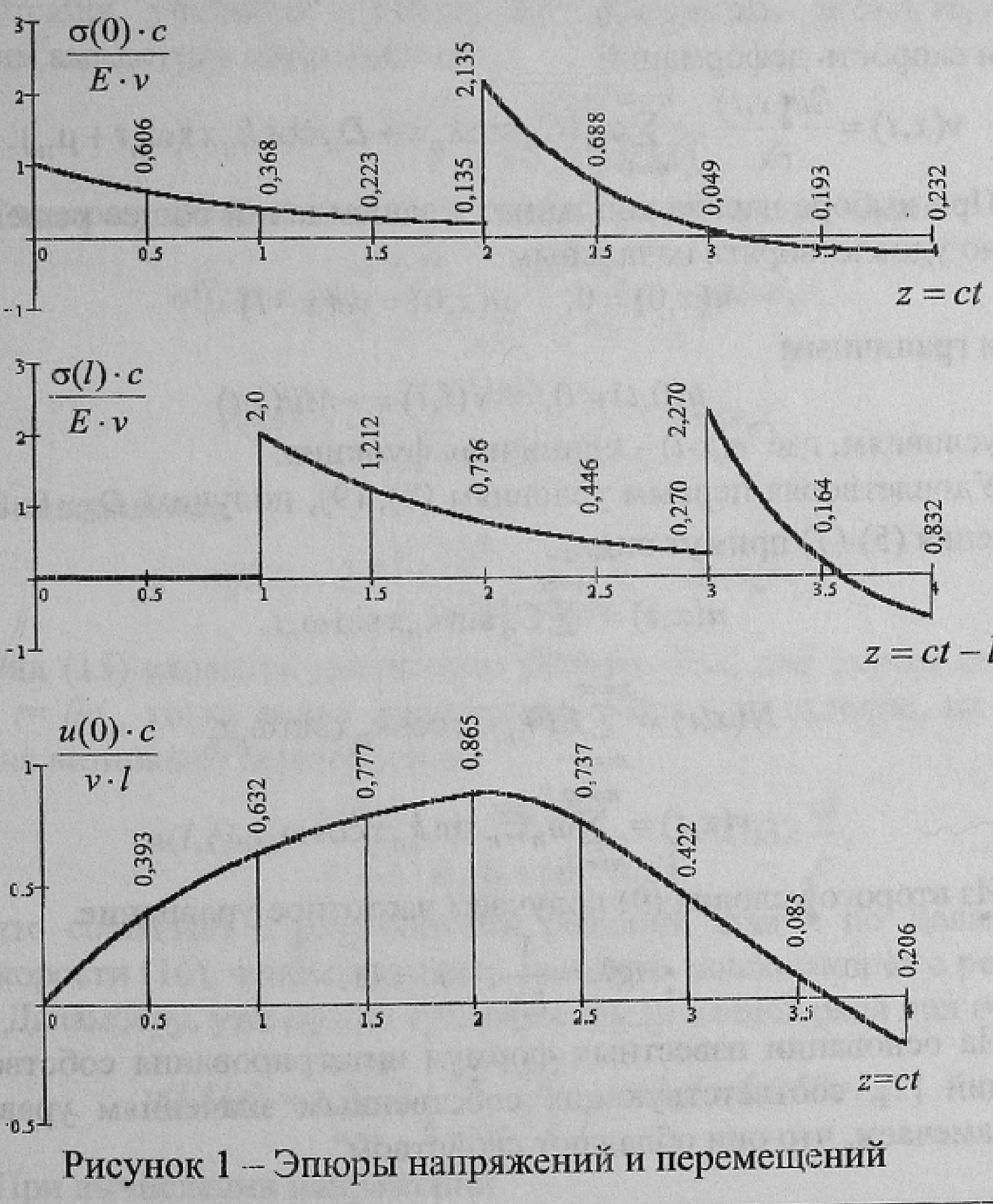

Рисунок 1 – Эпюры напряжений и перемещений

По наглядности решение по Даламберу оказывается удобным для практического пользования, но вывод расчетных формул весьма трудоемкий особенно при больших значениях ξ, когда нужно учитывать несколько интервалов z распространения и наложения волн деформаций, что приводит к весьма громоздким уравнениям.

Существенно проще аналитически эта задача решается, и позволяет формализовать решение, методом Фурье, когда функцию перемещений $u(x,t)$ представляют в форме стоячих волн в виде

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{n=\infty}X(x)T(t)=\sum_{n=0}^{n=\infty}(C_n\sin k_n x+D_n\cos k_n x)\sin(\omega_n t+\mu_n). \quad (5)$$

Дифференцированием (5) получим внутреннее усилие

$$N(x,t)=EF\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=\sum_{n=0}^{n=\infty}k_n(C_n\cos k_n x-D_n\sin k_n x)\sin(\omega_n t+\mu_n) \quad (6)$$

и скорость деформаций

$$v(x,t)=\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\omega_n(C_n\sin k_n x+D_n\cos k_n x)(\omega_n t+\mu_n). \quad (7)$$

При выборе начала координат в защемлении общее решение (5) должно удовлетворять начальным

$$u(x,0)=0, \quad \dot{u}(x,0)=ve(x-l) \quad (8)$$

и граничным

$$u(0,t)=0, \quad N(l,t)=-M\ddot{u}(l,t) \quad (9)$$

условиям, где $e(x-l)$ – единичная функция.

Удовлетворяя первым условиям (8), (9), получим $D_n=0, \mu_n=0$ и уравнения (5)-(7) примут вид:

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{n=\infty}C_n\sin k_n x\sin\omega_n t, \quad (10)$$

$$N(x,t)=\sum_{n=0}^{n=\infty}EFk_n C_n\cos k_n x\sin\omega_n t, \quad (11)$$

$$v(x,t)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\omega_n C_n\sin k_n x\cos\omega_n t. \quad (12)$$

Из второго условия (9) получаем частотное уравнение

$$tg\lambda=\frac{1}{\xi\lambda}, \quad \lambda=kl. \quad (13)$$

На основании известных формул интегрирования собственных функций [2], соответствующих собственным значениям уравнения (13), замечаем, что они обладают свойством

$$\int_0^l X_n(x) X_m(x) dx = -\xi l X_n(l) X_m(l),$$

т.е. в рассматриваемой задаче собственные функции ортогональны с весом

$$\rho(x) = 1 + \xi l \delta(x - l),$$

где $\delta(x-l)$ - дельта-функция Дирака.

Используя это свойство, удовлетворим второму условию (8). Для этого подставим скорость (12) во второе условие (10), умножим на $X_m(x)\rho(x)$ и проинтегрируем по длине стержня:

$$C_n \omega_n \int_0^l X_n(x) X_m(x) \rho(x) dx = v \int_0^l X_n(x) e(x-l)[1 + \xi l \delta(x-l) dx].$$

Отсюда, учитывая свойства интегрирования дельта-функции, получим амплитуду перемещений

$$C_n = 2\xi \frac{vl}{c} \frac{\sin kl}{kl(1 + \xi \sin^2 kl)}. \tag{14}$$

Следовательно, на свободном торце стержня получаем:

$$u(l,t) = 2\xi \frac{vl}{c} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\sin^2 \lambda_n}{\lambda_n (1 + \xi \sin^2 \lambda_n)} \sin \omega_n t, \tag{15}$$

$$v(l,t) = 2v\xi \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\sin^2 \lambda_n}{1 + \xi \sin^2 \lambda_n} \cos \omega_n t. \tag{16}$$

В защемлении

$$\sigma(0,t) = 2E \frac{v}{c} \xi \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\sin \lambda}{1 + \xi \sin^2 \lambda} \sin \omega_n t. \tag{17}$$

Ряд (15) сходится достаточно быстро. Так, для случая ξ=1 при n=3 и $t = l/c$, когда волна деформаций дойдет до заделки, на конце стержня возникают перемещения

$$u(l, l/c) = \frac{vl}{c} \sum_{n=1}^{n=3} 2 \frac{\sin^3 k_n l}{k_n l (1 + \sin^2 k_n l)} = 0{,}632 \frac{vl}{c},$$

что совпадает с результатами решения задачи по Даламберу. Для скорости (16), чтобы получить значение, совпадающее с решением по Даламберу, уже нужно суммировать 10 членов ряда при $t=l/c$:

$$v(l, l/c) = v \sum_{n=1}^{n=10} 2 \frac{\sin^2 k_n l}{1 + \sin^2 k_n l} \cos k_n l = 0{,}368 v.$$

При вычислении напряжений

$$\sigma(0,l/c)=E\frac{v}{c}\sum_{n=1}^{n=33}\frac{\sin^2 k_n l}{1+\sin^2 k_n l}=0{,}995E\frac{v}{c}$$

лишь 33 члена ряда обеспечивают погрешность 0,5%. С увеличением времени t скорость сходимости рядов ухудшается и при $t=3l/c$, когда возникают наибольшие напряжения, просуммировать ряды практически невозможно. Это объясняется разрывностью функций, содержащих производные от перемещений, (см. рис. 1) и является основным недостатком метода Фурье, что ограничивает его применение. Но здесь можно применить известный прием по улучшению сходимости таких рядов, предложенный А.Н. Крыловым [3], суть которого заключается в представлении исследуемой функции напряжений в виде суммы $\sigma(z)=F(\tau)+\varphi(\tau)$, где $F(\tau)$ – известная функция с таким же скачком, что и заданная функция $\sigma(\tau)$, а образованная при этом разность $\varphi(\tau)=\sigma(\tau)-F(\tau)$ представляется быстро сходящимся рядом-поправкой. Для этого приема используем асимптотическое представление корней частотного уравнения (13). Из анализа корней этого уравнения следует, что $lim\lambda_n=\infty$ когда $\lambda_n=n\pi+\alpha_n$ (n=0, 1 ,2 …), где $lim\alpha_n$=0. Из (13) для определения α_n получаем уравнение

$$tg\alpha_n=\frac{1}{\xi(n\pi+\alpha_n)},\qquad(18)$$

откуда следует $\alpha_n\sim\frac{1}{\xi n\pi}$ при $n\geq1$.

В качестве аппроксимирующей функции $F(\tau)$ можно принять известные ряды[4]:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\frac{\sin n\pi\tau}{n^s}\quad\text{и}\quad\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\frac{\cos n\pi\tau}{n^s},\quad\tau=\frac{c}{l}t,$$

суммы которых известны (s может принимать любые натуральные значения). Таким путем формулу (17) можно привести к следующему виду

$$\sigma(0,\tau)=E\frac{v}{c}\left\{2\frac{\xi\sin n\alpha_0\sin\tau\alpha_0}{1+\xi\sin^2\alpha_0}+2\frac{\tau}{\xi}\left(\frac{(\tau-2k)^2}{4}-\frac{1}{12}\right)+(2k-\tau)+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\xi\pi^2}\sum_0^\infty(-1)^n\left[\frac{n\left(n^2\pi^2\xi^2\sin\alpha_n\sin\tau\alpha_n-\tau(1+\xi\sin^2\alpha_n\right)\cos n\tau}{n^2(1+\xi\sin^2\alpha_n)}+\right.\right.$$

$$+\frac{\left(n^2\pi^2\xi^2\sin\alpha_n\cos\tau\alpha_n - n\pi\xi(1+\xi\sin^2\alpha_n)\sin n\pi\tau\right)}{n^2(1+\xi\sin^2\alpha_n)}\Bigg]\Bigg\}, \quad (19)$$

где k=0, 1, 2….., $2k-1\le\tau< 2k+1$.

Так как наибольшие напряжения возникают в заделке при τ=3, 5, 7 (в зависимости от ξ), когда $\sin n\pi\tau\approx 0$, то согласно (19)

$$\sigma_{max}=E\frac{v}{c}\Bigg[\Bigg(\frac{2\xi\sin\alpha_0\sin\tau\alpha_0}{1+\xi\sin^2\alpha_0}+1+\frac{\tau}{3\xi}\Bigg)-$$

$$-\frac{2}{\xi\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\pi^2\xi^2\sin\alpha_n\sin\tau\alpha_n-\tau(1+\xi\sin^2\alpha_n)}{n^2(1+\xi\sin^2\alpha_n)}\Bigg]. \quad (20)$$

Формула (20) удобна для практического пользования, так как ее ряд сходится очень быстро. Так при $\xi\ge1$ достаточно взять лишь одно слагаемое под знаком суммы, чтобы получить значение напряжения с погрешностью менее одного процента. При малых значениях ударяющей массы, при $\xi<1$, уже 2-3 члена ряда (20) дают высокую точность.

При $\xi\ge2$ можно ограничиться лишь первым слагаемым (20)

$$\sigma_{max}=E\frac{v}{c}\Bigg(\frac{2\xi\sin\lambda\sin\tau\lambda}{1+\xi\sin^2\lambda}+1+\frac{\tau}{3\xi}\Bigg), \quad (21)$$

где $\lambda=kl$ – нулевой корень трансцендентного уравнения (13).

Уже при ξ=2 формула (21) дает погрешность 2% по отношению к (20). Относительное время τ увеличивается с ростом ξ. Так при ξ=4 τ=3, при ξ=12 τ=5 и т.д. Значение τ находится так, чтобы $\sin\tau\lambda_0\approx1$, причем τ - нечетное.

В таблице приведены относительные напряжения, вычисленные по методу Даламбера $\bar{\sigma}_Д$ и по формулам (20), (21) при ξ=0,5-25.

Предложенные расчетные формулы (20), (21) удобны для практического пользования. Они также дают возможность оценить погрешность динамического коэффициента

$$k_\partial=\sqrt{\frac{v^2}{gf}}=\frac{vc}{l\sqrt{\xi g}},$$

которой обычно пользуются в сопротивлении материалов при учете скорости удара.

Таблица – Расчетные напряжения в бурильной колонне

ξ	τ	$\overline{\sigma}_{\Phi}$	$\overline{\sigma}_{Д}$	$l = M / \xi l$, м	σ_{cm}, МПа	$\sigma_{дин}$, МПа	v, м/с	$\sigma_{v=1}$, МПа
0,5	2	2,070	2,037	1257	202,6	419,4	5,06	82,9
1,0	3	2,277	2,270	629	135,1	307,6	3,38	91,0
2,0	3	2,741	2,735	314	101,3	277,7	2,53	109,7
4,0	3	3,214	3,213	157	84,4	271,3	2,11	128,6
8,0	5	3,998	3,928	78,6	76,0	303,8	1,90	159,9
12	5	4,564	4,564	52,4	73,2	334,1	1,83	182,6
16	7	5,093	5,090	39,3	71,8	365,7	1,79	204,3
20	7	5,587	5,572	31,4	70,9	396,1	1,77	223,8
25	7	6,012	6,000	25,1	70,3	422,6	1,76	240,1

Зная формулу динамических напряжений $\sigma = \overline{\sigma}\dfrac{Ev}{c}$ для различных длин колонны, можно найти предельную скорость удара инструмента о забой при спуске $v = \dfrac{\sigma c}{\overline{\sigma} E}$ и, приравнивая напряжение $\dfrac{Ev}{c}$ статическому $(M + ml)g / F$, можно найти длину колонны при известном динамическом коэффициенте $\overline{\sigma}$. Результаты этих расчетов для колонны буровой установки "WIRTH" (m=169 *кг/м*, F=148 *см*^{2}, M=100·10^3 *кг*) приведены в таблице. Из таблицы следует, что наименьшие напряжения будут при l=157 м, но если во все случаях принять скорость удара одинаковой, например v=1 *м/с*, то увидим, что динамическое напряжение с увеличением длины колонны падает. Итак, наиболее опасным является начало спуска бурового инструмента в скважину.

Следует иметь в виду, что к этим напряжениям нужно добавлять напряжения от внезапно приложенного веса, которые можно считать равными удвоенным статическим $\sigma = 2Mg / F = 132{,}5$ МПа.

Список источников.

1. Пономарев С.Д. и др. Расчеты на прочность в машиностроении, том. 3. – М.: Гос. науч.техн. изд. машиностр. лит., 1959, 1118 с.
2. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: Наука, 1967, 424 с.
3. Крылов А.Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики. – Л.: Изд. АН СССР, 1933, 427 с.
4. Градштейн И.С. и Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971, 1100 с.