

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ, МОЛОДЕЖИ И СПОРТА  
УКРАИНЫ  
ГОСУДАРСТВЕННО ВЫСШЕЕ УЧЕБНОЕ ЗАВЕДЕНИЕ  
ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.А. Резников  
И.А. Тарасова  
И.В. Дорохов

## **СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ**

Методические указания  
к практическим занятиям

Рассмотрено на заседании кафедры  
«Компьютеризированные системы  
управления»,  
протокол № 5 от 24.12.2012

Утверждено на заседании  
учебно-издательского совета ДонНТУ  
протокол № 1 от 21.02.2013

Донецк  
2013

**УДК 681.5**

**Резников В.А., Тарасова И.А., Дорохов И.В.**

Методическое пособие к практическим занятиям по курсу «Системы автоматического управления». – Донецк: ДонНТУ, 2013 – 92 с.

Данные методические указания предназначены для студентов, обучающихся по специальности «Компьютеризованные системы управления» и изучающих дисциплины «Теория автоматического управления» и «Проектирование и наладка систем управления».

Пособие также может быть использовано студентами специальности «Системный анализ и управление», изучающими дисциплину «Теория управления».

В пособие включены:

- примеры, охватывающие основные разделы лекционных материалов;
- задачи, решаемые студентами на лабораторных и практических занятиях.

Пособие направлено на успешное усвоение студентами теоретического материала и выработку у них практических навыков анализа и синтеза систем автоматического управления.

УДК 681.5

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 1

### СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

*Пример 1.1.* Регулятор Уатта (рис. 1.1).

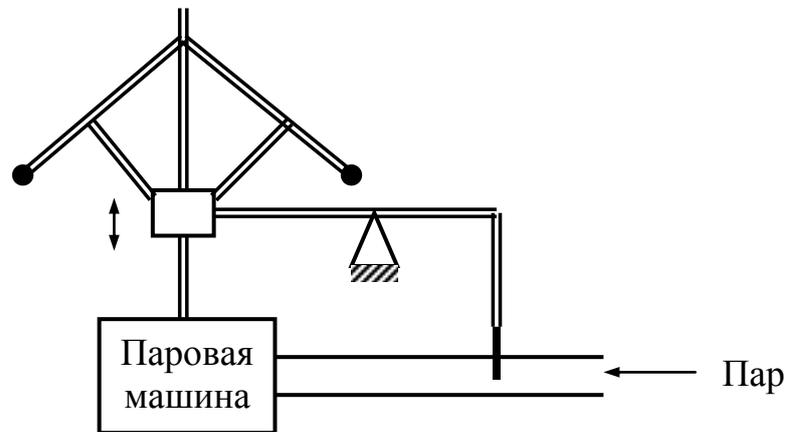


Рисунок 1.1 – Регулятор Уатта

Регулятор Уатта предназначен для поддержания частоты вращения выходного вала паровой машины на заданном уровне. Если в результате увеличения нагрузки частота вращения выходного вала уменьшается, то уменьшается центробежная сила, что приводит к уменьшению отклонения грузов к оси вращения. Это вызывает смещение ползуна вниз, приоткрывание заслонки во входном паропроводе и тем самым увеличение подачи пара. Частота вращения выходного вала увеличивается. В случае уменьшения нагрузки частота вращения выходного вала увеличивается, и все описанные выше процессы протекают в обратном направлении, что приводит к уменьшению частоты вращения выходного вала.

В данной системе регулирования датчиком частоты управляемой переменной (частоты вращения выходного вала) являются центробежные грузы, регулятором – ползун, а исполнительным механизмом – устройство перемещения заслонки во входном паропроводе.

*Пример 1.2.* Во многих современных приборах используется диск, который должен вращаться с постоянной скоростью, несмотря на износ и изменение характеристик электродвигателя. Задача заключается в синтезе такой системы управления, которая обеспечивала бы поддержание скорости вращения диска на заданном уровне с некоторой желаемой точностью.

Рассмотрим вначале *разомкнутую* систему управления. В этой системе для задания напряжения уставки используются батарея и потенциометр. Полученное таким образом напряжение усиливается и подается на двигатель постоянного тока. Блок-схема системы показана на рисунке 1.2.

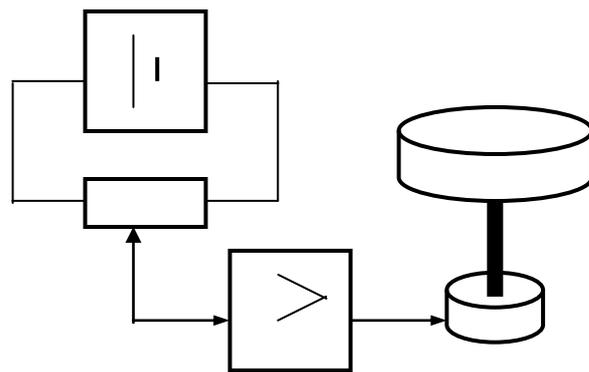


Рисунок 1.2

Соответствующая функциональная схема приведена на рисунке 1.3.



Рисунок 1.3

Для реализации *замкнутой* системы управления используем в качестве датчика управляемой переменной (датчика обратной связи) тахогенератор, выходное напряжение которого пропорционально частоте вращения его вала. Результаты показаны на рисунках 1.4 и 1.5.

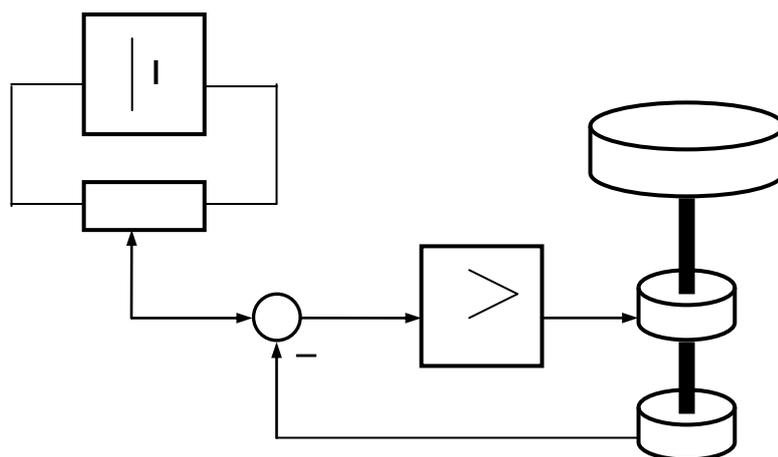


Рисунок 1.4

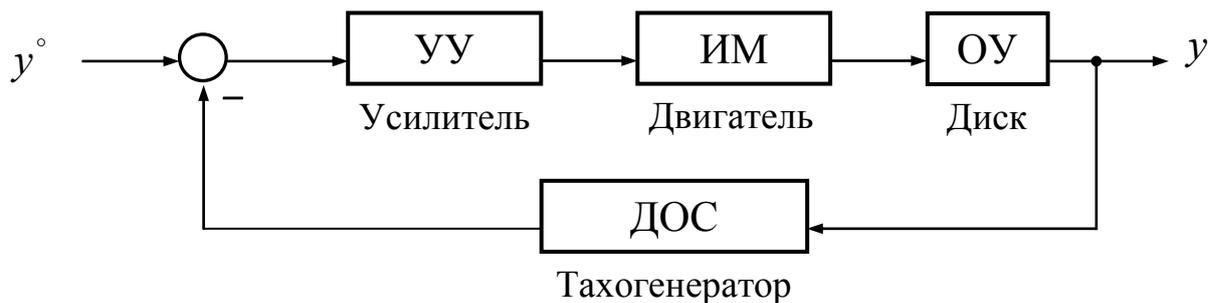


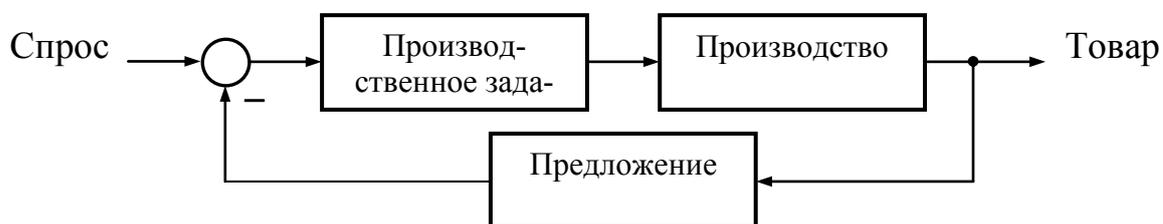
Рисунок 1.5

*Пример 1.3.* Примером системы с *положительной обратной связью* может служить экономическая инфляция, признаком которой являются непрерывно растущие цены. В соответствии с наиболее простой моделью инфляционной спирали «цена-зарплата» предполагается, что рост зарплаты трудящихся после некоторой временной задержки приводит к обязательному росту цен. Функциональная схема такой системы показана на рисунке. 1.6.



Рисунок 1.6

*Упражнение 1.1.* Система управления производством товара.



*Упражнение 1.2.* Система управления процессом обучения.

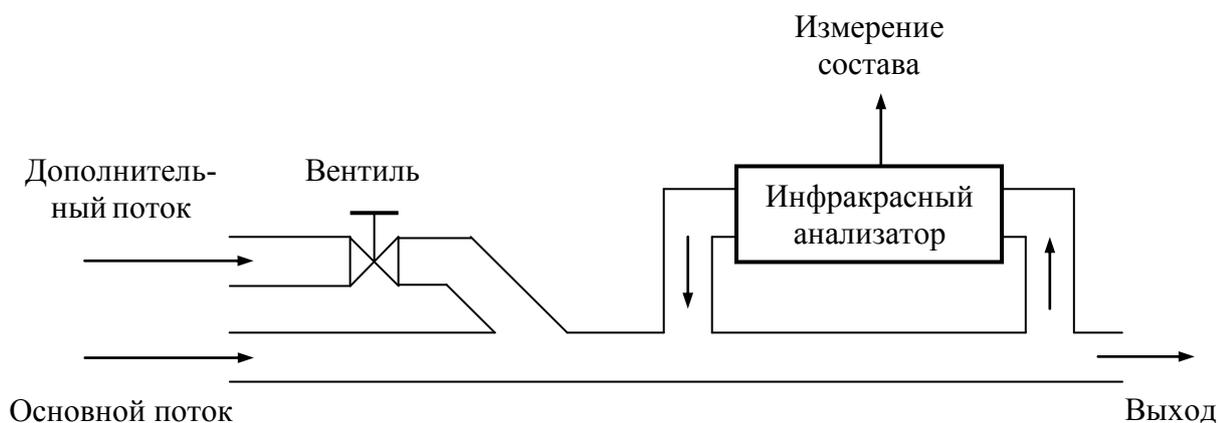


*Задача 1.1.* Разработать систему автоматического поддержания концентрации глюкозы в крови человека на желаемом уровне путем введения инсулина. В качестве исполнительного механизма используются микродвигатель, насос и клапан. Сформировать функциональную схему системы и описать принцип ее работы.

*Задача 1.2.* Разработать функциональную схему, иллюстрирующую способность настраиваемого аэродинамического крыла гоночного автомобиля поддерживать постоянную степень сцепления между шинами автомобиля и полотном гоночной трассы.

*Задача 1.3.* Разработать функциональную схему системы автоматического управления скоростью автомобиля. Условие: расстояние до впереди идущей машины всегда должно быть безопасным. Автомобиль оснащен видеокамерой.

*Задача 1.4.* Разработать функциональную схему системы автоматического поддержания состава химического продукта на заданном уровне. Принципиальная схема установки приведена на рисунке:



*Задача 1.5.* Разработать функциональную схему системы транспортировки груза двумя вертолетами.

*Задача 1.6.* Разработать функциональную схему управления автомобилем, одним из элементов которой, является водитель.

*Задача 1.7.* Разработать функциональную схему системы автоматического слежения за источником света.

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 2

### МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

#### 2.1 Описание модели «вход-выход» с помощью дифференциальных уравнений

*Пример 2.1.* На тело массой  $m$  (рис. 2.1), подвешенное к неподвижной опоре с помощью пружины с коэффициентом жесткости  $k_c$  и демпфера с коэффициентом демпфирования  $k_d$ , действует сила  $f(t)$ .

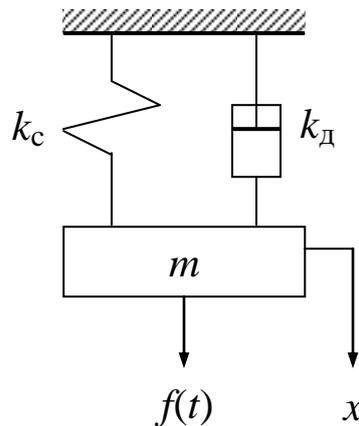


Рисунок 2.1

Уравнение движения тела имеет вид:

$$m\ddot{x} = F_{\text{дв}} - F_{\text{п}} - F_{\text{д}}, \quad (2.1)$$

где  $F_{\text{дв}} = f(t)$  – движущая сила;  $F_{\text{п}} = k_c x$  – сила сопротивления пружины;  $F_{\text{д}} = k_d \dot{x}$  – сила демпфирования. Подставив в (2.1), получим:

$$m\ddot{x} = f(t) - k_d \dot{x} + k_c x \quad (2.2)$$

или окончательно

$$m\ddot{x} + k_d \dot{x} + k_c x = f(t). \quad (2.3)$$

*Пример 2.2.* Рассмотрим систему подвешивания колеса автомобиля, показанную на рисунке 2.2, где  $m_1$  – масса автомобиля;  $m_2$  – масса колеса;  $k_{c1}$  – ко-

ээффициент жесткости пружины;  $k_{c2}$  – коэффициент жесткости (пластичности) покрышки;  $k_{д}$  – коэффициент демпфирования.

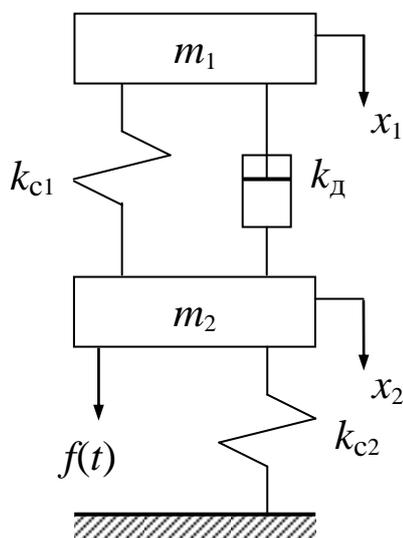


Рисунок 2.2

Уравнения движения имеют вид:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -k_{д}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_{c1}(x_1 - x_2); \\ m_2 \ddot{x}_2 = f(t) - k_{д}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_{c1}(x_2 - x_1) - k_{c2}x_2 \end{cases} \quad (2.4)$$

или окончательно

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_{д}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_{c1}(x_1 - x_2) = 0; \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_{д}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_{c1}(x_2 - x_1) + k_{c2}x_2 = f(t). \end{cases} \quad (2.5)$$

*Пример 2.3.* В качестве объекта управления рассматривается механическая система, схема которой приведена на рисунке 2.3. Система осуществляет перемещение рабочего органа массой  $m$  с помощью гибкого тягового органа (каната или цепи) путем скольжения по направляющим.

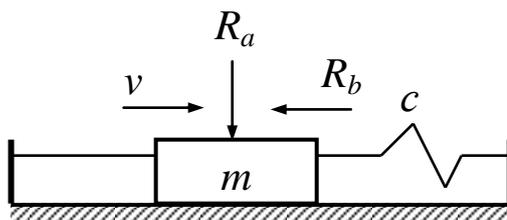


Рисунок 2.3 – Схема объекта управления

На рисунке 2.3 приняты следующие обозначения:  $c$  – жесткость рабочей ветви тягового органа;  $v$  – скорость перемещения рабочего органа;  $R_a$ ,  $R_b$  – соответственно вертикальная и горизонтальная составляющие нагрузки на рабочий орган.

Приводом является электрический или гидравлический двигатель заданной мощности с жесткой механической характеристикой. Частота вращения выходного вала равна  $v_0 = const$ .

Рассмотрим движение объекта в режиме холостого хода ( $R_a = 0$ ,  $R_b = 0$ ). Кроме того, положим, что угол наклона направляющих равен нулю. Тогда уравнение движения объекта имеет вид:

$$m\dot{v}(t) = c \int_0^t (v_0 - v(t)) dt - mg\mu(v), \quad (2.6)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения;  $\mu(v)$  – коэффициент трения рабочего органа о направляющие, зависимость которого от скорости перемещения (кривая трения) показана на рисунке 2.4, где обозначено:  $\mu_n$  – коэффициент трения покоя;  $\mu_{дв}$  – коэффициент трения движения;  $v_{кр}$  – критическая скорость.

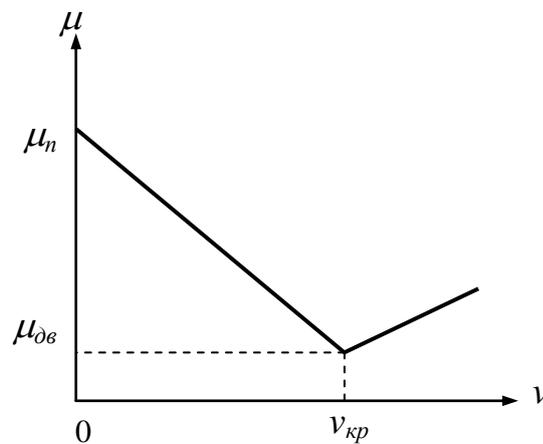


Рисунок 2.4 – Кривая трения

Приведенная на рисунке 2.4 зависимость  $\mu(v)$  описывается следующим выражением:

$$\mu(v) = \begin{cases} \mu_n - a_1 v, & 0 \leq v \leq v_{кр}; \\ \mu_{дв} + a_2 (v - v_{кр}), & v > v_{кр}, \end{cases} \quad (2.7)$$

где

$$\begin{cases} a_1 = \frac{\mu_n - \mu_{\partial\delta}}{v_{кр}}; \\ a_2 = \frac{\mu(v) - \mu_{\partial\delta}}{v - v_{кр}}. \end{cases} \quad (2.8)$$

Совместный анализ уравнения (2.7) и выражения (2.8) показывает, что при  $0 \leq v \leq v_{кр}$  рассматриваемый объект описывается уравнением

$$m\dot{v}(t) = c \int_0^t (v_0 - v(t)) dt - mg(\mu_n - a_1 v), \quad (2.9)$$

а при  $v > v_{кр}$  – уравнением

$$m\dot{v}(t) = c \int_0^t (v_0 - v(t)) dt - mg(\mu_{\partial\delta} + a_2(v - v_{кр})). \quad (2.10)$$

*Пример 2.4.* На рисунке 2.5 показана физическая модель *механической части* привода с двигателем постоянного тока с независимым возбуждением, который отличается довольно жесткой механической характеристикой и наиболее простым способом регулирования частоты вращения выходного вала.

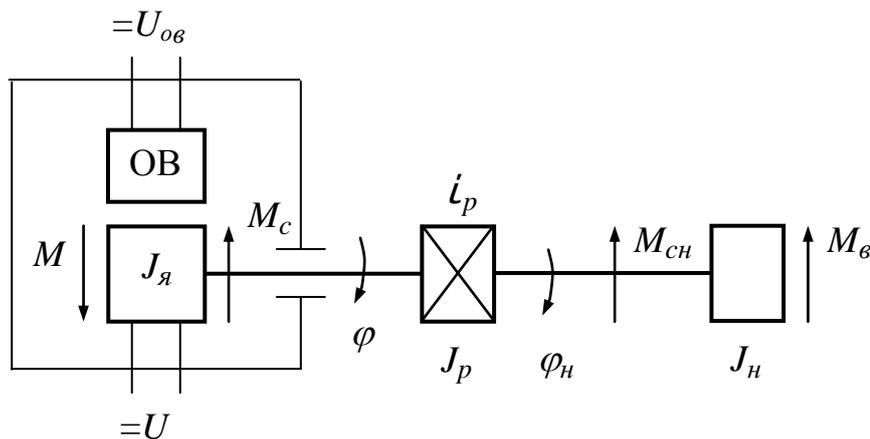


Рисунок 2.5 – Механическая часть привода

На рисунке 2.5, обозначено:  $U_{ов}$  – напряжение питания обмотки возбуждения;  $U$  – напряжение питания обмотки якоря;  $M$  – электромагнитный момент, развиваемый двигателем;  $J_я$  – момент инерции якорной цепи;  $M_c$  – момент сопротивления в двигателе и редукторе, приведенный к валу двигателя;  $\varphi$  – угол поворота вала двигателя;  $i_p$  – коэффициент передачи редуктора;  $J_p$  – момент инерции редуктора;  $\varphi_n$  – угол поворота вала нагрузки;  $M_{сн}$  – момент сопротив-

ления на валу нагрузки (на выходном валу редуктора);  $J_n$  – момент инерции нагрузки;  $M_e$  – момент внешних сил.

Движение механической части описывается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} (J_{я} + J'_p)\ddot{\varphi} = M - M_c - \frac{M_n}{i_p}; \\ J_n\ddot{\varphi}_n = M_n - M_{сн} - M_e, \end{cases} \quad (2.11)$$

где  $J'_p = \frac{J_p}{i_p^2}$  – момент инерции редуктора, приведенный к валу двигателя;

$M_n$  – момент, прикладываемый к нагрузке со стороны двигателя.

Систему (2.11) можно привести к одному уравнению, если использовать кинематическое соотношение  $\varphi_n = \frac{\varphi}{i_p}$  и провести перерасчет момента инерции и моментов, стоящих в правой части второго уравнения, к валу двигателя. Разделим второе уравнение на  $i_p$  и сложим оба уравнения. Учитывая кинематическую связь между переменными  $\varphi$  и  $\varphi_n$ , получим:

$$J\ddot{\varphi} = M - M'_n, \quad (2.12)$$

где

$$J = J_{я} + J'_p + \frac{J_n}{i_p^2}; \quad (2.13)$$

$$M'_n = M_c + \frac{M_{сн} + M_e}{i_p}. \quad (2.14)$$

Момент  $M'_n$  зависит от параметров движения, конструктивного исполнения элементов системы и других факторов. В основном  $M'_n$  определяется силами сухого трения и зависит от частоты вращения  $\omega = \dot{\varphi}$  следующим образом:

$$M'_n(\omega) = C \text{sign } \omega. \quad (2.15)$$

На рисунке 2.6 показана схема *электрической части* рассматриваемого привода, которая представляет собой силовую цепь управления напряжением  $U$ , подаваемым на обмотку двигателя. Здесь обозначено:  $U_y$  – входное напря-

жение (управляющий сигнал); УМ – усилитель мощности;  $L$  – индуктивность якорной цепи;  $R$  – активное сопротивление якорной цепи;  $I$  – ток в цепи якоря.

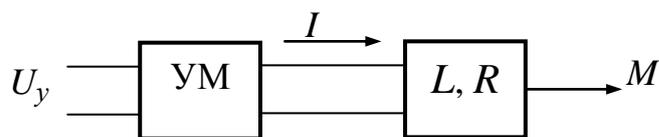


Рисунок 2.6 – Электрическая часть привода

Электрическая часть привода описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} LI + RI = U - k_{\omega}\omega; \\ M = k_m I; \\ T_y \dot{U} + U = k_y U_y, \end{cases} \quad (2.16)$$

где  $k_{\omega}$  – коэффициент противоЭДС;  $k_m$  – коэффициент вращательного момента;  $k_y$  – коэффициент усиления усилителя мощности;  $T_y$  – постоянная времени усилителя мощности.

Параметры  $L$ ,  $R$ ,  $k_m$  и  $k_{\omega}$  приводятся в паспортных данных двигателя. Запишем систему (2.16) в операторной форме:

$$\begin{cases} (T_{\vartheta}s + 1)I = \frac{U - k_{\omega}\omega}{R}; \\ M = k_m I; \\ (T_y s + 1)U = k_y U_y, \end{cases} \quad (2.17)$$

где

$$T_{\vartheta} = \frac{L}{R} \quad (2.18)$$

характеризует инерционность электрической части и называется *электрической постоянной времени* двигателя.

В свою очередь, инерционность механической части двигателя характеризуется величиной

$$T_m = \frac{J_{\text{я}} + \frac{J_p + J_n}{i_p^2}}{k_m k_{\omega}}, \quad (2.19)$$

которая называется *механической постоянной времени*.

У двигателей постоянного тока с независимым возбуждением  $T_M \gg T_\varepsilon$ . Кроме того, следует учитывать, что постоянная времени усилителя мощности  $T_y$  имеет порядок тысячных долей секунды. В таком случае из системы (2.17) имеем:

$$M = \frac{k_m}{R} (k_y U_y - k_\omega \omega). \quad (2.20)$$

Объединив уравнения (2.12) и (2.20), запишем модель привода в виде:

$$\begin{cases} J\ddot{\varphi} = M - M'_n(\omega); \\ M = \frac{k_m}{R} (k_y U_y - k_\omega \omega). \end{cases} \quad (2.21)$$

## 2.2 Передаточные функции и структурные схемы

*Пример 2.5.* Рассмотрим способ формирования структурной схемы объекта управления, который описывается дифференциальным уравнением

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = ku \quad (2.22)$$

при нулевых начальных условиях.

Разрешим уравнение (2.22) относительно старшей производной

$$\ddot{y} = \frac{1}{a} (ku - b\dot{y} - cy) \quad (2.23)$$

и отобразим полученное уравнение в виде соответствующей структурной схемы, показанной на рисунке 2.7.

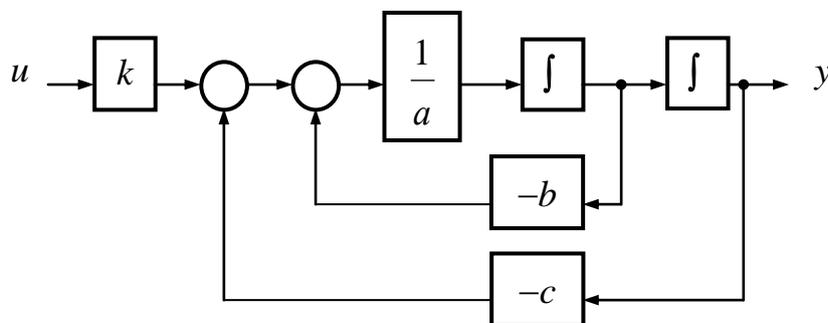


Рисунок 2.7 – Структурная схема, соответствующая уравнению (2.22)

*Пример 2.6.* Необходимо преобразовать структурную схему, представленную на рисунке 2.8.

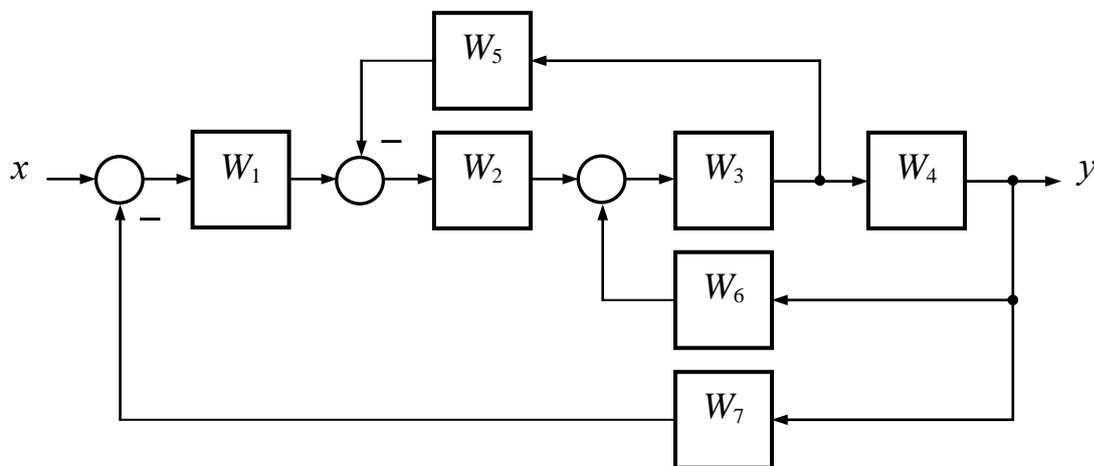


Рисунок 2.8 – Исходная структурная схема

I шаг. Перенесем точку подключения элемента с передаточной функцией  $W_5(p)$ . Преобразованная структурная схема показана на рисунке 2.9, где

$$W_8(p) = \frac{W_5(p)}{W_4(p)}. \quad (2.24)$$

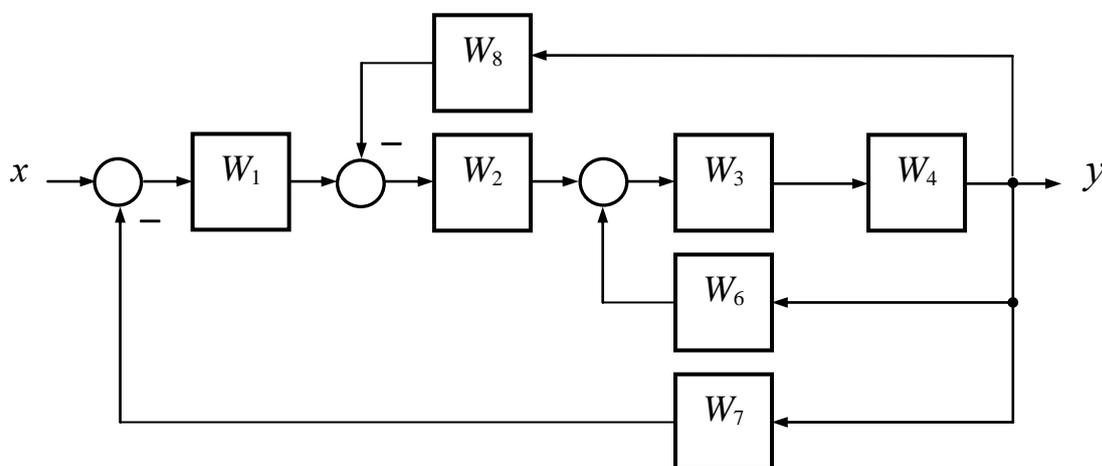


Рисунок 2.9 – Преобразованная структурная схема I

II шаг. Заменяем контур с передаточными функциями  $W_3(p)$ ,  $W_4(p)$  и  $W_6(p)$  (контур с положительной обратной связью) эквивалентным элементом с передаточной функцией

$$W_9(p) = \frac{W_3(p)W_4(p)}{1 - W_3(p)W_4(p)W_6(p)}. \quad (2.25)$$

Структурная схема показана на рисунке 2.10.

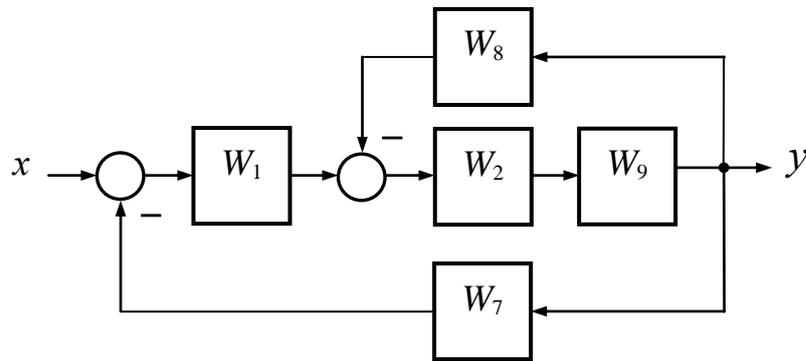


Рисунок 2.10 – Преобразованная структурная схема II

III шаг. Заменяем контур с передаточными функциями  $W_2(p)$ ,  $W_9(p)$  и  $W_8(p)$  (контур с отрицательной обратной связью) эквивалентным элементом с передаточной функцией

$$W_{10}(p) = \frac{W_2(p)W_9(p)}{1 + W_2(p)W_8(p)W_9(p)}. \quad (2.26)$$

Преобразованная структурная схема показана на рисунке 2.11.

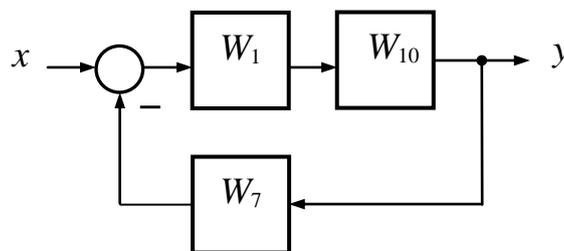


Рисунок 2.11 – Преобразованная структурная схема III

IV шаг. Определяем передаточную функцию замкнутой системы:

$$W(p) = \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{W_1(p)W_{10}(p)}{1 + W_1(p)W_{10}(p)}. \quad (2.27)$$

*Пример 2.7.* В объекте управления, рассмотренном в примере 2.1, в качестве выходной (управляемой) переменной примем перемещение массы, то есть  $y(t) = x(t)$ , а в качестве управляющего воздействия – движущую силу  $f(t)$ , то есть  $u(t) = f(t)$ .

С учетом принятых обозначений уравнение движения объекта (2....) примет вид:

$$m\ddot{y}(t) + k_{\partial}\dot{y}(t) + k_c y(t) = u(t). \quad (2.28)$$

В операторной форме при нулевых начальных условиях уравнение (2.28) имеет вид:

$$(mp^2 + k_{\partial}p + k_c)y(t) = u(t). \quad (2.29)$$

Разделим правую и левую части уравнения (2.29) на  $k_c$  и введем следующие обозначения:  $a_0 = \frac{m}{k_c}$ ,  $a_1 = \frac{k_{\partial}}{k_c}$ ,  $k = \frac{1}{k_c}$ . В результате получим передаточную функцию объекта в виде:

$$W(p) = \frac{y(t)}{u(t)} = \frac{k}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2}, \quad (2.30)$$

где  $a_2 = 1$ .

*Пример 2.8.* В объекте управления, рассмотренном в примере 2.2, в качестве выходной (управляемой) переменной примем перемещение массы  $m_1$ , то есть  $y(t) = x_1(t)$ , а в качестве управления – движущую силу, то есть  $u(t) = f(t)$ .

Для определения передаточной функции преобразуем систему уравнений (2....) при нулевых начальных условиях:

$$\begin{cases} m_1 p^2 y(t) + k_{\partial} p (y(t) - x_2(t)) + k_{c1} (y(t) - x_2(t)) = 0; \\ m_2 p^2 x_2(t) + k_{\partial} p (x_2(t) - y(t)) + k_{c1} (x_2(t) - y(t)) + \\ + k_{c2} x_2(t) = u(t). \end{cases} \quad (2.31)$$

Первое уравнение из системы (2.31) запишем относительно выходной переменной:

$$(m_1 p^2 + k_{\partial} p + k_{c1}) y(t) = (k_{\partial} p + k_{c1}) x_2(p). \quad (2.32)$$

Отсюда

$$y(t) = W_1(p) x_2(t), \quad (2.33)$$

где

$$W_1(p) = \frac{k_\partial p + k_{c1}}{m_1 p^2 + k_\partial p + k_{c1}}. \quad (2.34)$$

В формуле (2.34) разделим числитель и знаменатель на  $k_{c1}$  и введем следующие обозначения:  $a_0 = \frac{m_1}{k_{c1}}$ ,  $a_1 = \frac{k_\partial}{k_{c1}}$ . В результате получим передаточную функцию  $W_1(p)$  в виде:

$$W_1(s) = \frac{a_1 s + a_2}{a_0 s^2 + a_1 s + a_2}, \quad (2.35)$$

где  $a_2 = 1$ .

Второе уравнение из системы (2.31) запишем относительно  $x_2(t)$ :

$$(m_2 p^2 + k_\partial p + (k_{c1} + k_{c2}))x_2(t) = u(t) + (k_\partial p + k_{c1})y(t). \quad (2.36)$$

Иначе

$$x_2(t) = W_2(p)u(t) + W_3(p)y(t), \quad (2.37)$$

где

$$W_2(p) = \frac{1}{m_2 p^2 + k_\partial p + (k_{c1} + k_{c2})}; \quad (2.38)$$

$$W_3(p) = \frac{k_\partial p + k_{c1}}{m_2 p^2 + k_\partial p + (k_{c1} + k_{c2})}. \quad (2.39)$$

В (2.38) и (2.39) разделим числители и знаменатели на  $(k_{c1} + k_{c2})$  и введем обозначения:  $b_0 = \frac{m_2}{k_{c1} + k_{c2}}$ ,  $b_1 = \frac{k_\partial}{k_{c1} + k_{c2}}$ ,  $k = \frac{1}{k_{c1} + k_{c2}}$ ,  $d = \frac{k_{c1}}{k_{c1} + k_{c2}}$ . В результате получим передаточные функции  $W_2(p)$  и  $W_3(p)$  в виде:

$$W_2(p) = \frac{k}{b_0 p^2 + b_1 p + b_2}; \quad (2.40)$$

$$W_3(p) = \frac{b_1 p + d}{b_0 p^2 + b_1 p + b_2}, \quad (2.41)$$

где  $b_2 = 1$ .

В соответствии с (2.33) и (2.37) объект управления может быть представлен в виде структурной схемы, показанной на рисунке 2.12, откуда окончательно имеем:

$$W(p) = \frac{y(t)}{u(t)} = \frac{W_1(p)W_2(p)}{1 - W_1(p)W_3(p)}. \quad (2.42)$$

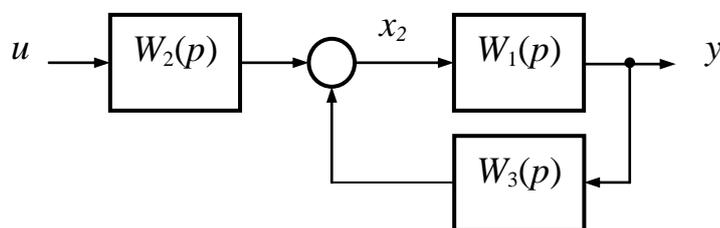


Рисунок 2.12 – Структурная схема объекта управления из примера 2.2

*Пример 2.9.* Преобразуем при нулевых начальных условиях уравнения (2.9) и (2.10) из примера 2.3:

$$mpv(t) = \frac{c}{p} (v_0 - v(t)) - mg(\mu_n - a_1 v(t)), \quad \text{при } 0 \leq v \leq v_{кр}; \quad (2.43)$$

$$mpv(t) = \frac{c}{p} (v_0 - v(t)) - mg(\mu_{об} + a_2 (v(t) - v_{кр})), \quad \text{при } v > v_{кр}. \quad (2.44)$$

Проведя необходимые преобразования, определим, что при  $0 \leq v \leq v_{кр}$  объект описывается передаточной функцией

$$W_1(p) = \frac{1}{\frac{m}{c} p^2 - \frac{a_1}{c} p + 1}; \quad (2.45)$$

а при  $v > v_{кр}$  – передаточной функцией

$$W_2(p) = \frac{1}{\frac{m}{c} p^2 + \frac{a_2}{c} p + 1}. \quad (2.46)$$

Таким образом, рассматриваемый объект представляет собой систему с переменной структурой, состоящую из двух подсистем:

- подсистема ПС1, описываемая передаточной функцией  $W_1(p)$ ;
- подсистема ПС2, описываемая передаточной функцией  $W_2(p)$ .

Структурная схема объекта приведена на рисунке 2.13, где БИС – блок изменения структуры, реализующий следующий алгоритм:

$$h_1 = \begin{cases} 1, & 0 \leq v \leq v_{кр}; \\ 0, & v > v_{кр}; \end{cases} \quad (2.47)$$

$$h_2 = \begin{cases} 1, & v > v_{кр}; \\ 0, & v \leq v_{кр}; \end{cases} \quad (2.48)$$

Кл.1 и Кл.2 – прямые ключи, ЛБ – логический блок, учитывающий начальные условия.

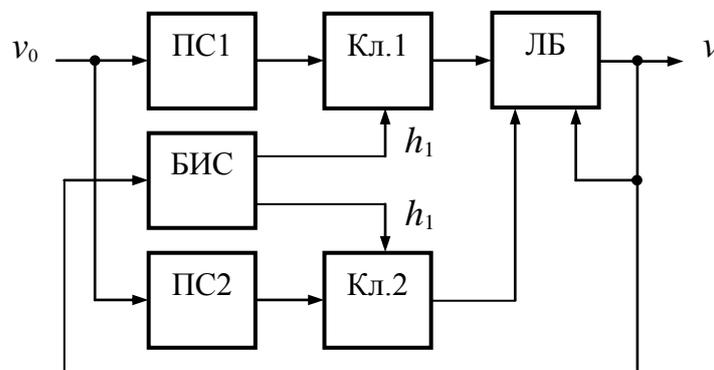


Рисунок 2.13 – Структурная схема объекта управления из примера 2.3

Обратим внимание, что при  $0 \leq v \leq v_{кр}$  объект описывается неустойчивой подсистемой, а при  $v > v_{кр}$  – устойчивой. Это обуславливает пульсирующий характер движения объекта при  $v_0 \ll v_{кр}$ , что хорошо согласуется с физикой протекания процессов в объекте.

*Пример 2.10.* Поскольку в примере 2.4 магнитный усилитель в якорной цепи не оказывает влияния на динамику объекта, то примем  $U = k_y U_y$ . Кроме того, учтем, что в большинстве практических случаев в качестве управляемой

переменной рассматривается частота вращения выходного вала двигателя  $\omega$ . В таком случае модель привода (2.11) можно записать в виде:

$$\begin{cases} J\dot{\omega} = M - M'_n(\omega); \\ M = \frac{k_m}{R}(U - k_\omega\omega). \end{cases} \quad (2.49)$$

Структурная схема объекта управления, соответствующая модели, приведена на рисунке 2.14.

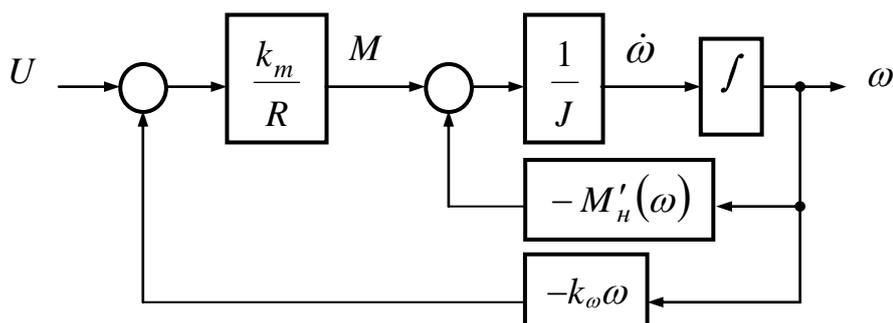


Рисунок 2.14 – Структурная схема привода постоянного тока

*Задача 2.1* Построить структурную схему системы, описываемой дифференциальным уравнением:

$$a\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + y(t) = k\dot{x}(t)$$

при  $\dot{y}(0) = 0$ ;  $y(0) = 0$ .

*Задача 2.2.* Построить структурную схему системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$a\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + cy(t) = k_1\dot{x}(t) + k_2x(t)$$

при  $\ddot{y}(0) = 0$ ;  $\dot{y}(0) = 0$ ;  $y(0) = y_0$ .

*Задача 2.3.* Сформировать структурную схему звена, описываемого следующим дифференциальным уравнением:  $3\ddot{y} + 2\dot{y} + 6y = 5\dot{u} + 10u + 2v$ .

*Задача 2.4.* Сформировать структурную схему системы, описываемой следующими дифференциальными уравнениями:

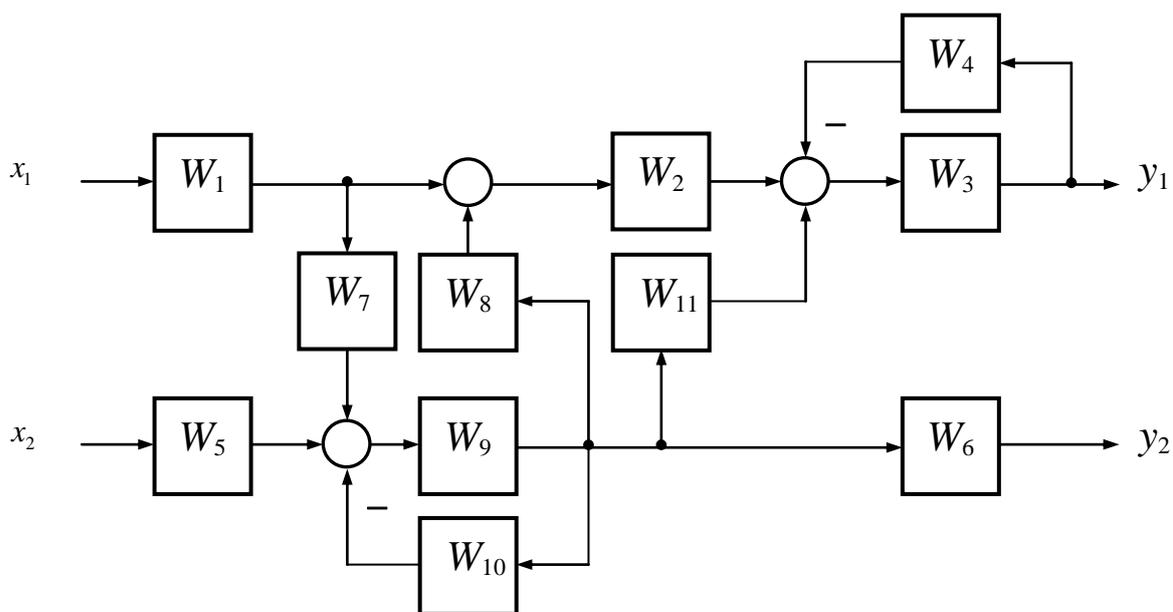
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 - bx_2; \\ \dot{x}_2 = cx_1 - dx_2. \end{cases}$$

*Задача 2.5* Сформировать структурную схему системы, описываемой следующими дифференциальными уравнениями:

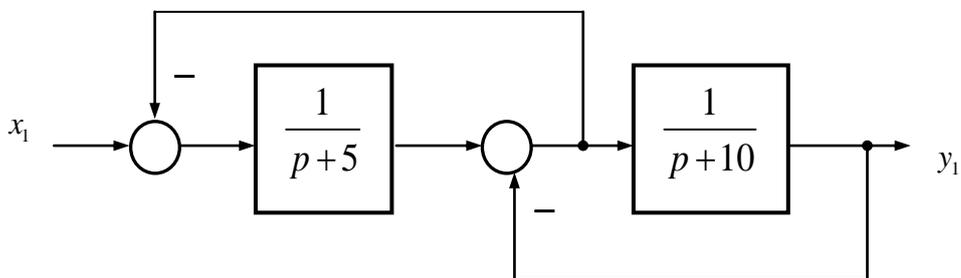
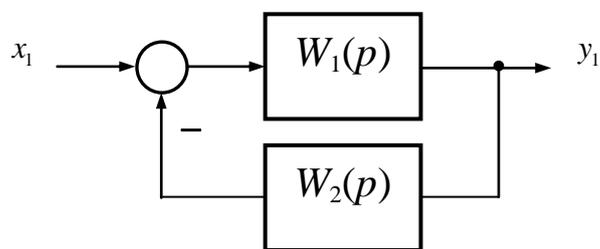
$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = ax_1 - b\dot{x}_2; \\ \ddot{x}_2 = c\dot{x}_1 - dx_2. \end{cases}$$

*Задача 2.6.* Определить следующие передаточные функции замкнутой системы, структурная схема которой показана на рисунке.

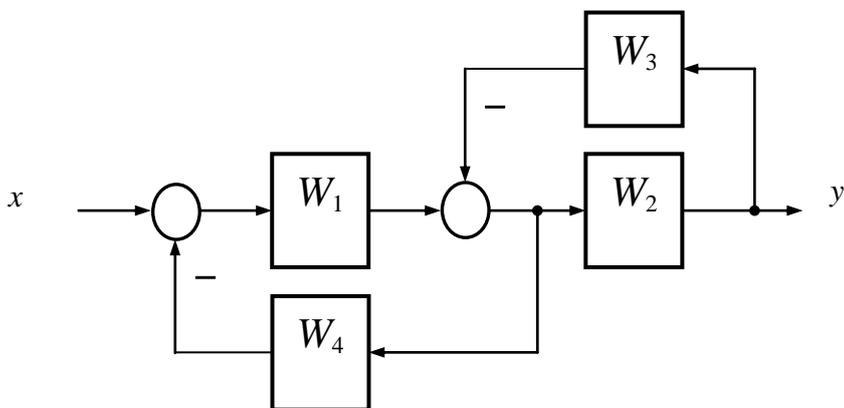
- 1)  $y_1(t) = F[x_1(t)];$
- 2)  $y_1(t) = F[x_2(t)];$
- 3)  $y_2(t) = F[x_1(t)];$
- 4)  $y_2(t) = F[x_2(t)];$
- 5)  $y_1(t) = F[x_1(t), x_2(t)];$
- 6)  $y_2(t) = F[x_1(t), x_2(t)];$



*Задача 2.7.* Для структурной схемы, показанной на рисунке *а*, определить такие передаточные функции  $W_1(p)$  и  $W_2(p)$ , при которых эта схема была бы эквивалентна структурной схеме, показанной на рисунке *б*.

Рисунок *а*Рисунок *б*

*Задача 2.8.* На рисунке ниже изображена структурная схема системы управления. Передаточные функции  $W_2(p)$  и  $W_3(p)$  известны. Определите, при каких передаточных функциях  $W_1(p)$  и  $W_4(p)$  передаточная функция замкнутой системы  $G(p) = \frac{x(p)}{y(p)}$  будет равна единице.



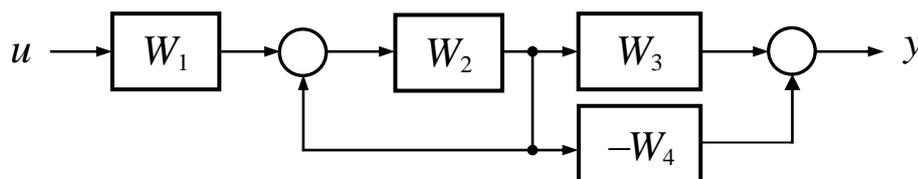
Задача 2.9. Даны звенья, которые описываются уравнениями:

- 1)  $\ddot{y} + 2y = 10u$ ;
- 2)  $\ddot{y} + 2\dot{y} = 5\dot{u} + 10u$ ;
- 3)  $\ddot{y} + 2\dot{y} + 3y = 4\dot{u} + 10u$ ;
- 4)  $3\ddot{y} + 2\dot{y} + 6y = 5\dot{u} + 10u + 2,5v$ ;
- 5)  $2y = 5\dot{u} + 10u + 2v$ .

Для каждого звена необходимо:

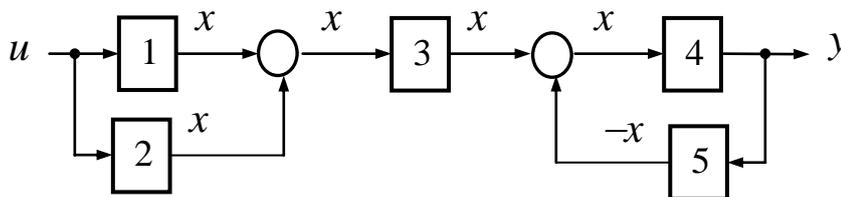
- 1) сформировать структурные схемы;
- 2) определить передаточные функции и их параметры.

Задача 2.10. Определить передаточные функции и их параметры для следующих систем, структурные схемы которых показаны на рисунках а и б:



$$W_1(p) = 2; \quad W_2(p) = \frac{1}{p}; \quad W_3(p) = p; \quad W_4(p) = 5.$$

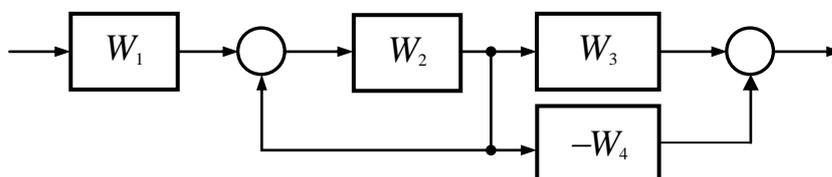
Рисунок а



$$\dot{x}_1 = 2u; \quad x_2 = 2u; \quad \dot{x}_4 + x_4 = 4x_3; \quad \ddot{y} + \dot{y} = 5x_5; \quad x_6 = 0,2y.$$

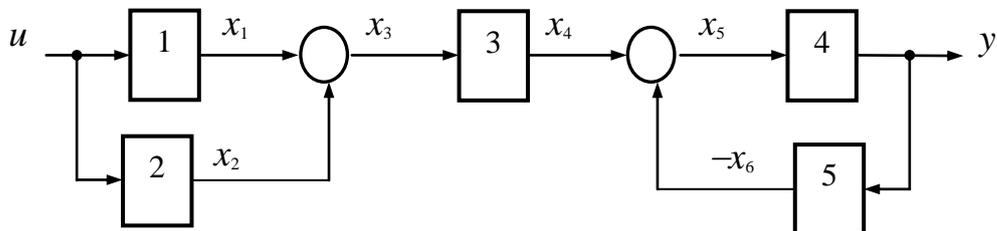
Рисунок б

Задача 2.11. Определить передаточную функцию системы.



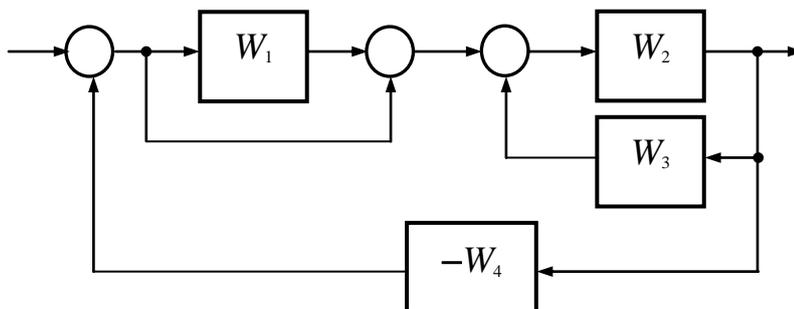
$$W_1(p) = 2; \quad W_2(p) = \frac{1}{s}; \quad W_3(p) = s; \quad W_4(p) = 5.$$

Задача 2.12. Определить передаточную функцию системы.

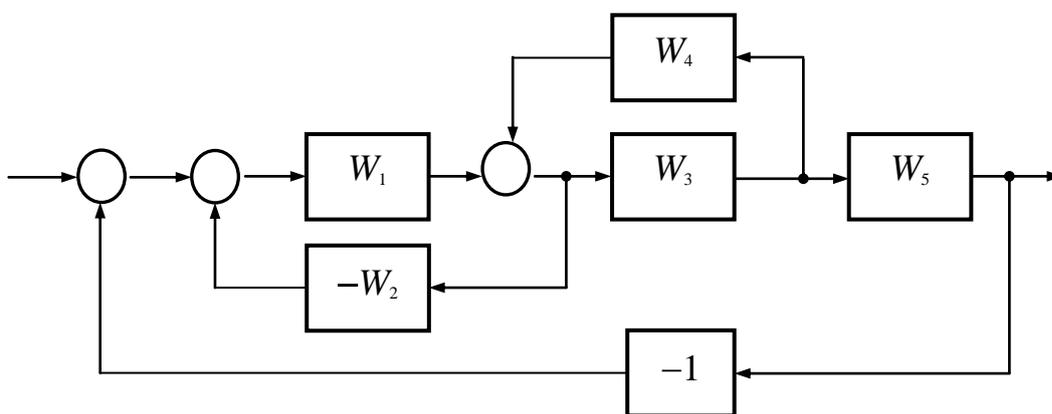


$$\dot{x}_1 = 2u; \quad x_2 = 2u; \quad \dot{x}_4 + x_4 = 4x_3; \quad \ddot{y} + \dot{y} = 5x_5; \quad x_6 = 0,2y.$$

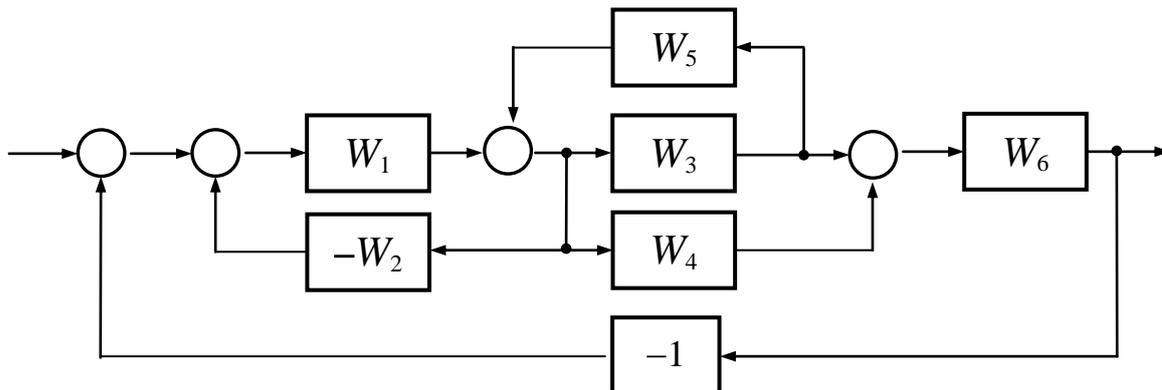
Задача 2.13. Определить передаточную функцию системы.



Задача 2.14. Определить передаточную функцию системы.



Задача 2.15. Определить передаточные функции.



### 2.3 Переменные состояния и ВСВ-модели

Пример 2.11. В примере 2.1 обозначим  $x(t) = z_1(t)$ . Уравнения в нормальной форме:  
состояния

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2; \\ \dot{z}_2 = -\frac{k_c}{m} z_1 - \frac{k_\partial}{m} z_2 + \frac{1}{m} u. \end{cases} \quad (2.41)$$

выхода

$$y(t) = z_1(t). \quad (2.42)$$

Соответствующая уравнениям (2.41) и (2.42) векторно-матричная модель имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_c}{m} & -\frac{k_\partial}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \cdot u; \quad (2.43)$$

$$y = [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}. \quad (2.44)$$

Пример 2.12. Определим уравнения состояния и выхода для простой RLC-цепи. Динамическое поведение этой цепи при  $t \geq t_0$  и нулевых начальных значениях описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} U(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + U_c(t); \\ C \frac{dU_c(t)}{dt} = i(t). \end{cases} \quad (2.45)$$

В качестве переменных состояния выберем  $i(t)$  и  $U_c(t)$ , а в качестве выходной переменной – ток  $i(t)$ .

Обозначим:  $x_1(t) = i(t)$ ,  $x_2(t) = U_c(t)$ ,  $y(t) = i(t)$ .

Уравнения в нормальной форме:  
состояния

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_2 + \frac{1}{L}U; \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{C}x_1. \end{cases} \quad (2.46)$$

выхода

$$y(t) = x_1(t). \quad (2.47)$$

Соответствующая уравнениям (2.46) и (2.47) векторно-матричная модель имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot U; \quad (2.48)$$

$$y = [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (2.49)$$

*Пример 2.13.* В качестве объекта управления рассматриваем двигатель постоянного тока с независимым возбуждением, работающий при постоянном магнитном потоке  $\Phi = const$ .

Дифференциальные уравнения для такого объекта могут быть записаны относительно следующих переменных:

$\omega(t)$  – частота вращения выходного вала якоря;

$i(t)$  – ток в обмотке якоря;

$\varphi(t)$  – угол поворота выходного вала якоря.

При использовании известных зависимостей для ЭДС  $E = k\Phi\omega = C\omega$  и вращающего момента двигателя  $M = k\Phi i = Ci$  получим уравнения электрической цепи:

$$U_{\text{я}}(t) = R_{\text{я}}i(t) + L_{\text{я}} \frac{di(t)}{dt} + E \quad (2.50)$$

и механической части:

$$M - M_c = J \frac{d\omega(t)}{dt}, \quad \frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega(t), \quad (2.51)$$

где  $U_{\text{я}}$  – напряжение на обмотке якоря;  $R_{\text{я}}$  – активное сопротивление обмотки якоря;  $L_{\text{я}}$  – индуктивность обмотки якоря;  $M_c$  – момент сил сопротивления;  $J$  – приведенный момент инерции.

Представим векторы состояния, входа и выхода следующим образом:

$$\mathbf{x}^T = [\omega(t) \quad i(t) \quad \varphi(t)]; \quad \mathbf{u}^T = [U_{\text{я}} \quad M_c]; \quad y = [\omega(t)]. \quad (2.52)$$

Векторно-матричная модель имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\omega}{dt} \\ \frac{di}{dt} \\ \frac{d\varphi}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{C}{J} & 0 \\ -\frac{C}{L_{\text{я}}} & -\frac{R_{\text{я}}}{L_{\text{я}}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega \\ i \\ \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{J} \\ \frac{1}{L_{\text{я}}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{\text{я}} \\ M_c \end{bmatrix}; \quad (2.53)$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} \omega \\ i \\ \varphi \end{bmatrix}. \quad (2.54)$$

*Пример 2.14.* В качестве объекта управления рассматриваем двухконтурный выпарной агрегат, обобщенная структурная схема которого приведена на рисунке 2.15.

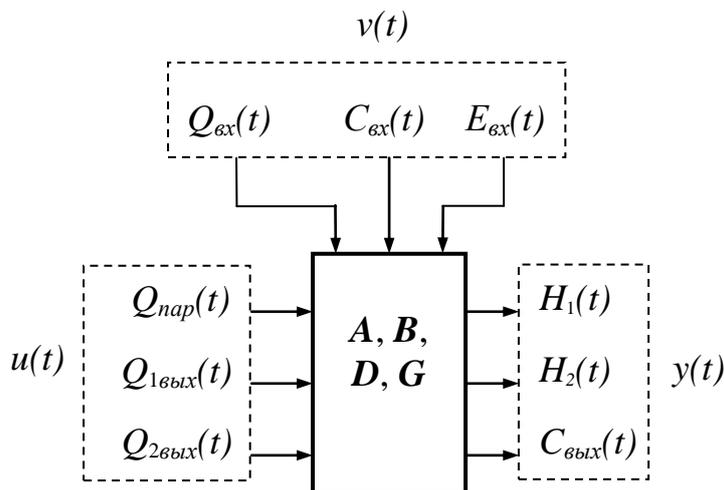


Рисунок 2.15 – Структурная схема двухконтурного выпарного агрегата

Данный объект описывается следующей системой линейных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{D}\mathbf{v}(t); \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{G}\mathbf{x}(t), \end{cases} \quad (2.55)$$

в которой векторы состояния  $\mathbf{x}$ , управления  $\mathbf{u}$ , выхода  $\mathbf{y}$  и возмущения  $\mathbf{v}$  составляются следующим образом:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} H_1(t) \\ H_2(t) \\ C_1(t) \\ C_{вых}(t) \\ E_1(t) \end{bmatrix}; \quad (2.56)$$

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} Q_{nap}(t) \\ Q_{1вых}(t) \\ Q_{2вых}(t) \end{bmatrix}; \quad (2.57)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} H_1(t) \\ H_2(t) \\ C_{вых}(t) \end{bmatrix}; \quad (2.58)$$

$$\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} Q_{\text{ex}}(t) \\ C_{\text{ex}}(t) \\ E_{\text{ex}}(t) \end{bmatrix}. \quad (2.59)$$

Уравнения состояний:

$$\dot{H}_1(t) = -k_{11}H_1(t) - k_{12}C_1(t) - k_{13}E_1(t) - k_{14}Q_{1\text{блх}}(t) + k_{15}Q_{\text{ex}}(t); \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} \dot{H}_2(t) = & -k_{21}H_2(t) - k_{22}C_1(t) + k_{23}C_{\text{блх}}(t) - k_{24}E_1(t) + \\ & + k_{25}Q_{1\text{блх}}(t) - k_{26}Q_{2\text{блх}}(t); \end{aligned} \quad (2.61)$$

$$\dot{C}_1(t) = -k_{31}C_1(t) + k_{32}E_1(t) - k_{33}Q_{\text{ex}}(t) + k_{34}C_{\text{ex}}(t); \quad (2.62)$$

$$\dot{C}_{\text{блх}}(t) = -k_{41}C_1(t) - k_{42}C_{\text{блх}}(t) + k_{43}E_1(t); \quad (2.63)$$

$$\dot{E}_1(t) = -k_{51}C_1(t) - k_{52}E_1(t) + k_{53}Q_{\text{нар}}(t) - k_{54}Q_{\text{ex}}(t) + k_{55}E_{\text{ex}}(t). \quad (2.64)$$

Уравнения выходов:

$$\begin{cases} H_1(t) = H_1(t); \\ H_2(t) = H_2(t); \\ C_{\text{блх}}(t) = C_{\text{блх}}(t). \end{cases} \quad (2.65)$$

Матрицы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{G}$  имеют вид:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -k_{11} & 0 & -k_{12} & 0 & -k_{13} \\ 0 & -k_{21} & -k_{22} & k_{23} & -k_{24} \\ 0 & 0 & -k_{31} & 0 & k_{32} \\ 0 & 0 & -k_{41} & -k_{42} & k_{43} \\ 0 & 0 & -k_{51} & 0 & -k_{52} \end{bmatrix}; \quad (2.66)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -k_{14} & 0 \\ 0 & k_{25} & -k_{26} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_{53} & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (2.67)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} k_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -k_{33} & k_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -k_{54} & 0 & k_{55} \end{bmatrix}; \quad (2.68)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.70)$$

*Задача 2.16.* Используя классические и современные методы построить структурные схемы и сформировать все модели объекта управления, описываемого дифференциальным уравнением:

$$2\ddot{y} + 3\dot{y} + y = 2u \quad (2.71)$$

при нулевых начальных условиях и  $u(t) = 1(t)$ .

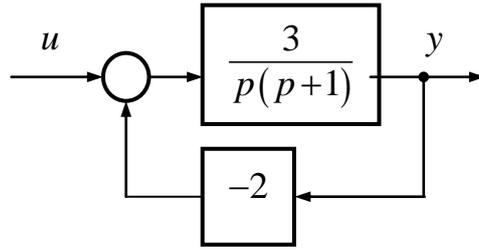
*Задача 2.17.* Используя классические и современные методы построить структурные схемы и сформировать все модели объекта управления, описываемого дифференциальным уравнением:

$$5\ddot{y} + 4\dot{y} + y = 3u \quad (2.72)$$

при нулевых начальных условиях и  $u(t) = 1(t)$ .

*Задача 2.18.* Составить дифференциальное уравнение объекта управления, структурная схема которого приведена на рисунке ниже.

Используя классические и современные методы построить структурные схемы и сформировать все модели объекта управления.



## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 3

### АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ САУ

*Задача 3.1.* Выяснить, последовательным соединением каких элементарных звеньев можно представить следующие системы:

$$\text{а) } W(p) = \frac{2(p+1)}{p(p^2+p+1)};$$

$$\text{б) } W(p) = \frac{5(p^2+0,4p+1)}{(p+1) \cdot (0,25p^2+4p+1)};$$

$$\text{в) } W(p) = \frac{5(p^2+0,4p+1)}{0,25p^3+4p^2+p};$$

$$\text{г) } W(p) = \frac{2(p^2+0,4p)}{(p+1) \cdot (0,25p^2+0,5p+1)}.$$

*Задача 3.2.* Передаточная функция замкнутой системы равна

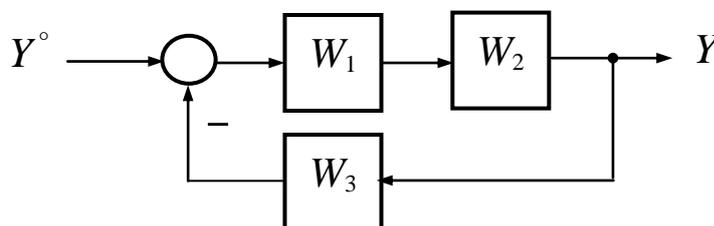
$$W(p) = \frac{k}{a_3p^3+a_2p^2+a_1p+a_0}.$$

Сформировать структурные схемы системы с использованием различных типовых динамических звеньев. Составить уравнения для определения параметров типовых звеньев.

*Задача 3.3.* Определите выражение для АЧХ звена, описываемого передаточной функцией

$$W(p) = \frac{2(p+1)}{p^2+p+1}.$$

*Задача 3.4.* Структурная схема системы приведена на рисунке



Передаточные функции элементов:

$$W_1(p) = k + 11p;$$

$$W_2(p) = \frac{1}{p(p+1)};$$

$$W_3(p) = 1.$$

Необходимо определить такое значение коэффициента  $k$ , при котором система устойчива.

*Задача 3.5.* Определите условия устойчивости замкнутой системы, характеристическое уравнение которой имеет вид:

$$p^3 + p^2 + 2p + 1 = 0.$$

*Задача 3.6.* Определите условия устойчивости замкнутой системы, характеристическое уравнение которой имеет вид:

$$5p^3 + 2p^2 - 3p + 1 = 0.$$

*Задача 3.7.* Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:

$$W(p) = \frac{k}{p(T_1p+1)(T_2p+1)}.$$

Используя критерий Найквиста, определите условия устойчивости замкнутой системы.

*Задача 3.8.* Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:

$$W(p) = \frac{k(\tau p+1)}{(T_1p+1)(T_2p+1)}.$$

Определите условия устойчивости замкнутой системы.

*Задача 3.9.* Определите граничное значение коэффициента усиления замкнутой системы, характеристическое уравнение которой имеет вид:

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1) + k = 0.$$

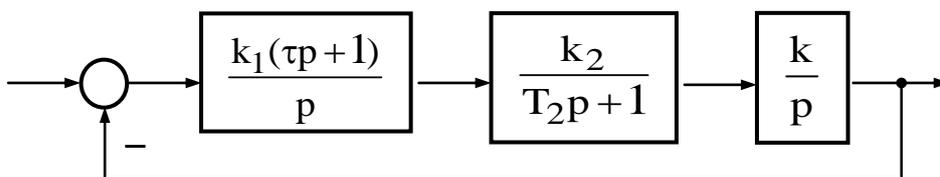
Параметры системы:  $T_1=0,2 \tau$ ,  $T_2=0,4 \tau$ ,  $T_3=1,2 \tau$ .

*Задача 3.10.* Передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W(p) = \frac{k}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}.$$

Определите значение коэффициента усиления  $k$ , при котором замкнутая система будет устойчива.

*Задача 3.11.* Определить значение коэффициента усиления  $k$ , при котором будет устойчива замкнутая система, приведенная на рисунке



*Задачи 3.12.* Передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W(p) = \frac{k}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}.$$

Определите значение параметра  $a_3$ , при котором замкнутая система будет устойчива.

*Задачи 3.13.* Передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W(p) = \frac{k}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}.$$

Определите значение параметра  $a_2$ , при котором замкнутая система будет устойчива.

*Задача 3.14.* Передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W(p) = \frac{k}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}.$$

Определите значение параметра  $a_1$ , при котором замкнутая система будет устойчива.

*Задача 3.15.* Передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W(p) = \frac{k}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}.$$

Определите значение параметра  $a_0$ , при котором замкнутая система будет устойчива.

*Задача 3.16.* Передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W(p) = \frac{k}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}.$$

Используя критерий Михайлова, определите точки пересечения характеристического полинома замкнутой системы с осями комплексной плоскости.

*Задача 3.17.* По заданным характеристическим уравнениям исследовать устойчивость системы:

а)  $\alpha^6 + 2\alpha^5 + 3\alpha^4 + 4\alpha^2 + \alpha + 1 = 0;$

б)  $\alpha^4 + 3\alpha^3 + 3\alpha^2 + 2\alpha = 0;$

в)  $\alpha^3 + 3\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0;$

г)  $\alpha^4 + 4\alpha^3 + 2\alpha^2 + \alpha + 1 = 0;$

д)  $\alpha^4 + 4\alpha^3 + 6\alpha^2 + 5\alpha + 2 = 0.$

*Задача 3.18.* Задана структурная схема замкнутой системы, состоящая из регулятора и объекта с передаточными функциями  $W_p(p)$  и  $W_o(p)$  соответ-

ственно. Передаточная функция объекта равна  $W_o(p) = \frac{5}{p(p+1)^2}$ . Исследовать устойчивость системы при типовых законах управления:

а)  $W_p(p) = 0,2$  и  $W_p(p) = 2$ ;

б)  $W_p(p) = 2 + 0,2p$  и  $W_p(p) = 2 + 2p$ ;

в)  $W_p(p) = 2 + \frac{0,2}{p}$  и  $W_p(p) = 0,2 + \frac{2}{p}$ ;

г)  $W_p(p) = 2 + 0,2p + \frac{0,2}{p}$  и  $W_p(p) = 2 + 2p + \frac{2}{p}$ .

*Задачи 3.19.* Определить значения коэффициента  $k$ , при которых будет устойчива замкнутая система, в которой элементы с передаточными функциями

$$W_1(p) = k + 1 \text{ и } W_2(p) = \frac{1}{p(p^2 + 3p + 3)}$$

расположены в прямой цепи и соединены последовательно.

*Задачи 3.20.* Определить значения коэффициента  $k$ , при которых будет устойчива замкнутая система, в которой элемент с передаточной функцией

$$W_1(p) = k + 1$$

расположен в прямой цепи, а элемент с передаточной функцией

$$W_2(p) = \frac{1}{p(p^2 + 3p + 3)}$$

расположен в цепи обратной связи.

*Задачи 3.21.* Определить значения коэффициента  $k$ , при которых будет устойчива замкнутая система, в которой элементы с передаточными функциями

$$W_1(p) = k + 1 \text{ и } W_2(p) = \frac{1}{p(p^2 + 3p + 3)}$$

расположены в прямой цепи и соединены параллельно.

*Задачи 3.22.* Определить значения коэффициента  $k$ , при которых будет устойчива замкнутая система, в которой элементы с передаточными функциями

$$W_1(p) = k + 1 \text{ и } W_2(p) = \frac{1}{p(p^2 + 3p + 3)}$$

расположены в цепи обратной связи и соединены последовательно.

*Задачи 3.23.* Определить значения коэффициента  $k$ , при которых будет устойчива замкнутая система, в которой элементы с передаточными функциями

$$W_1(p) = \frac{k(4p^2 + 2p + 1)}{p} \text{ и } W_2(p) = \frac{1}{p(p^2 + p + 4)}$$

расположены в прямой цепи и соединены последовательно.

*Задачи 3.24.* Определить значения коэффициента  $k$ , при которых будет устойчива замкнутая система, в которой элементы с передаточными функциями

$$W_1(p) = \frac{k(4p^2 + 2p + 1)}{p} \text{ и } W_2(p) = \frac{1}{p(p^2 + p + 4)}$$

расположены в цепи обратной связи и соединены последовательно.

*Задачи 3.25.* Определить значения коэффициента  $k$ , при которых будет устойчива замкнутая система, в которой элемент с передаточной функцией

$$W_1(p) = \frac{k(4p^2 + 2p + 1)}{p}$$

расположен в прямой цепи, а элемент с передаточной функцией

$$W_2(p) = \frac{1}{p(p^2 + p + 4)}$$

расположен в цепи обратной связи.

*Задачи 3.26.* Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{k}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}.$$

Определите значение коэффициента  $k$ , при котором запас устойчивости замкнутой системы по модулю выше 0,5.

*Задачи 3.27.* Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{k}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}.$$

Определите значение коэффициента  $k$ , при котором запас устойчивости замкнутой системы по модулю выше 0,3.

*Задачи 3.28.* Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{k}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}.$$

Определите значение коэффициента  $k$ , при котором запас устойчивости замкнутой системы по модулю выше 0,8.

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 4

### НЕЛИНЕЙНЫЕ САУ

*Пример 4.1.* На рисунке 4.1 изображена структурная схема нелинейной системы, содержащей один нелинейный элемент. Приведенная линейная часть системы описывается передаточной функцией  $W(p)$ . Внешние воздействия приведены к входу нелинейного элемента. Данную структуру будем называть *типовой*.

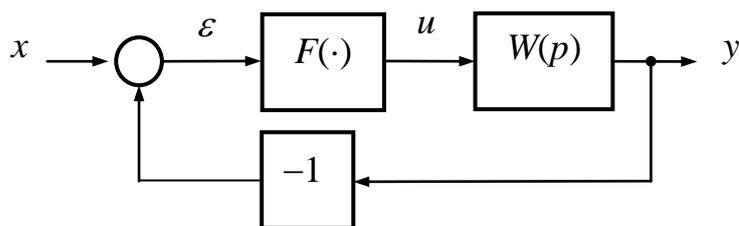


Рисунок 4.1 – Типовая структурная схема нелинейной системы

Необходимо структурную схему нелинейной системы, показанную на рисунке 4.2, привести к типовому виду.

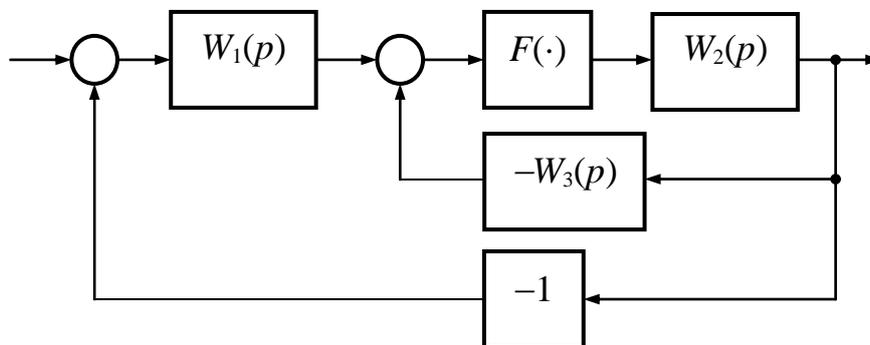


Рисунок 4.2 – Исходная структурная схема нелинейной системы

Последовательность структурных преобразований приведена на рисунках 4.3 и 4.4, где

$$W_4(p) = W_1(p) + W_3(p); \quad (4.1)$$

$$W_5(p) = W_2(p)W_4(p); \quad (4.2)$$

$$W_6(p) = (W_4(p))^{-1}. \quad (4.3)$$

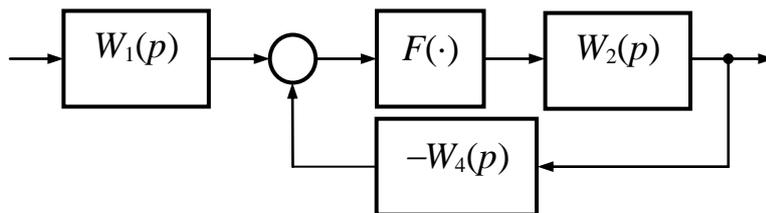


Рисунок 4.3 – Преобразованная структурная схема (шаг 1)

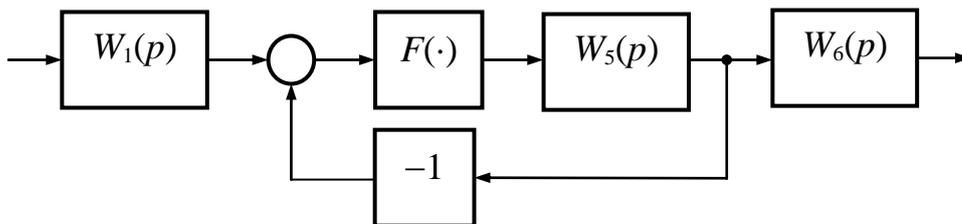


Рисунок 4.4 – Преобразованная структурная схема (шаг 2)

*Пример 4.2.* Привести к типовому виду структурную схему нелинейной системы, изображенную на рисунке 4.5.

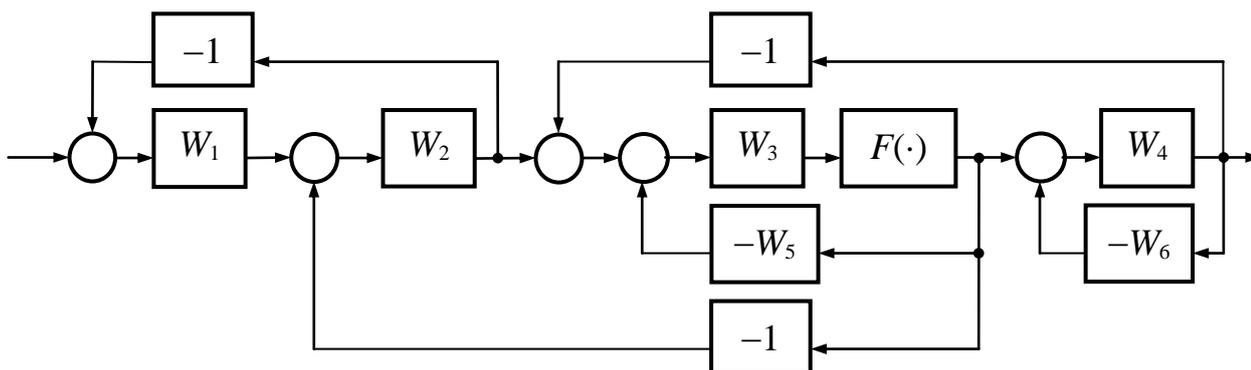


Рисунок 4.5 – Исходная структурная схема нелинейной системы

Последовательность структурных преобразований приведена на рисунках 4.6, 4.7 и 4.8, где

$$W_7(p) = \frac{W_4(p)}{1 + W_4(p)W_6(p)}; \quad (4.4)$$

$$W_8(p) = \frac{W_1(p)W_2(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)}; \quad (4.5)$$

$$W_9(p) = \frac{W_8(p)}{W_1(p)}; \quad (4.6)$$

$$W_{10}(p) = W_3(p)(W_5(p) + W_7(p) + W_9(p)); \tag{4.7}$$

$$W_{11}(p) = \frac{W_7(p)}{W_{10}(p)}. \tag{4.8}$$

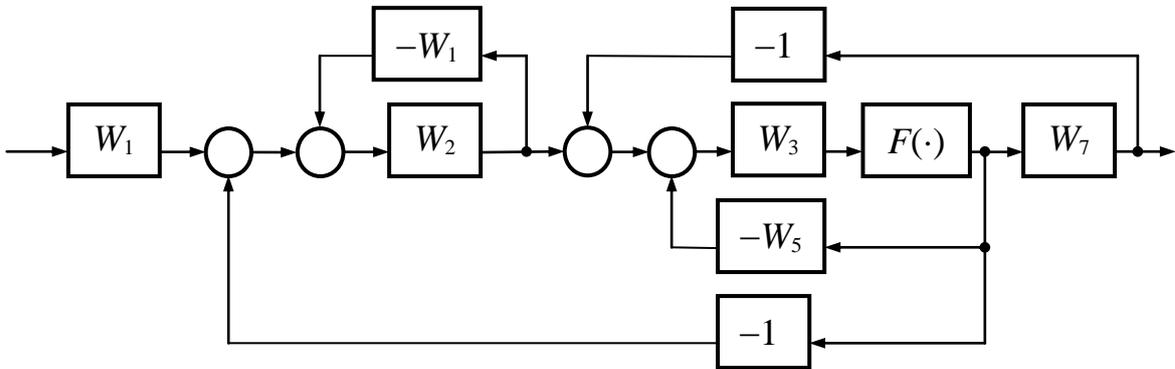


Рисунок 4.6 – Преобразованная структурная схема (шаг 1)

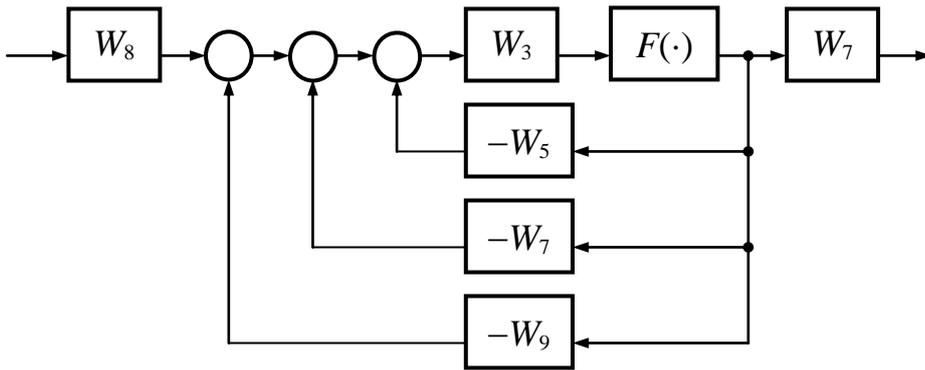


Рисунок 4.7 – Преобразованная структурная схема (шаг 2)

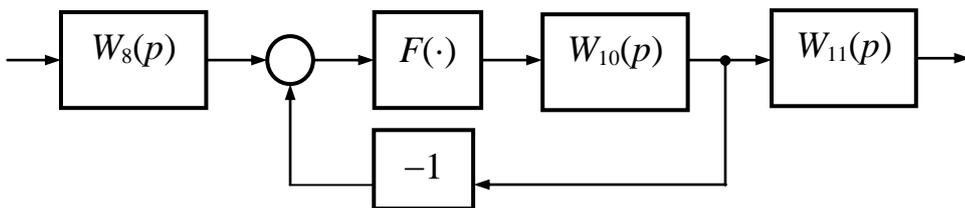


Рисунок 4.8 – Преобразованная структурная схема (шаг 3)

*Пример 4.3.* В нелинейной системе (см. рисунок 4.1) приведенная линейная часть описывается передаточной функцией

$$W(p) = \frac{k}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}, \tag{4.9}$$

а статическая характеристика нелинейного элемента приведена на рисунке 4.9.

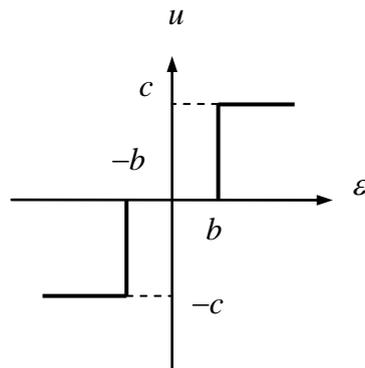


Рисунок 4.9 – Статическая характеристика нелинейного элемента

С помощью частотного метода необходимо определить условия, при которых в системе отсутствуют автоколебания.

Из формулы (4.9) следует, что приведенная линейная часть системы содержит в прямой цепи интегрирующее звено, что придает ей свойства фильтра нижних частот. Это, в свою очередь, позволяет провести гармоническую линеаризацию нелинейности и представить её в виде:

$$W_n(A) = q(A) + jq'(A), \quad (4.10)$$

где

$$\begin{cases} q(A) = \frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}}, & A \geq b; \\ q'(A) = 0. \end{cases} \quad (4.11)$$

Коэффициент гармонической линеаризации  $q(A)$  при  $A = \sqrt{2}b$  имеет максимальное значение, равное  $q_{max} = \frac{2c}{\pi b}$ .

Далее определяем КЧХ приведенной линейной части. Для этого в формуле (4.9) делаем замену  $p = j\omega$  и после проведения соответствующих преобразований получим:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega), \quad (4.12)$$

где

$$U(\omega) = -k \frac{(T_1 + T_2)\omega^2}{(T_1 + T_2)^2 \omega^4 + \omega^2 (T_1 T_2 \omega^2 - 1)}; \quad (4.13)$$

$$V(\omega) = k \frac{\omega(T_1 T_2 \omega^2 - 1)}{(T_1 + T_2)^2 \omega^4 + \omega^2 (T_1 T_2 \omega^2 - 1)^2}. \quad (4.14)$$

Определим параметры точки пересечения годографа КЧХ приведенной линейной части с вещественной осью комплексной плоскости  $(U(\omega); jV(\omega))$ .

Из уравнения  $V(\omega) = 0$  находим  $\omega_1 = 0$ ;  $\omega_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{1}{T_1 T_2}}$ .

При  $\omega = \omega_1$  имеем  $U(\omega_1) = -k(T_1 + T_2)$ ;  $V(\omega_1) = -\infty$ , а при  $\omega = \omega_{2,3}$  получим  $U(\omega_{2,3}) = -k \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$ ;  $V(\omega_{2,3}) = 0$ .

Приведенная линейная часть устойчива по Найквисту при выполнении условия

$$-k \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} > -1. \quad (4.15)$$

Автоколебания в системе будут отсутствовать при выполнении условия

$$-k \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} > -\frac{\pi b}{2c}. \quad (4.16)$$

*Пример 4.4.* Исследуем систему, приведенную на рисунке 4.10, в которой реализован режим вибрационной линеаризации нелинейности.

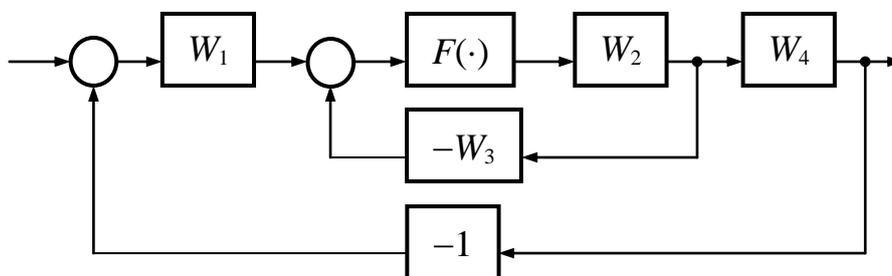


Рисунок 4.10 – Структурная схема исследуемой системы

В данной систем нелинейное звено имеет идеальную релейную характеристику с параметром  $c = \pi$ , а линейные звенья имеют следующие передаточные функции:

$$W_1(p) = \frac{k_1}{0,1p + 1}; \quad (4.17)$$

$$W_2(p) = \frac{1}{p(0,1p + 1)}; \quad (4.18)$$

$$W_3(p) = \frac{k_3}{T_3p + 1}; \quad (4.19)$$

$$W_4(p) = \frac{1}{p + 1}. \quad (4.20)$$

Требуется определить параметры  $k_3$  и  $T_3$  такие, при которых на входе нелинейного звена амплитуда автоколебаний  $A = 4$  и звено с передаточной функцией  $W_4$  ослабляет амплитуду автоколебаний в 100 раз.

Так как автоколебания через звено с передаточной функцией  $W_4$  практически не проходят (по условию), то при исследовании автоколебаний можно ограничиться рассмотрением только внутреннего контура. Передаточная функция этого контура и коэффициенты гармонической линеаризации нелинейного звена имеют вид:

$$W(p) = \frac{k_3}{p(0,1p + 1)(T_3p + 1)}; \quad (4.21)$$

$$\begin{cases} q(A) = \frac{4c}{\pi A} = \frac{4}{A}; \\ q'(A) = 0. \end{cases} \quad (4.22)$$

Условие возникновения периодического процесса принимает вид:

$$-0,1jT_3\omega^3 - (0,1 + T_3)\omega^2 + j\omega + \frac{4}{A}k_3 = 0, \quad (4.23)$$

или

$$\begin{cases} -(0,1 + T_3)\omega^2 + \frac{4}{A}k_3 = 0; \\ -0,1T_3\omega^3 + \omega = 0. \end{cases} \quad (4.24)$$

Отсюда для амплитуды и частоты получаем:

$$A = \frac{4k_3 T_3}{1 + 10T_3}, \quad \omega^* = \sqrt{\frac{10}{T_3}}. \quad (4.25)$$

Так как звено с передаточной функцией  $W_4$  ослабляет амплитуду в 100 раз, а его АЧХ имеет вид  $A_4(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}}$ , то имеем

$$A_4(\omega^*) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{10}{T_3}}} = 0,01 \text{ или } T_3 = 0,0001T_3 + 0,001.$$

Отсюда находим  $T_3 \cong 0,001$ .

Подставив это значение в выражение (4.25) и учитывая, что по условию амплитуда на входе нелинейного звена равна 4, получаем

$$A = \frac{4k_3 T_3}{1 + 10T_3} = \frac{4k_3 0,001}{1,01} = 4,$$

откуда  $k_3 = 1010$ .

Таким образом, искомыми параметрами являются  $k_3 = 1010$  и  $T_3 \cong 0,001$ .

*Пример 4.5.* Используя результаты, полученные в примере 4.4, заменим линеаризованное нелинейное звено линейным элементом с коэффициентом передачи (коэффициентом вибрационной линеаризации)  $k_H$ .

Обозначим через  $\varepsilon^\circ$  и  $\sigma^\circ$  постоянные (медленно меняющиеся) составляющие соответственно входного сигнала и выходной переменной нелинейного звена (рис. 4.10). Используя таблицы коэффициентов гармонической линеаризации, находим для принятой нелинейности

$$\sigma^\circ = \frac{2c}{\pi} \arcsin \frac{\varepsilon^\circ}{A} = 2 \arcsin \frac{\varepsilon^\circ}{A}, \quad (4.26)$$

$$k_H = \left. \frac{\partial \sigma^\circ}{\partial \varepsilon^\circ} \right|_{\varepsilon^\circ=0} = 2 \frac{1}{A \sqrt{1 - \left( \frac{\varepsilon^\circ}{A} \right)^2}} \Bigg|_{\varepsilon^\circ=0} = \frac{2}{A}. \quad (4.27)$$

Заменим внутренний контур звеном с передаточной функцией

$$W_5(p) = \frac{k_n W_2(p)}{1 + k_n W_2(p) W_3(p)} = \frac{0,5(0,001p + 1)}{0,0001p^3 + 0,101p^2 + p + 505}. \quad (4.28)$$

Передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W_{pc}(p) = \frac{k_1(0,00005p^2 + 0,0505p + 0,5)}{0,0001p^4 + 0,101p^3 + 1,1p^2 + 506p + 505} \quad (4.29)$$

а характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид

$$0,0001\lambda^4 + 0,101\lambda^3 + (1,1 + 0,00005k_1)\lambda^2 + (5056 + 0,0505k_1)\lambda + 505 + 0,5k_1 = 0. \quad (4.30)$$

При положительном коэффициенте  $k_1$  необходимое условие устойчивости выполняется. Поэтому по критерию Ляпуна-Шипара система будет устойчива, если определитель Гурвица третьего порядка будет положительным:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_1(a_2a_3 - a_1a_4) - a_0a_3^2 > 0. \quad (4.31)$$

После подстановки значений  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  и  $a_4$  получим, что система будет устойчива при  $k_1 > 1200$ .

*Задача 4.1.* Передаточная функция линейной части нелинейной системы равна  $W_{л}(p) = \frac{0,1}{p(0,1p+1)^2}$ . Определить, будет ли система абсолютно устойчива в секторе  $[0,1; 10]$ .

*Задача 4.2.* Передаточная функция линейной части нелинейной системы равна  $W_{л}(p) = \frac{0,1}{p(0,1p+1)^2}$ . Определить, будет ли система абсолютно устойчива в секторе  $[0,2; 8]$ .

*Задача 4.3.* Передаточная функция линейной части нелинейной системы равна  $W_{л}(p) = \frac{0,1}{p(0,1p+1)^2}$ . Определить, будет ли система абсолютно устойчива в секторе  $[0,5; 5]$ .

*Задача 4.4.* В примере 4.3 нелинейный элемент представляет собой усилитель с ограничением:

$$u = \begin{cases} k_n \varepsilon \operatorname{sign} \varepsilon, & |\varepsilon| < b; \\ c \operatorname{sign} \varepsilon, & |\varepsilon| \geq b. \end{cases} \quad (4.32)$$

Коэффициенты гармонической линеаризации нелинейного элемента равны:

$$\begin{cases} q(A) = \frac{2c}{\pi b} \left( \arcsin \frac{b}{A} + \frac{b}{A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} \right), & A \geq b; \\ q'(A) = 0. \end{cases} \quad (4.33)$$

При  $A = b$  коэффициент  $q(A) = q_{max} = \frac{c}{b}$ .

Определить значение коэффициента  $k$ , при котором в системе отсутствуют автоколебания.

*Задача 4.5.* В примере 4.3 приведенная линейная часть систем описывается передаточной функцией вида:

$$W(p) = \frac{k}{p(Tp+1)^2}. \quad (4.34)$$

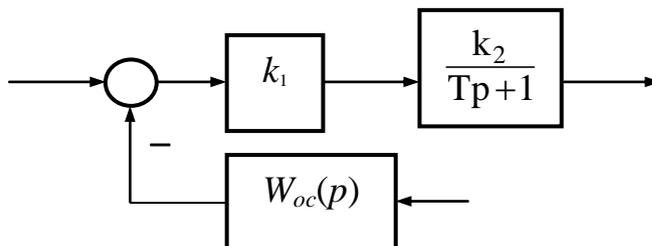
Определить значение коэффициента  $k$ , при котором в системе отсутствуют автоколебания.

*Задача 4.6.* В задаче 4.4 приведенная линейная часть системы описывается передаточной функцией (4.34).

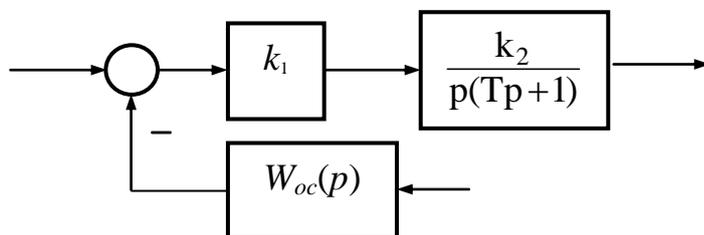
Определить значение коэффициента  $k$ , при котором в системе отсутствуют автоколебания.

*Задача 4.7.* На рисунке показан фрагмент системы с бесконечно большим коэффициентом усиления  $k_1$ . Определите варианты входного сигнала и вида пе-

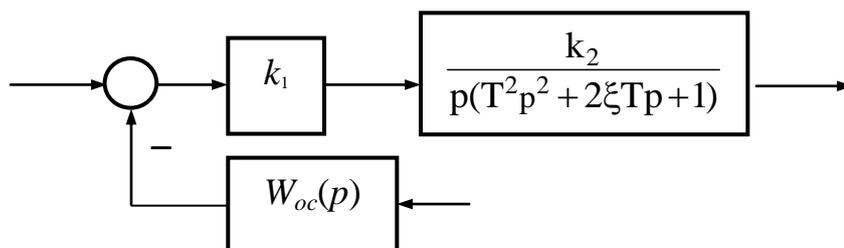
передаточной функции звена обратной связи, обеспечивающих устойчивость системы.



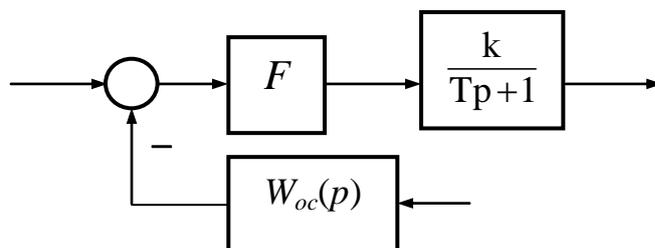
*Задача 4.8.* На рисунке показан фрагмент системы с бесконечно большим коэффициентом усиления  $k_1$ . Определите варианты входного сигнала и вида передаточной функции звена обратной связи, обеспечивающих устойчивость системы.



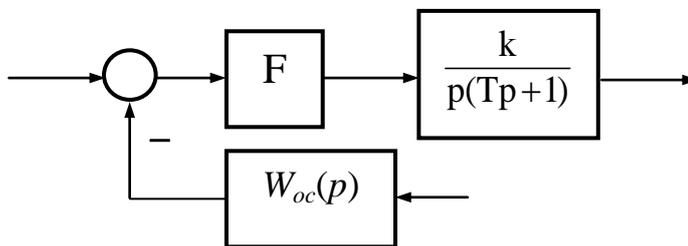
*Задача 4.9.* На рисунке показан фрагмент системы с бесконечно большим коэффициентом усиления  $k_1$ . Определите варианты входного сигнала и вида передаточной функции звена обратной связи, обеспечивающих устойчивость системы.



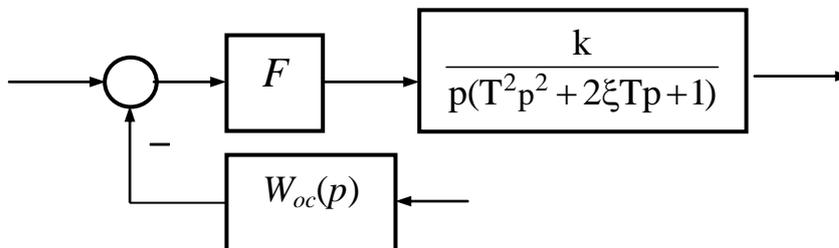
*Задача 4.10.* На рисунке показан фрагмент системы с идеальным реле. Определите варианты входного сигнала и вида передаточной функции звена обратной связи, обеспечивающих существование устойчивого скользящего режима.



*Задача 4.11.* На рисунке показан фрагмент системы с идеальным реле. Определите варианты входного сигнала и вида передаточной функции звена обратной связи, обеспечивающих существование устойчивого скользящего режима.



*Задача 4.12.* На рисунке показан фрагмент структурной схемы системы с идеальным реле. Определите варианты входного сигнала и вида передаточной функции звена обратной связи, обеспечивающих существование устойчивого скользящего режима.



## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 5

### ДИСКРЕТНЫЕ САУ

*Пример 5.1. Решение линейных разностных уравнений.*

Пусть дана дискретная функция, то есть функция  $x(t)$ , аргумент которой принимает дискретные значения, кратные  $\Theta$ , то есть  $t = n\Theta$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$

Функция  $\Delta x(t)$ , определяемая формулой

$$\Delta x(t) = x(t + \Theta) - x(t), \quad (5.1)$$

называется *первой (конечной) разностью*.

Рекуррентно  $n$ -я разность определяется следующим образом:

$$\Delta^0 x(t) = x(t), \quad \Delta^n x(t) = \Delta^{n-1} x(t + \Theta) - \Delta^{n-1} x(t), \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.2)$$

Введем в рассмотрение *оператор смещения  $E$* , который определяется соотношением

$$Ex(t) = x(t + \Theta). \quad (5.3)$$

С помощью этого оператора конечные разности можно представить следующим образом:

$$\left[ \begin{array}{l} \Delta x(t) = Ex(t) - x(t) = (E - 1)x(t); \\ \Delta^2 x(t) = E\Delta x(t) - \Delta x(t) = (E - 1)^2 x(t); \\ \dots \\ \Delta^n x(t) = E\Delta^{n-1} x(t) - \Delta^{n-1} x(t) = (E - 1)^n x(t). \end{array} \right. \quad (5.4)$$

Уравнение

$$a_0 x(t + n\Theta) + a_1 x(t + (n-1)\Theta) + \dots + a_n x(t) = f(t) \quad (5.5)$$

при  $a_0 \neq 0$  и  $a_n \neq 0$  называется *(конечным) разностным уравнением  $n$ -го порядка*. Здесь всюду коэффициенты уравнения предполагаются вещественными и постоянными.

Уравнение

$$a_0 x(t + n\Theta) + a_1 x(t + (n-1)\Theta) + \dots + a_n x(t) = 0, \quad (5.6)$$

которое получается из уравнения (5.5) путем приравнивания нулю правой части, называется *однородным* (конечным) разностным уравнением, соответствующим неоднородному разностному уравнению (5.5).

С помощью оператора смещения  $E$  уравнение (5.5) можно записать в *операторной (символической) форме*

$$a_0 E^n x(t) + a_1 E^{n-1} x(t) + \dots + a_n x(t) = f(t) \quad (5.7)$$

или

$$(a_0 E^n + a_1 E^{n-1} + \dots + a_n) x(t) = f(t). \quad (5.8)$$

Соответствующее однородное уравнение в операторной форме принимает вид

$$(a_0 E^n + a_1 E^{n-1} + \dots + a_n) x(t) = 0. \quad (5.9)$$

Полное решение неоднородного разностного уравнения (5.5) имеет вид

$$x(t) = x_g(t) + x_c(t), \quad (5.10)$$

где  $x_g(t)$  – частное решение, определяющее вынужденное движение,  $x_c(t)$  – общее решение соответствующего однородного уравнения, определяющее свободное движение.

Решение однородного уравнения ищется в виде  $x(t) = (\lambda)^t$ . После подстановки в уравнение (5.6) получим

$$(a_0 (\lambda)^{n\Theta} + a_1 (\lambda)^{(n-1)\Theta} + \dots + a_n) (\lambda)^t = 0. \quad (5.11)$$

Это равенство будет выполнено тождественно относительно  $t$ , если

$$(a_0 (\lambda)^{n\Theta} + a_1 (\lambda)^{(n-1)\Theta} + \dots + a_n) = 0. \quad (5.12)$$

Положив  $(\lambda)^{\Theta} = z$ , получим алгебраическое (*характеристическое*) уравнение

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (5.13)$$

Левая часть этого уравнения получается из разностного оператора при неизвестной функции в уравнениях (5.8) и (5.9) при замене  $E$  на  $z$ .

Таким образом, решение однородного разностного уравнения (5.6) будет

$$x = (\lambda_i)^t = z_i^{\frac{t}{\Theta}}, \quad (5.14)$$

где  $z_i$  – корень характеристического уравнения (5.13).

Если все корни  $z_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) характеристического уравнения простые (то есть различные), то общее решение однородного разностного уравнения (5.6) имеет вид

$$x_c(t) = \sum_{i=1}^n C_i z_i^{\frac{t}{\Theta}}, \quad (5.15)$$

где  $C_i$  – произвольные постоянные.

Если корней характеристического уравнения имеется кратный корень  $z_j$  кратности  $k_j$ , то ему соответствует слагаемое

$$\left( C_1^j + C_2^j \frac{t}{\Theta} + \dots + C_{k_j}^j \left( \frac{t}{\Theta} \right)^{k_j-1} \right) z_j^{\frac{t}{\Theta}}. \quad (5.16)$$

Если имеются простые комплексно-сопряженные корни  $z_{k,k+1} = \alpha \pm j\beta$ , то соответствующие им два слагаемых можно заменить на

$$\rho^{\frac{t}{\Theta}} \left( A \cos \frac{t}{\Theta} \varphi + B \sin \frac{t}{\Theta} \varphi \right), \quad (5.17)$$

где  $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ ,  $\varphi = \arctg \frac{\beta}{\alpha}$ ,  $A$  и  $B$  – произвольные константы.

*Пример 5.2.* Найти полное решение разностного уравнения

$$x(t + 2\Theta) - 5x(t + \Theta) + 6x(t) = 4t. \quad (5.18)$$

Частное решение будем искать в виде

$$x_g(t) = at + b. \quad (5.19)$$

Подставив это решение в уравнение, получим

$$a(t + 2\Theta) + b - 5(a(t + \Theta) + b) + 6(at + b) = 4t, \quad (5.20)$$

или, после приведения подобных членов,

$$2at - 3a\Theta + 2b = 4t. \quad (5.21)$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях, получим

$$2a = 4, \quad -3a\Theta + 2b = 0 \Rightarrow a = 2, \quad b = 3\Theta. \quad (5.22)$$

Следовательно, частное решение уравнения (5.18) имеет вид

$$x_g(t) = 2t + 3\Theta. \quad (5.23)$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$z^2 - 5z + 6 = 0. \quad (5.24)$$

Корни этого уравнения равны

$$z_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} \Rightarrow z_1 = 3, \quad z_2 = 2. \quad (5.25)$$

Поэтому общее решение однородного разностного уравнения имеет вид

$$x_c(t) = C_1 3^{\frac{t}{\Theta}} + C_2 2^{\frac{t}{\Theta}}, \quad (5.26)$$

а полное решение неоднородного разностного уравнения есть

$$x(t) = 2t + 3\Theta + C_1 3^{\frac{t}{\Theta}} + C_2 2^{\frac{t}{\Theta}}. \quad (5.27)$$

*Пример 5.3.* Определить решение разностного уравнения

$$x(t + 2\Theta) + x(t + \Theta) + 0,25x(t) = 1 \quad (5.28)$$

при нулевых начальных условиях, то есть  $x(0) = x(\Theta) = 0$ .

Частное решение будем искать в виде константы  $x_g(t) = a$ . Подставив это решение в уравнение (5.28), получим

$$a + a + 0,25 = 0 \Rightarrow a = \frac{4}{9}. \quad (5.29)$$

Характеристическое уравнение

$$z^2 + z + 0,25 = 0 \quad (5.30)$$

имеет двукратный корень  $z_{1,2} = -0,5$ . Общее решение однородного разностного уравнения –

$$x_c(t) = \left( C_1 + C_2 \frac{t}{\Theta} \right) \cdot (-0,5)^{\frac{t}{\Theta}}, \quad (5.31)$$

а полное решение неоднородного уравнения –

$$x(t) = \frac{4}{9} + \left( C_1 + C_2 \frac{t}{\Theta} \right) \cdot (-0,5)^{\frac{t}{\Theta}}. \quad (5.32)$$

Из начальных условий имеем

$$\begin{cases} x(0) = \frac{4}{9} + C_1 = 0; \\ x(\Theta) = \frac{4}{9} + (C_1 + C_2) \cdot (-0,5) = 0. \end{cases} \quad (5.33)$$

Решив эту систему, получим  $C_1 = -\frac{4}{9}$ ,  $C_2 = \frac{4}{3}$ .

Следовательно, искомое решение имеет вид

$$x(t) = \frac{4}{9} - \left( \frac{4}{9} - \frac{4}{3} \frac{t}{\Theta} \right) \cdot (-0,5)^{\frac{t}{\Theta}}. \quad (5.34)$$

*Пример 5.4.* Пусть имеется аperiodическое звено с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{y(t)}{u(t)} = \frac{k}{Tp + 1}. \quad (5.35)$$

Во временной области функционирование этого звена описывается соответствующим дифференциальным уравнением

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = ku(t). \quad (5.36)$$

Найдем эквивалентный этому звену цифровой фильтр. Для этого заменим

$$\frac{dy(t)}{dt} \cong \frac{y_i - y_{i-1}}{\Theta}. \quad (5.37)$$

Тогда

$$\frac{T}{\Theta}(y_i - y_{i-1}) + y_i = ku_i. \quad (5.38)$$

После соответствующих преобразований получим:

$$y_i = \frac{1}{1 + \frac{T}{\Theta}} y_{i-1} + \frac{k}{1 + \frac{T}{\Theta}} u_i, \quad (5.39)$$

или

$$y_i = \alpha_1 y_{i-1} + \beta_0 u_i, \quad (5.40)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{1}{1 + \frac{T}{\Theta}}, \quad \beta_0 = \frac{k}{1 + \frac{T}{\Theta}}. \quad (5.41)$$

Анализ общего выражения для цифрового фильтра показывает, что фильтр состоит из двух частей.

Первая часть, соответствующая случаю  $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_m = 0$ , записывается в виде

$$y_i = \alpha_1 y_{i-1} + \alpha_2 y_{i-2} + \dots + \alpha_n y_{i-n} + \beta_0 u_i. \quad (5.42)$$

Вычисление каждого следующего значения выходного сигнала  $y_i$  осуществляется с помощью взвешивания предыдущих выходных значений фильтра  $y_{i-1}, \dots, y_{i-n}$  и одного значения входного сигнала  $u_i$ . Такой фильтр называется *рекурсивным фильтром  $n$ -го порядка*.

Если же  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ , то

$$y_i = \beta_0 u_i + \beta_1 u_{i-1} + \dots + \beta_m u_{i-m}. \quad (5.43)$$

В этом случае для фильтрации используются текущее и предыдущие значения входного сигнала  $u_i$ , взвешенные с коэффициентами  $\beta_0, \dots, \beta_m$ . Такой фильтр называется *нерекурсивным фильтром* или *фильтром скользящего окна*.

*Задача 5.1.* Сигнал  $x(t) = \sin \omega t$ , где  $\omega = 1/\pi$ , подвергается квантованию с периодом  $\Theta = 0,25$  с. Изобразите графически выходной сигнал квантователя  $x^*(t)$  для первых двух секунд.

*Задача 5.2.* Сигнал  $x(t) = \sin \omega t$ , где  $\omega = 1/\pi$ , подвергается квантованию с периодом  $\Theta = 0,25$  с. Квантованный сигнал поступает на вход экстраполятора нулевого порядка, который сохраняет постоянным сигнал  $x^*(t)$  на интервале  $k\Theta \leq t \leq (k+1)\Theta$ . Изобразите графически выходные сигналы квантователя  $x^*(t)$  и экстраполятора  $\rho(t)$  для первых двух секунд.

*Задача 5.3.* Дифференциальное уравнение

$$\dot{y}(t) = 2y(t) + 3u(t)$$

представить в виде (конечного) разностного уравнения и уравнения в операторной форме при  $\Theta = 0,1$  с.

*Задача 5.4.* Дифференциальное уравнение

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 3y(t) = \dot{u}(t) + 2u(t)$$

представить в виде (конечного) разностного уравнения и уравнения в операторной форме при  $\Theta = 0,1$  с.

*Задача 5.5.* Перейти от передаточной функции

$$W(p) = \frac{10}{9p^2 + 3p + 1}$$

к разностному уравнению и к передаточной функции  $W(E)$  при  $\Theta = 0,2$  с.

*Задача 5.6.* Перейти от передаточной функции

$$W(p) = \frac{2p + 1}{4p^2 + p + 1}$$

к разностному уравнению и к передаточной функции  $W(E)$  при  $\Theta = 0,5$  с.

*Задача 5.7.* Перейти от передаточной функции

$$W(p) = \frac{10(p + 0,5)}{p(p + 1)(p + 3)}$$

к разностному уравнению и к передаточной функции  $W(E)$  при  $\Theta = 0,1$  с.

*Задача 5.8.* Запишите ПД- и ПИ-законы управления в виде (конечного) разностного уравнения

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 6

### СИНТЕЗ САУ

*Пример 6.1.* Объект управления описывается передаточной функцией

$$W_0(p) = \frac{k_0}{p^2 + a_1 p + a_2}. \quad (6.1)$$

Необходимо выбрать типовой закон управления и определить его параметры, обеспечивающие максимальную степень устойчивости системы.

Очевидно, что с учетом известного условия  $m \leq n - 1$  ( $m$  – число настраиваемых параметров регулятора,  $n$  – степень характеристического полинома замкнутой системы) ограничения будут накладываться только на параметры П- и ПИ-регуляторов.

В случае применения ПД- и ПИД-регуляторов число искоемых параметров равно степени характеристического полинома. Это позволяет произвольно изменять параметры указанных регуляторов, и тем самым сделать степень устойчивости равной произвольно заданным числам.

Оптимальный параметр *П-регулятора* и оптимальная степень устойчивости определяются следующим образом:

$$k_n^* = \frac{1}{k_0} \left( \gamma^2 + \frac{a_1^2}{4} - a_2 \right); \quad (6.2)$$

$$\eta^* = \eta_{max} = \frac{a_1}{2}, \quad (6.3)$$

где  $\gamma$  – свободный параметр, пропорциональный степени колебательности.

Из (6.2) следует, что при  $\frac{a_1^2}{4} - a_2 > 0$  степень колебательности можно сделать равной нулю, положив  $\gamma = 0$ , так как при этом обеспечивается положительность коэффициента  $k_n^*$ . Следовательно, в этом случае корни характеристического уравнения будут вещественными, что, в свою очередь, предопределяет в системе монотонные переходные процессы.

Если же при  $\frac{a_1^2}{4} - a_2 \leq 0$  принять  $\gamma = 0$ , то  $k_n^*$  получается отрицательным или равным нулю. Следовательно, в этом случае в системе будут иметь место апериодические или колебательные переходные процессы.

Оптимальные параметры *ПИ-регулятора* и оптимальная степень устойчивости определяются следующим образом:

$$k_n^* = \frac{1}{k_0} \left( \gamma^2 + \frac{a_1^2}{3} - a_2 \right); \quad (6.4)$$

$$k_u^* = \frac{a_1}{3k_0} \left( \gamma^2 + \frac{a_1^2}{9} \right); \quad (6.5)$$

$$\eta^* = \eta_{max} = \frac{a_1}{3}. \quad (6.6)$$

Сравнение формул (6.2) и (6.4), а также (6.3) и (6.6) показывает, что введение в закон управления интегральной составляющей «расширяет» область существования монотонных переходных процессов, но снижает максимальную степень устойчивости системы.

*Пример 6.2.* Рассмотрим систему управления, в которой

$$W_0(p) = \frac{1}{p(0,1p+1)}; \quad (6.7)$$

$$W_p(p) = k_n, \quad (6.8)$$

а задающее воздействие  $x(t)$  изменяется скачком.

Необходимо определить такое значение  $k_n$ , при котором переходной процесс в замкнутой системе будет апериодическим, а интегральная оценка  $J_{20}$  имеет минимальное значение.

Переходной процесс в системе будет апериодическим, если корни характеристического уравнения

$$0,1p^2 + p + k_n = 0 \quad (6.9)$$

будут вещественными, то есть если детерминант этого уравнения

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 0,1k_n \geq 0, \text{ или } k_n \leq 2,5. \quad (6.10)$$

Объект содержит интегрирующее звено, поэтому система является астатической (статическая ошибка равна нулю), а переходная составляющая ошибки равна:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{1 + W_0(p)W_p(p)} x(t). \quad (6.11)$$

Переходя к изображениям Лапласа, получим

$$E(s) = \frac{1}{1 + W_0(s)W_p(s)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{0,1s + 1}{0,1s^2 + s + k_n}. \quad (6.12)$$

Подставив (6.12) в формулу для вычисления интегральных оценок, получим

$$J_{20} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{0,1j\omega + 1}{0,1(j\omega)^2 + j\omega + k_n} \right|^2 d\omega = I_2. \quad (6.13)$$

В свою очередь,

$$I_2 = \frac{b_0^2 a_2 + b_1^2 a_0}{2a_0 a_1 a_2}. \quad (6.14)$$

В данном случае  $b_0 = 0,1$ ,  $b_1 = 1$ ,  $a_0 = 0,1$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = k_n$ . Тогда согласно формуле (6.14) имеем

$$J_{20} = \frac{b_0^2 a_2 + b_1^2 a_0}{2a_0 a_1 a_2} = \frac{0,01k_n + 0,1}{2 \cdot 0,1k_n} = 0,05 + \frac{0,5}{k_n}. \quad (6.15)$$

Следовательно, оценка  $J_{20}$  принимает минимальное значение при  $k_n = 2,5$ . При данном значении коэффициента усиления регулятора в системе имеет место монотонный переходной процесс

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{-t}. \quad (6.16)$$

*Пример 6.3.* Для управления объектом, передаточная функция которого равна

$$W_0(p) = \frac{1}{(p+1)^3} \quad (6.17)$$

применяется ПИД-регулятор с передаточной функцией

$$W_p(p) = k_p \left( 1 + \frac{1}{T_u p} + \frac{T_d p}{T_p p + 1} \right). \quad (6.18)$$

Определим параметры ПИД-регулятора, используя аналитическое представление метода незатухающих колебаний (метода Циглера-Никольса).

В соответствии с указанным методом вначале рассмотрим систему управления с П-регулятором. Передаточная функция разомкнутой системы при этом равна

$$W_{pc}(p) = \frac{k_p}{(p+1)^3}. \quad (6.19)$$

Подставим  $p = j\omega$  и после преобразований получим

$$W_{pc}(j\omega) = \frac{k_p(1-3\omega^2)}{(1-3\omega^2)^2 + \omega^2(3-\omega^2)^2} - j \frac{k_p\omega(3-\omega^2)}{(1-3\omega^2)^2 + \omega^2(3-\omega^2)^2}, \quad (6.20)$$

откуда определяем действительную и мнимую части:

$$U_{pc}(\omega) = \frac{k_p(1-3\omega^2)}{(1-3\omega^2)^2 + \omega^2(3-\omega^2)^2}; \quad (6.21)$$

$$V_{pc}(\omega) = -\frac{k_p\omega(3-\omega^2)}{(1-3\omega^2)^2 + \omega^2(3-\omega^2)^2}. \quad (6.22)$$

Из равенства

$$\frac{k_p\omega(3-\omega^2)}{(1-3\omega^2)^2 + \omega^2(3-\omega^2)^2} = 0 \quad (6.23)$$

определяем  $\omega_{кр} = \sqrt{3}$ ;  $T_{кр} \approx 3,63$  с.

Полученное значение  $\omega_{кр}$  подставим в равенство

$$\left| \frac{k_p(1-3\omega_{кр}^2)}{(1-3\omega_{кр}^2)^2 + \omega_{кр}^2(3-\omega_{кр}^2)^2} \right| = 1, \quad (6.24)$$

откуда определяем  $k_{к.кр} = 8$ .

Для определения параметров  $k_p$ ,  $T_u$  и  $T_d$  воспользуемся таблицей 6.1, а также учтем, что постоянная времени  $T_p$  должна выбираться из следующего условия:  $0,1T_d \leq T_p \leq 0,2T_d$ .

Таблица 6.1.

	$k_p$	$T_u$	$T_d$
П-регулятор	$0,55k_{п.кр}$	–	–
ПИ-регулятор	$0,45k_{п.кр}$	$\approx 0,83T_{кр}$	–
ПИД-регулятор	$0,60k_{п.кр}$	$0,5T_{кр}$	$0,125T_{кр}$

В результате получим:  $k_p = 4,8$ ;  $T_u \approx 1,81$ ;  $T_d \approx 0,45$ ;  $T_p = 0,045$ . Таким образом, передаточная функция ПИД-регулятора имеет вид:

$$W_p(p) = 4,8 \cdot \left( 1 + \frac{1}{1,81p} + \frac{0,45p}{0,045p + 1} \right). \quad (6.25)$$

*Пример 6.4.* Синтезируем систему автоматического управления частотой вращения выходного вала двигателя постоянного тока. Исходную модель объекта управления (см. пример 2.4) запишем в виде:

$$\begin{cases} \dot{\omega} = \varepsilon(\omega, M); \\ \varepsilon = \frac{1}{J}(M - M'_H(\omega)); \\ M = \frac{k_m}{R}(U - k_\omega \omega). \end{cases} \quad (6.26)$$

Угловое ускорение  $\varepsilon$  есть нелинейная функция угловой скорости  $\omega$ , которая определяется зависимостью  $M'_H(\omega)$ .

Задачу управления частотой вращения выходного вала двигателя сформулируем следующим образом. В начальный момент времени  $t = 0$  угловая скорость  $\omega(0) = \omega_0$ . Требуется найти алгоритм вычисления управляющего напряжения  $U = U(\omega)$ , при котором в системе устанавливается заданное значение

скорости вращательного движения  $\omega(\infty) = \omega^\circ = const$ . Необходимо, чтобы при этом процесс установления назначенного вращательного движения подчинялся закону:

$$\begin{cases} \omega(t) = \omega^*(t); \\ \omega^\circ - \omega^*(t) = C \exp(-\lambda t); \\ \lambda = const > 0. \end{cases} \quad (6.27)$$

Величина  $C = \omega^\circ - \omega_0 = const$ , а  $\lambda$  определяет быстроту затухания ошибки  $\delta_\omega(t) = \omega^\circ - \omega(t)$ .

Сформулированную задачу будем решать по такой схеме:

- 1) определяем ускорение  $\varepsilon = \varepsilon^*$ , при котором реализуется движение по заданной траектории, то есть  $\omega(t) = \omega^*(t)$ ;
- 2) определяем вращательный момент  $M = M^*$ , который создает требуемое ускорение  $\varepsilon^*$ ;
- 3) определяем расчетное соотношение для управляющего напряжения  $U = U^*$ .

В соответствии с концепциями *обратных задач динамики* управляемых систем ускорение  $\varepsilon^*$  может быть найдено в результате подстановки

$$\omega^*(t) = \omega^\circ - C_\omega \exp(-\lambda t) \quad (6.28)$$

в систему уравнений (6.26) вместо переменной  $\omega$ . Выполнив такую подстановку, получим:

$$\varepsilon^*(t) = \frac{d(\omega^*(t))}{dt} = \lambda C_\omega \exp(-\lambda t). \quad (6.29)$$

Это выражение определяет *программный закон* изменения ускорения, при котором реализуется предписанный процесс  $\omega(t) = \omega^*(t)$ .

Чтобы построить *закон управления с обратной связью*, необходимо в (6.29) выразить функцию времени  $C_\omega \exp(-\lambda t)$  через измеряемую переменную  $\omega$ . Для этого нужно воспользоваться кинематическим законом (6.27). Если положить, что  $\omega(t) = \omega^*(t)$ , то имеем:

$$C_\omega \exp(-\lambda t) = \omega^\circ - \omega(t). \quad (6.30)$$

Подставив (6.30) в формулу (6.29), получим:

$$\varepsilon^*(t) = \lambda(\omega^\circ - \omega(t)) = \lambda\delta_\omega(t). \quad (6.31)$$

Равенство (6.31) определяет требуемое значение управляющего ускорения  $\varepsilon^*$  в зависимости от рассогласования  $\delta_\omega$ .

Ускорение  $\varepsilon^*$  создается моментом  $M^*$ , величина которого может быть определена из уравнения

$$\varepsilon(\omega, M) = \lambda(\omega^\circ - \omega); t \geq 0. \quad (6.32)$$

В соответствии со вторым уравнением системы (6.26) находим искомый момент

$$M^*(\omega) = \lambda J(\omega^\circ - \omega) + M'_H(\omega). \quad (6.33)$$

Итак, для того, чтобы процесс установления заданной скорости вращения  $\omega(t) \rightarrow \omega^\circ$  подчинялся кинематическому закону (6.27), двигатель должен развивать момент, величина которого определяется по выражению (6.33).

Согласно выражению (6.33) требуемое значение вращательного момента вычисляется по отклонению  $\omega^\circ - \omega(t)$ . Следовательно, закон управления моментом строится по схеме с обратной связью. Структурная схема контура управления частотой вращения выходного вала двигателя приведена на рисунке 6.1, в которой отражена только модель механической части.

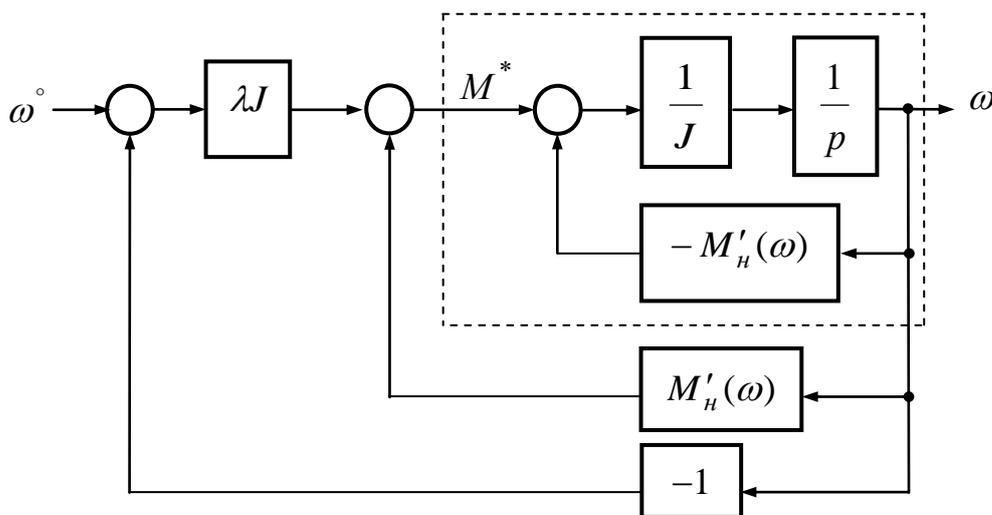


Рисунок 6.1 – Структурная схема контура управления  $\omega(t)$

Таким образом, формально можно считать, что задача определения требуемого момента  $M^*$ , при котором выполняется кинематический закон  $\omega^*(t) \rightarrow \omega^\circ$ , решена. Величина  $M^*$ , определяемая по формуле (6.33), содержит компоненту, которая компенсирует момент  $M'_n(\omega)$  в уравнении (6.26). На этом основании закон управления (6.33) можно назвать *компенсационным*. Структурная схема, показанная на рисунке 6.1, наглядно иллюстрирует компенсирующие свойства закона управления: в модели двигателя величина  $M'_n(\omega)$  вычитается, а при вычислении управляющего момента – суммируется.

Для окончательного решения задачи синтеза необходимо найти управляющее напряжение (управляющую функцию), с помощью которого создается вращательный момент  $M^*$ . Обозначим через  $U^*$  то значение управляющей функции, которое соответствует искомому значению  $M^*$ . Чтобы определить  $U^*$ , воспользуемся системой уравнений (6.26). Подставляя сюда  $M^*$  вместо  $M$ , получим:

$$U^* = \frac{R}{k_m} M^* + k_\omega \omega. \quad (6.34)$$

Соотношения (6.33) и (6.34) составляют содержание алгоритма управления частотой вращения выходного вала двигателя.

Отметим, что при вычислении управляющего напряжения  $U^*$  используется положительная обратная связь по угловой скорости  $\omega$  с коэффициентом передачи  $k_\omega$ . Сигнал  $k_\omega \omega$  компенсирует такую же составляющую в модели двигателя.

*Пример 6.5.* Рассмотрим систему автоматического управления, в которой применяется релейный регулятор, реализующий следующий алгоритм:

$$U = \begin{cases} U_{max}, & \varepsilon \geq \delta; \\ -U_{max}, & \varepsilon \leq -\delta; \\ 0, & -\delta < \varepsilon < \delta, \end{cases} \quad (6.35)$$

где  $\varepsilon$  – ошибка регулирования;  $\delta$  – зона нечувствительности регулятора.

Объект управления описывается передаточной функцией

$$W(p) = \frac{k}{p(Tp + 1)}, \quad (6.36)$$

а передаточная функция главной отрицательной обратной связи равна единице.

Для простоты рассуждений заменим в регуляторе релейный элемент усилителем с коэффициентом усиления, равным

$$k_p = \frac{|U_{max}|}{|\delta|}. \quad (6.37)$$

Передаточная функция замкнутой системы при этом будет равна

$$H(p) = \frac{k_p k}{Tp^2 + p + k_p k}, \quad (6.38)$$

а характеристическое уравнение имеет вид:

$$Tp^2 + p + k_p k = 0. \quad (6.39)$$

Исходная система устойчива, но при этом детерминант уравнения (6.39)

$$\Delta = 1 - 4k_p k T \quad (6.40)$$

будет отрицательным, поскольку  $k_p \rightarrow \infty$ . Следовательно, корни уравнения (6.39) будут комплексными, и в системе будет иметь место колебательный переходной процесс.

Охватим теперь релейный элемент отрицательной обратной связью с передаточной функцией

$$W_k(p) = \frac{k_k}{T_k p + 1}. \quad (6.41)$$

Передаточная функция скорректированного регулятора с учетом замены реле на усилитель равна:

$$W'_p(p) = \frac{k_p (T_k p + 1)}{T_k p + 1 + k_p k_k}. \quad (6.42)$$

Разделим числитель и знаменатель передаточной функции (6.42) на  $k_p$  и, учитывая величину коэффициента усиления  $k_p$ , получим:

$$W'_p(p) = \frac{T_\kappa p + 1}{k_\kappa}, \quad (6.43)$$

то есть с помощью местной обратной связи формируется ПД-закон регулирования.

Передаточная функция скорректированной замкнутой системы равна

$$H'(p) = \frac{k(T_\kappa p + 1)}{k_\kappa p(Tp + 1) + k(T_\kappa p + 1)}, \quad (6.44)$$

а характеристическое уравнение имеет вид:

$$k_\kappa T p^2 + (k_\kappa + k T_\kappa) p + k = 0. \quad (6.45)$$

Детерминант уравнения (6.455)

$$\Delta = (k_\kappa + k T_\kappa)^2 - 4k_\kappa k T \quad (6.46)$$

можно сделать положительным соответствующим выбором  $k_\kappa$  и  $T_\kappa$  и тем самым получить в систем аperiодические переходные процессы.

*Пример 6.6.* Пусть входной сигнал П-регулятора равен

$$\varepsilon(t) = A \sin \omega t. \quad (6.47)$$

Выходной сигнал регулятора (управляющий сигнал) равен

$$U(t) = k_p A \sin \omega t. \quad (6.48)$$

Положим, что желаемый управляющий сигнал должен изменяться по следующему закону:

$$U_\kappa(t) = \begin{cases} U, & \omega t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right), \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right), \dots; \\ 0, & \omega t \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right), \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right), \dots \end{cases} \quad (6.49)$$

График  $U_\kappa(t)$ , соответствующий формуле (6.49), показан на рисунке 6.2, а структурная схема скорректированного регулятора – на рисунке 6.3.

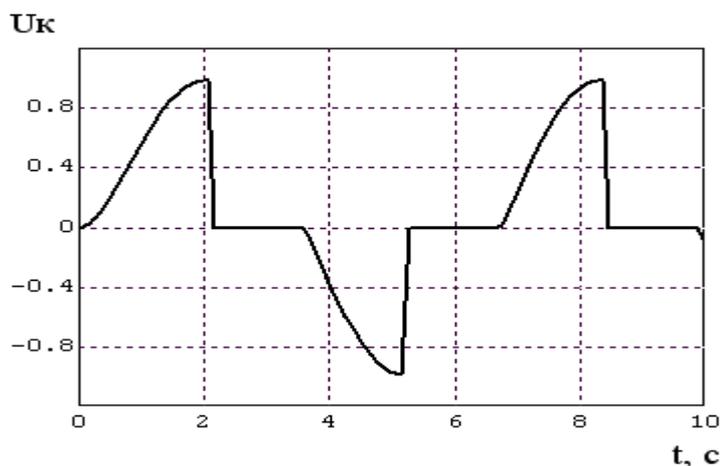


Рисунок 6.2 – Желаемый выходной сигнал П-регулятора

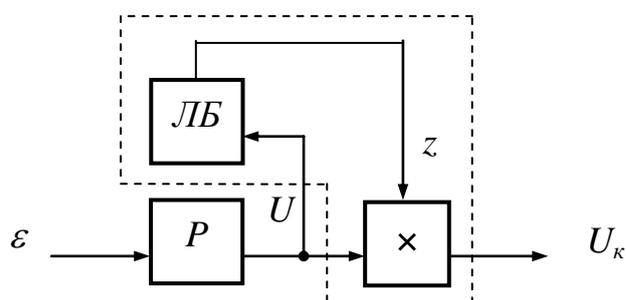


Рисунок 6.3 – Структурная схема скорректированного регулятора

Алгоритм работы логического блока (ЛБ) имеет вид

$$z = \begin{cases} 1, & U < A \wedge \dot{U} > 0; \\ 1, & -U > -A \wedge \dot{U} \leq 0; \\ 0, & U \leq A \wedge \dot{U} < 0; \\ 0, & -U \geq -A \wedge \dot{U} \geq 0. \end{cases} \quad (6.50)$$

а его структурная схема показана на рисунке 6.4.

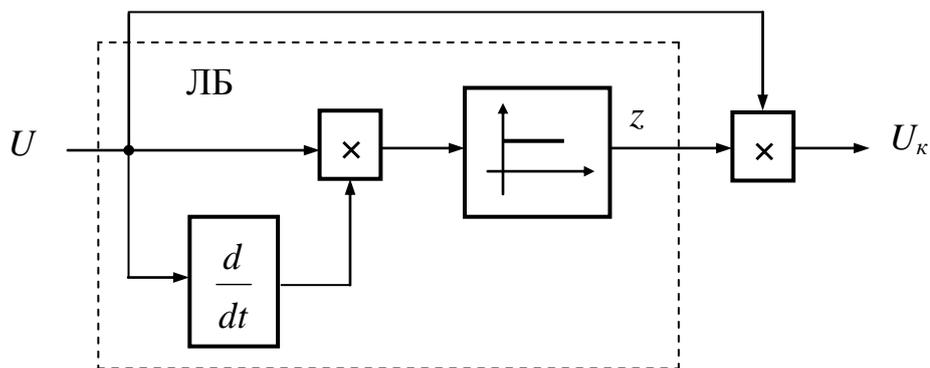


Рисунок 6.4 – Структурная схема логического блока

*Пример 6.7.* Рассмотрим систему автоматического регулирования питания барабанного котла. Задачу сформулируем следующим образом: *поддержание уровня воды в барабане в заданных пределах при переменной тепловой нагрузке путем соответствующего изменения расхода питательной воды.*

При изготовлении котла заранее определяют и указывают в соответствующей технической документации два предельных значения уровня воды в барабане: нижний и верхний. При этом нижний предельный уровень устанавливается, исходя из обеспечения надежного поступления воды в опускные трубы, а верхний – из исключения возможности попадания воды в пароперегреватель. Объем воды, заключенный между этими уровнями, позволяет барабанному котлу некоторое время работать без подачи в него питательной воды. Поддержание уровня воды в указанных пределах осуществляется с помощью соответствующего блока защит и блокировок, а вблизи номинального значения осуществляется с помощью регулятора уровня.

Структурная схема системы автоматической стабилизации (САР) уровня воды относительно номинального значения показана на рисунке 6.5, где обозначено: ОУ – объект управления;  $\Delta Q_{нв}$  – изменение расхода питательной воды;  $\Delta V_n$  – изменение нагрузки потребителя (тепловой нагрузки);  $\Delta h_б$  – изменение уровня воды в барабане относительно номинального значения;  $U$  – выходной сигнал регулятора уровня (управляющий сигнал);  $U_h^\circ$  – задающее воздействие, равное нулю;  $U_h$  – выходной сигнал датчика уровня;  $\varepsilon_h$  – сигнал рассогласования;  $G_i$  – операторы преобразования «вход-выход». В частности, операторы  $G_1$  и  $G_2$  отображают характер воздействия соответственно тепловой нагрузки и расхода питательной воды на уровень воды в барабане, а операторы  $G_3$ ,  $G_4$  и  $G_5$  – динамические свойства соответственно регулятора уровня, исполнительного механизма регулятора и датчика уровня.

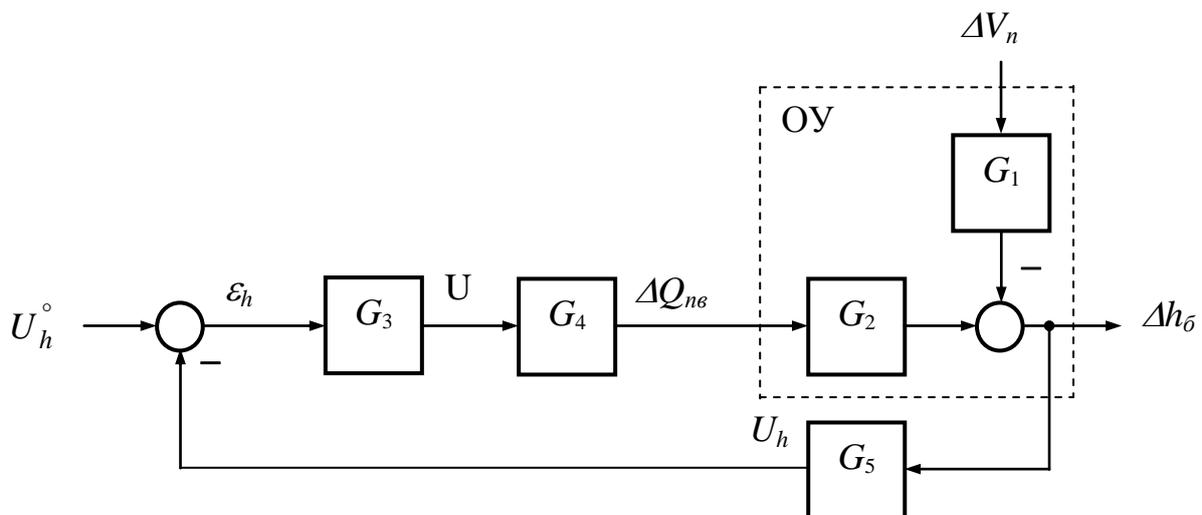


Рисунок 6.5 – Структурная схема САР уровня воды

Рассмотрим динамические свойства объекта управления. Операторам  $G_1$  и  $G_2$  соответствуют следующие передаточные функции:

$$W_1(p) = \frac{\Delta h_o(t)}{\Delta V_n(t)} = \frac{k_1}{p} \exp(-\tau_1 p); \quad (6.51)$$

$$W_2(p) = \frac{\Delta h_o(t)}{\Delta Q_{ns}(t)} = \frac{k_2}{p} \exp(-\tau_2 p). \quad (6.52)$$

Из (6.51) и (6.52) видно, что объект управления характеризуется запаздыванием, как по каналу управления, так и по каналу возмущения. Значения  $\tau_1$  и  $\tau_2$  зависят от конструкции котла и могут колебаться в пределах от 20 до 100 с.

Наличие в системе (особенно в канале управления) звена с запаздыванием отрицательно сказывается на устойчивости системы. Поэтому синтез систем управления объектами с запаздыванием проводится в два этапа.

На *первом этапе* осуществляют стабилизацию объекта, то есть стремятся с помощью регулятора сократить число корней в правой полуплоскости и тем самым обеспечить достаточный запас устойчивости системы.

В данном случае необходимо учитывать также и инерционность исполнительного механизма регулятора, который представляет собой заслонку с приводом постоянной скорости, то есть является интегрирующим звеном с передаточной функцией вида

$$W_4(p) = \frac{\Delta Q_{ns}(t)}{U(t)} = \frac{k_4}{p}. \quad (6.53)$$

Учитывая динамические особенности объекта управления и исполнительного механизма, применим релейный регулятор с максимальным по величине выходным сигналом. Это позволит существенно уменьшить время «перехода» интегратора из начального состояния в конечное состояние по сравнению с линейными регуляторами. Кроме того, для высоко инерционных объектов релейный регулятор дает возможность получить достаточно высокую точность регулирования при заданном запасе устойчивости.

Таким образом, синтезированный на первом этапе оператор  $G_3$  отображает следующий алгоритм работы регулятора уровня:

$$U = \begin{cases} 0, & -\Delta_h \leq \varepsilon_h \leq \Delta_h; \\ 1, & \varepsilon_h > \Delta_h; \\ -1, & \varepsilon_h < -\Delta_h, \end{cases} \quad (6.54)$$

где  $\Delta h$  – зона нечувствительности регулятора.

В работах, посвященных наладке средств автоматики котельных установок отмечается, что регулятор уровня должен поддерживать  $\Delta h_{\delta}$  в пределах  $\pm 20$  мм, а максимальные значения  $\Delta h_{\delta}$  не должны превышать  $\pm 50$  мм.

Поскольку инерционностью датчика уровня в данном случае можно пренебречь, то его можно рассматривать как усилительное звено с передаточной функцией

$$W_5(p) = \frac{U_h(t)}{\Delta h_{\delta}(t)} = k_5. \quad (6.55)$$

С учетом формул (6.51)-(6.55) структурная схема САУ питания котла примет вид, представленный на рисунке 6.6, где РПУ – релейный регулятор уровня.

На рисунке 6.7 представлены результаты моделирования исходной САУ. Зона нечувствительности регулятора выбиралась в процессе моделирования для обеспечения требуемого запаса устойчивости системы. В размерности уровня воды в барабане она равна  $\pm 5$  мм.

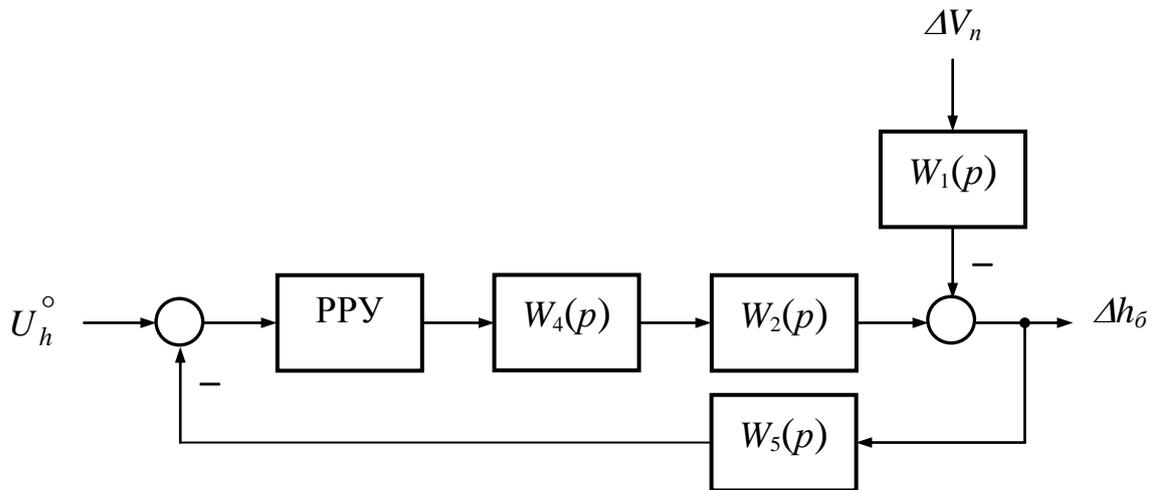


Рисунок 6.6 – Структурная схема САУ уровня воды

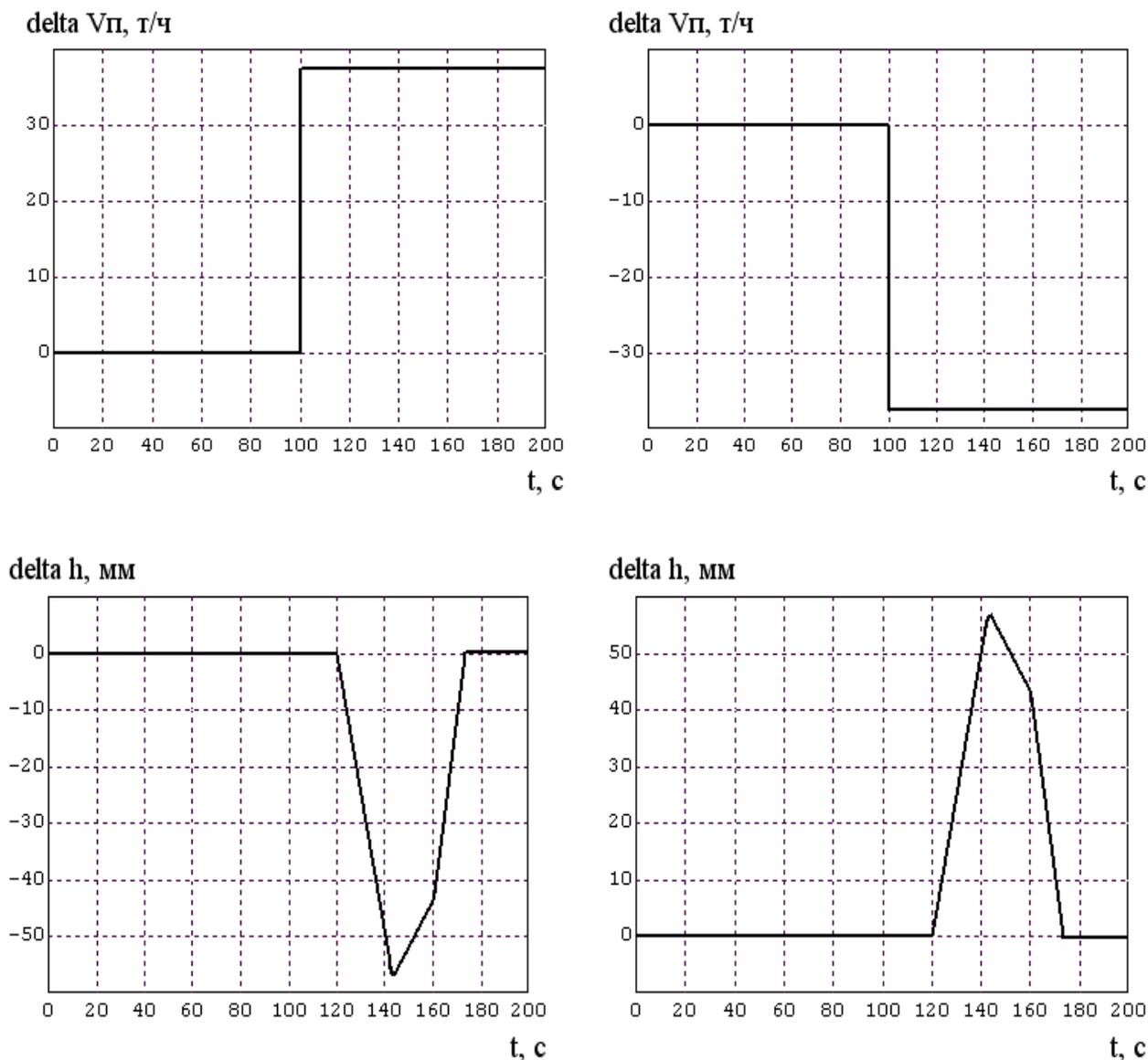


Рисунок 6.7 – Графики изменения регулируемой переменной при изменении тепловой нагрузки

Как следует из приведенных графиков, система регулирования, построенная по структурной схеме, показанной на рисунке 6.6, устойчива и поддерживает уровень воды в барабане с высокой точностью. Таким образом, задачу стабилизации объекта управления можно считать принципиально решенной.

Теперь приступим к реализации *второго этапа* синтеза, основная задача которого в самом общем случае заключается оптимизации показателей качества базовой САУ. Для этого обратимся к графикам, показанным на рисунке 6.4, и обратим внимание на то, что базовая система характеризуется значительной длительностью регулирования (около 70 с) и существенным максимальным отклонением уровня (более  $\pm 50$  мм) даже при невысоком возмущающем воздействии. Причем, оба эти показателя взаимосвязаны.

Следовательно, задача, которая решается на втором этапе, может быть сформулирована как задача минимизации максимального отклонения уровня воды в барабане, то есть

$$\max \Delta h_{\delta} \rightarrow \min, \quad (6.56)$$

при ограничениях на величину управляющего сигнала, в качестве которого выступает расход питательной воды  $Q_{ng}$ .

На рисунке 6.8 в качестве иллюстрации работы базовой САР приведены графики изменений  $\Delta h_{\delta}$ , обусловленных изменениями  $\Delta V_n$  и  $\Delta Q_{ng}$  при скачкообразном увеличении тепловой нагрузки.

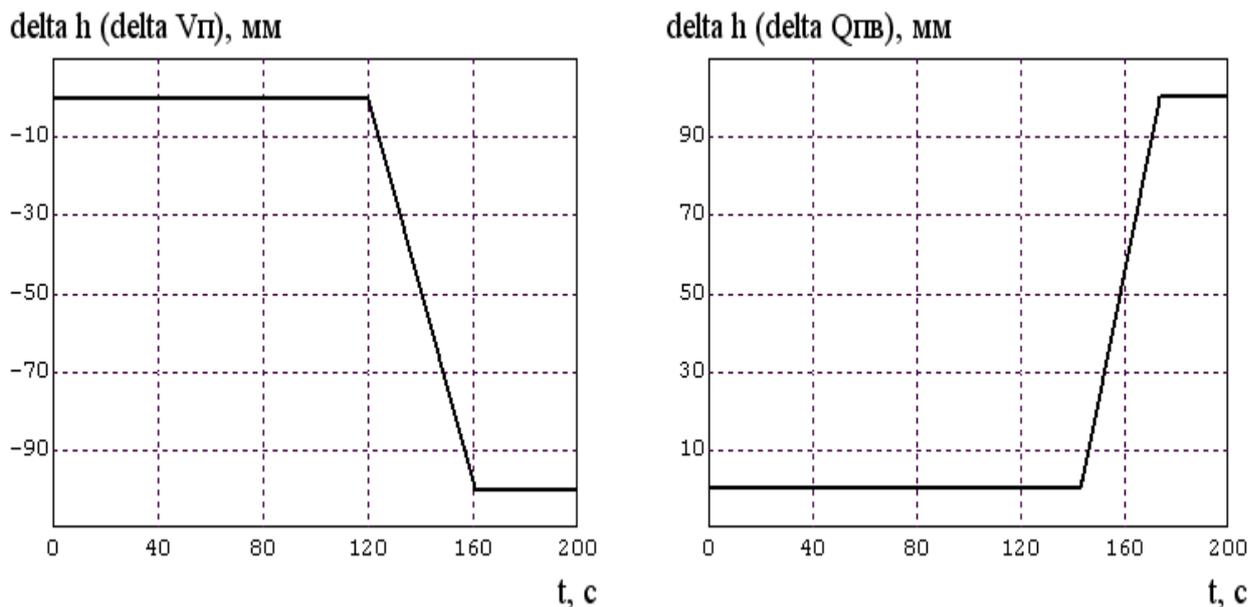


Рисунок 6.8 – Графики изменения  $\Delta h_{\delta}$  при изменениях возмущения  $\Delta V_n$  и управления  $\Delta Q_{ng}$

Из приведенных графиков видно, реакция уровня воды в барабане на управляющее воздействие отстает от момента изменения тепловой нагрузки на 42,5 с, что обусловлено временными задержками в цепи возмущения и управления, а также инерционностью исполнительного механизма регулятора. Следовательно, решение задачи (6.56) заключается в компенсации запаздываний в цепях возмущения и управления, то есть фактически в совмещении во времени изменения тепловой нагрузки и реакции регулятора уровня.

В качестве дополнительной информации будем использовать выходной сигнал датчика тепловой нагрузки. Тогда структурная схема САР питания примет вид, показанный на рисунке 6.9, где  $W_k(p)$  – передаточная функция звена коррекции.

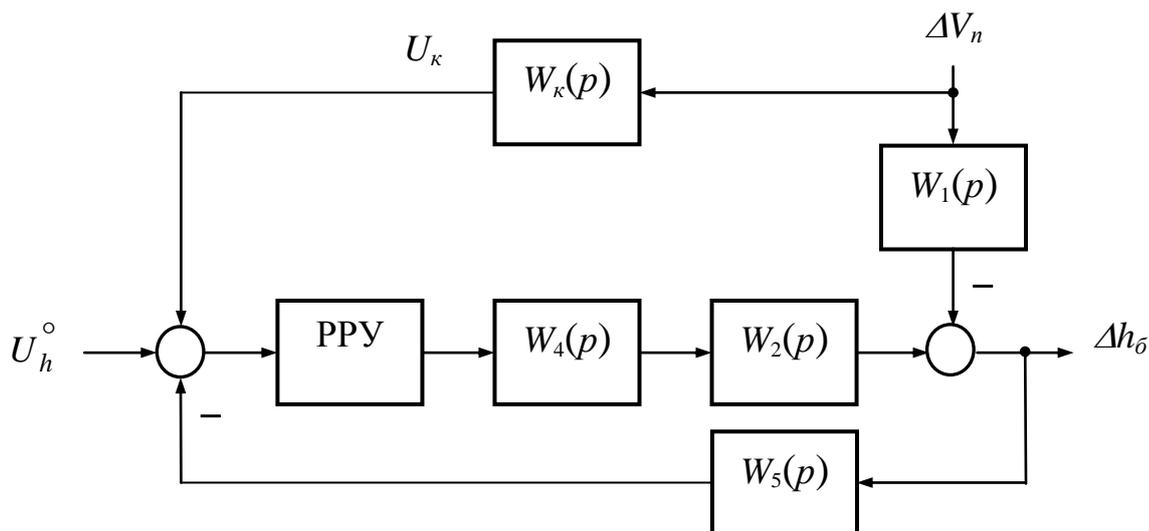


Рисунок 6.9 – Структурная схема САР с коррекцией

Учитывая результаты проведенного выше анализа динамики базовой системы, при выборе структуры и параметров передаточной функции  $W_k(p)$  будем исходить из следующего. Выходной сигнал звена коррекции должен представлять собой исчезающий импульс, то есть такой импульс, который возникает только при  $\frac{d(\Delta V_n)}{dt} \neq 0$ . Длительность же существования  $|U_k| \geq |\Delta h_\delta|$  должна быть не меньше времени перемещения исполнительного механизма регулятора из нулевого в крайнее положение. Это обеспечит срабатывание регулятора уровня одновременно с появлением возмущения по тепловой нагрузке и, как следствие, одновременную реакцию уровня воды в барабане на изменения  $\Delta V_n$  и  $\Delta Q_{nv}$ .

Исходя из сказанного, передаточная функция звена коррекции имеет следующий вид:

$$W_k(p) = \frac{U_k(t)}{\Delta V_n(t)} = \frac{k_k p}{T_k p + 1}. \quad (6.57)$$

На рисунке 6.10 приведены графики выходного сигнала звена коррекции при скачкообразном изменении тепловой нагрузки.

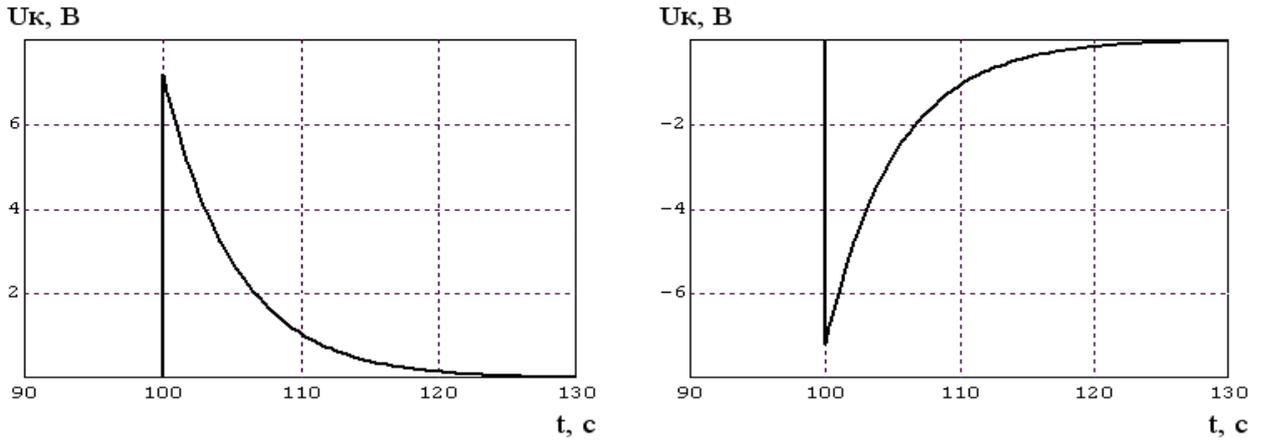


Рисунок 6.10 – Графики изменения выходного сигнала звена коррекции

На рисунках 6.11 и 6.12 приведены графики переходных процессов в скорректированной системе при скачкообразном изменении  $\Delta V_n$  на  $\pm 50\%$  и  $\pm 100\%$  от номинального значения соответственно.

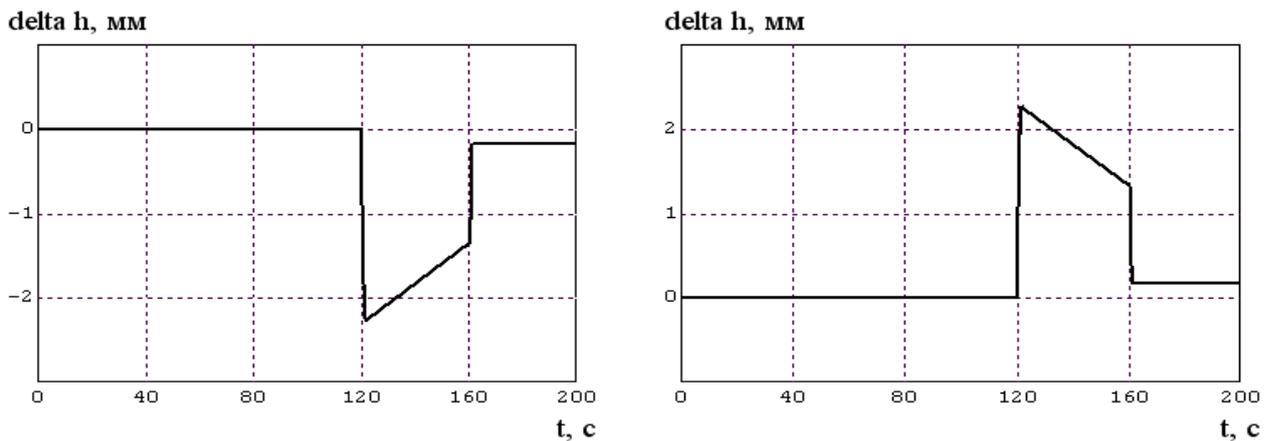


Рисунок 6.11 – Графики переходных процессов при  $\Delta V_n = \pm 0,5V_{n.ном}$

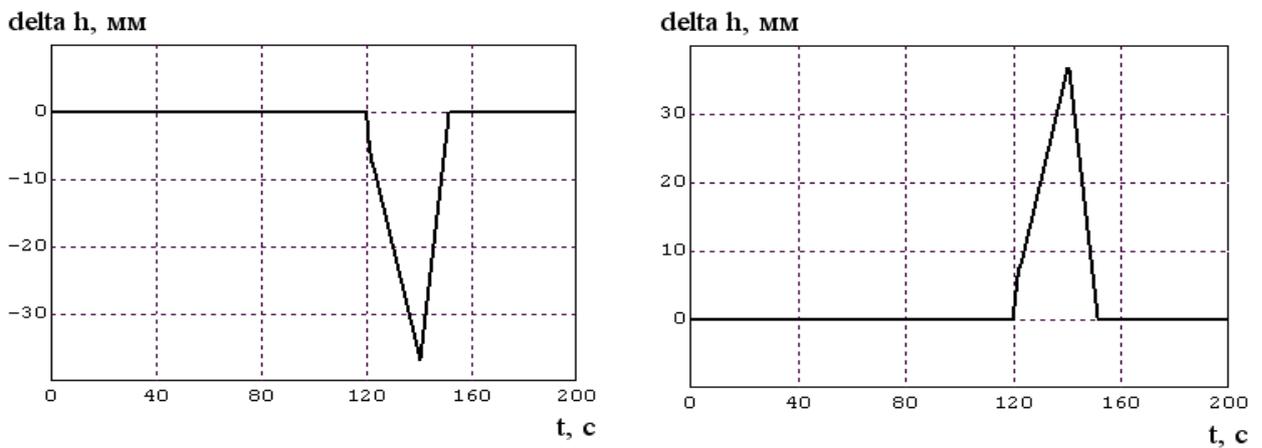


Рисунок 6.12 – Графики переходных процессов при  $\Delta V_n = \pm V_{n.ном}$

Из приведенных графиков видно, что при изменении  $\Delta V_n$  на  $\pm 50\%$  от номинального значения  $|\max \Delta h_{\delta}| < 2,5$  мм, то есть фактически не превышает зоны нечувствительности регулятора уровня. При изменении  $\Delta V_n$  на  $\pm 100\%$  от номинального значения  $|\max \Delta h_{\delta}| < 40$  мм, что меньше требуемых предельных значений ( $\pm 50$  мм).

Таким образом, разработанная система автоматического регулирования питания котла полностью удовлетворяет критерию оптимальности (6.56).

*Пример 6.8.* Рассмотрим задачу синтеза САУ сушильным агрегатом. Сушильный агрегат предназначен для выдачи просушенного сыпучего материала заданной влажности. Главными технологическими управляемыми переменными являются производительность и влажность продукта на выходе агрегата. Кроме того, для поддержания процесса сушки в оптимальном режиме требуется поддерживать правильные значения и других, вспомогательных технологических параметров.

В процессе работы сушильного агрегата на него действуют не только главная управляющая величина (подача газа) и возмущение (так называемая «производительность по входу», то есть скорость подачи влажного сыпучего материала в печь), но и другие воздействия. Это подача воздуха для поддержания правильной температуры сушильного агента (горячего воздуха с примесью продуктов сгорания), а также влажность подаваемого материала, которая может меняться в некоторых пределах. Кроме того, подача воздуха, необходимого для оптимального горения газовой горелки, разрежение внутри барабана и другие. Главные технологические параметры определяют существо работы объекта управления по его прямому назначению, а вспомогательные технологические параметры обеспечивают оптимальное его функционирование.

Для успешного управления процессом сушки нужно, в первую очередь, выбрать главные управляемые переменные и главные управляющие воздействия и учесть главные возмущения. Функционально-технологическую схему объекта управления можно представить в виде, показанном на рисунке 6.13, где сплошными стрелками показаны главные технологические переменные, а пунктирными – вспомогательные.

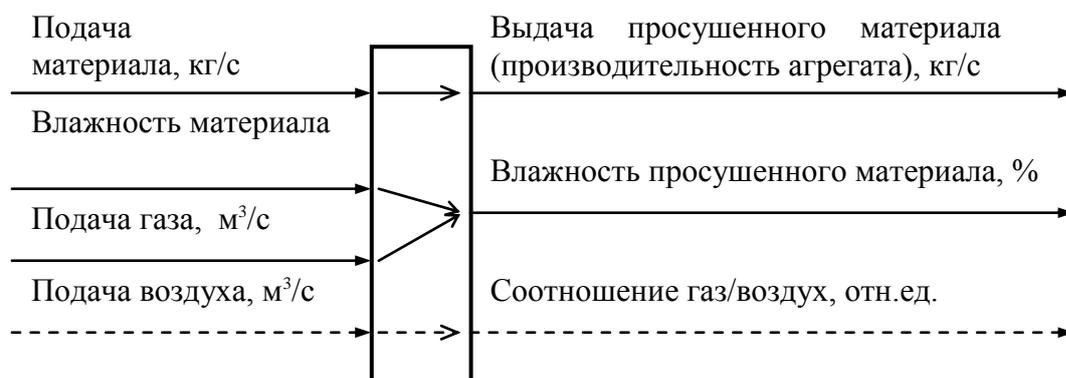


Рисунок 6.13 – Функционально-технологическая схема объекта

Обычно сушилка находится в технологической цепи, и поэтому её производительность определяется объемом материала, подаваемого на сушку предыдущими технологическими процессами. При работе в автономном режиме производительность сушилки задается оператором. Поэтому с точки зрения управления непосредственно процессом сушки подача материала, а, следовательно, и жестко связанная с ней производительность сушилки не поддается внутреннему регулированию. Все остальные процессы должны подстраиваться под заданную извне производительность сушилки.

Отсюда следует, что производительность сушилки, или скорость подачи материала в сушильный агрегат, является возмущением для всех внутренних систем управления, обеспечивающих непосредственно функционирование сушилки. Таким образом, главная технологическая входная величина и главная технологическая выходная переменная являются с точки зрения управления непосредственно процессом сушки возмущениями.

Аналогична ситуация и с влажностью материала на входе сушилки. Она определяется предыдущими технологическими процессами, не может регулироваться при управлении непосредственно сушильным агрегатом, и поэтому также является возмущением с точки зрения процесса управления сушкой.

В результате, сушильный агрегат, как объект управления влажностью материала на выходе, может быть представлен функционально-структурной схемой, приведенной на рисунке 6.14, где обозначено:  $Q_m$  – подача материала, кг/с;  $Q_g$  – подача газа, м<sup>3</sup>/с;  $Q_v$  – подача воздуха, м<sup>3</sup>/с;  $Vl_{вх}$  – влажность материала на входе, %;  $Vl_{вых}$  – влажность материала на выходе, %;  $\alpha$  – соотношение газ/воздух, отн. ед.

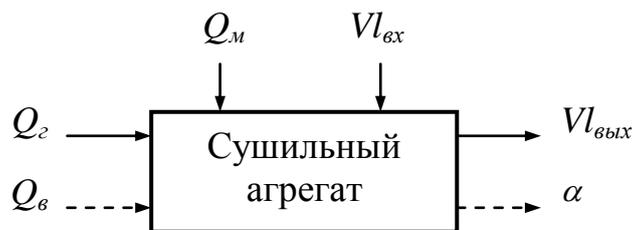


Рисунок 6.14 – Функционально-структурная схема объекта

Если сушильный агрегат находится в середине технологической цепи, то САУ может проектироваться в соответствии со структурной схемой, показанной на рисунке 6.15, где 1 – задатчик  $(Q_m)^\circ$ ; 2 – регулятор  $Q_m$ ; 3 – исполнительный механизм регулятора  $Q_m$ ;  $P$  – производительность сушильного агрегата; 4 – задатчик  $(Vl_{вых})^\circ$ ; 5 – элемент сравнения  $(Vl_{вых})^\circ$  и  $Vl_{вых}$ ; 6 – регулятор  $Vl_{вых}$ ; 7 – исполнительный механизм регулятора  $Vl_{вых}$ ; 8 – датчик  $Vl_{вых}$ ; 9 – за-

датчик  $\alpha^\circ$ ; 10 – элемент сравнения  $\alpha^\circ$  и  $\alpha$ ; 11 – регулятор  $\alpha$ ; 12 – исполнительный механизм регулятора  $\alpha$ ; 13 – датчик  $\alpha$ .

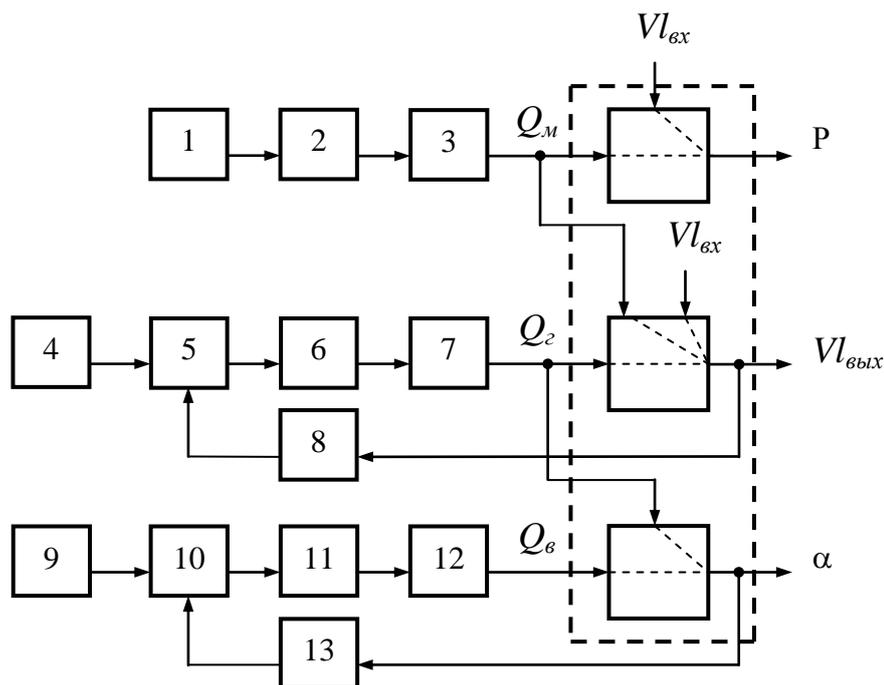


Рисунок 6.15 – Структурная схема САУ

Из рисунка 6.15 следует, что управление сушильным агрегатом осуществляется с помощью трех САР:

- разомкнутая САР производительности сушильного агрегата;
- замкнутая САР влажности материала на выходе;
- замкнутая САР соотношения газ/воздух.

Если сушильный агрегат находится в начале технологической цепи или работает автономно, то можно с помощью системы автоматического регулирования задавать производительность агрегата с учетом испаряемой влаги.

На рисунке 6.16 приведена структурная схема разомкнутой САР с управлением по возмущению, а на рисунке 6.17 – структурная схема замкнутой САР с управлением по отклонению. При этом на рисунках 6.16 и 6.17 обозначено: 14 – датчик  $Vl_{вх}$ ; 15 – датчик  $Vl_{вых}$ ; 16 – элемент сравнения; 17 – датчик  $P$ .

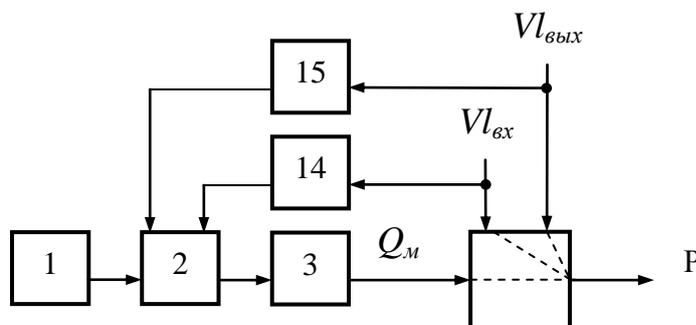


Рисунок 6.16 – Структурная схема разомкнутой САР с управлением по возмущению

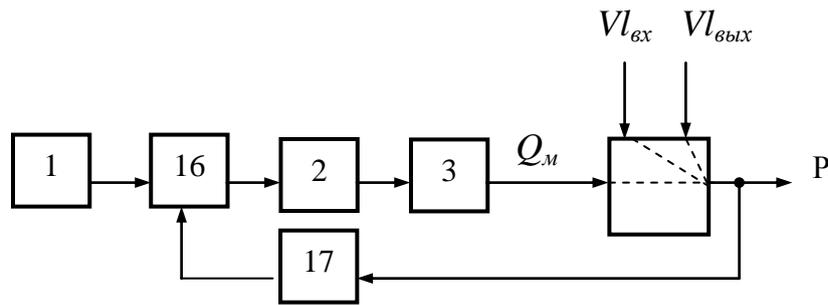


Рисунок 6.17 – Структурная схема замкнутой САР с управлением по отклонению

Итак, сушильный агрегат представляет собой многомерный многосвязный объект. Система управления сушильным агрегатом может быть построена в виде иерархической структуры, состоящей из параллельно, одновременно работающих и связанных САР. Внешней, по отношению к процессу сушки, является САР производительности, задание для которой определяется оператором или технологией. Остальные САР обеспечивают качество процесса сушки. Главная из них обеспечивает требуемую влажность материала на выходе, а вспомогательная оптимизирует процесс горения и сушки. Для осуществления согласованного действия систем автоматического регулирования вспомогательную САР соотношения газ/воздух выполняют более быстродействующей по сравнению с основной САР влажности.

*Пример 6.9.* Вернемся к разработанному в примере 6.4 алгоритму управления частотой вращения двигателя постоянного тока. Особенность полученного алгоритма управления состоит в том, что для его практического осуществления необходимо знать выражение для момента сопротивления  $M'_n(\omega)$ . В технических приложениях функция  $M'_n(\omega)$ , как правило, неизвестна, то есть имеет место *начальная неопределенность*.

Однако имеется возможность построения таких законов управления, практическое осуществление которых не требует полной информации о структуре функции  $M'_n(\omega)$  и ее параметрах. Такая возможность основана на использовании принципа управления по ускорению.

Будем считать, что в системе измеряется угловое ускорение  $\dot{\omega}$ . Это означает, что в каждый момент времени нам известно численное значение функции  $\varepsilon(\omega, M) = \dot{\omega}$ . Используем эту информацию следующим образом.

Момент  $M$  должен быть таким, чтобы при любом  $t > 0$  выполнялось равенство  $\dot{\omega} = \varepsilon^*$ . Возможны две ситуации:

$$\text{если } M = \begin{cases} M^*, & \text{тогда } \varepsilon^*(\omega) - \dot{\omega} = 0; \\ M^* + \Delta M, & \text{тогда } \varepsilon^*(\omega) - \dot{\omega} \neq 0. \end{cases} \quad (6.58)$$

Во второй ситуации величину  $M$  необходимо изменить таким образом, чтобы  $\Delta M \rightarrow 0$ , тогда  $(\varepsilon^*(\omega) - \dot{\omega}) \rightarrow 0$ . Это означает, что необходимо регулировать момент  $M$  в зависимости от рассогласования, равного  $(\varepsilon^*(\omega) - \dot{\omega})$ .

Такое регулирование можно осуществить с помощью следящего контура ускорения, структурная схема которого показана на рисунок 6.18.

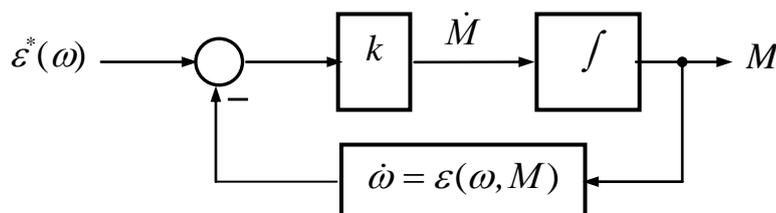


Рисунок 6.18 – Структурная схема следящего контура

В данной схеме входным сигналом является переменная  $\varepsilon^*(\omega)$ , соответствующая требуемому угловому ускорению и вычисляемая по формуле

$$\varepsilon^*(t) = \lambda(\omega^\circ - \omega(t)). \quad (6.59)$$

Эта переменная сравнивается с фактическим ускорением  $\dot{\omega}$ , и по рассогласованию  $(\varepsilon^*(\omega) - \dot{\omega})$  вычисляется скорость изменения момента  $\dot{M}$ . Коэффициент пропорциональности  $k$  характеризует усиление в контуре ускорения. Момент  $M$  получается после интегрирования переменной  $k(\varepsilon^* - \dot{\omega})$ . Понятно, что в данном случае  $M \neq M^*$ . Однако при определенных условиях разность  $(M^* - M)$  может быть сделана пренебрежимо малой.

Рассмотрим процесс управления переменной  $M$ . В соответствии со структурой, показанной на рисунке 6.18, дифференциальное уравнение для момента имеет вид:

$$\dot{M} + k\varepsilon(\omega, M) = k\varepsilon^*(\omega, M). \quad (6.60)$$

Подставив в (6.60) выражение для переменной  $\varepsilon$ , получим:

$$\dot{M} + \frac{kM}{J} = k\varepsilon^*(\omega) + \frac{kM'_H}{J}. \quad (6.61)$$

Обозначим через  $M_1$  составляющую момента, которая обусловлена величиной  $\varepsilon^*$ , а через  $M_2$  – составляющую, обусловленную действием  $M'_H$ . Опреде-

лим из уравнения (6.61) передаточные функции для  $M_1$  и  $M_2$  соответственно по ускорению  $\varepsilon^*$  и моменту  $M'_H$ :

$$\begin{cases} W_1(p) = \frac{k}{p + \frac{k}{J}}; \\ W_2(p) = \frac{\frac{k}{J}}{p + \frac{k}{J}}. \end{cases} \quad (6.62)$$

Пусть  $\varepsilon^* = const$ , тогда установившееся значение составляющей  $M_1$  будет равно

$$M_1(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} W_1(p) \varepsilon^* = J \varepsilon^*. \quad (6.63)$$

Если  $\omega \neq 0$ , то с учетом того, что  $M'_H(\omega) = C \text{sign} \omega$ , момент  $M'_H(\omega) = C = const$ . Поэтому установившееся значение  $M_2$  равно

$$M_2(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} W_2(p) M'_H = C. \quad (6.64)$$

На основании формул (6.63) и (6.64) определим установившееся значение вращательного момента:

$$M(\infty) = J \varepsilon^* + C. \quad (6.65)$$

Поскольку  $\varepsilon^* = \lambda(\omega^\circ - \omega)$ , то вместо (6.65) можно записать равенство

$$M(\infty) = \lambda J (\omega^\circ - \omega) + C. \quad (6.66)$$

Сравнивая (6.66) и полученное ранее выражение

$$M^*(\omega) = \lambda J (\omega^\circ - \omega) + M'_H(\omega), \quad (6.67)$$

приходим к заключению, что установившееся значение момента  $M$ , определенное по уравнению (6.65), имеет те же компоненты, что и  $M^*(\omega)$ , определяемое по выражению (6.67).

Таким образом, можно сделать вывод о том, что решение уравнения (6.67) с помощью следящего контура ускорения принципиально приводит к такому же результату, как и алгоритм компенсационного типа. В обоих случаях вращающий момент имеет две компоненты: одна расходуется на отработку отклонения  $(\omega^\circ - \omega)$ , а другая – на преодоление сил сопротивления. Различие между этими законами управления проявляется лишь в количественном отношении. Это различие может быть сделано пренебрежимо малым путем выбора значения  $k$ .

Анализ показывает, что обеспечение требуемой точности реализации кинематического закона достигается за счет высокого усиления в контуре ускорения  $k$ . При этом существенно, что алгоритм управления по ускорению придает замкнутой системе такие свойства, при которых она не теряет устойчивости даже в случае неограниченного увеличения усиления ( $k \rightarrow \infty$ ). В этом можно убедиться, рассмотрев дифференциальное уравнение замкнутой системы.

Процессы в системе описываются уравнениями

$$\begin{cases} J\dot{\omega} = M - M'_n(\omega); \\ \dot{M} = k(\varepsilon^* - \dot{\omega}); \\ \varepsilon^* = \lambda(\omega^\circ - \omega). \end{cases} \quad (6.68)$$

Исключим из этих уравнений момент  $M$ . Для этого продифференцируем обе части первого уравнения по времени и подставим затем в полученное равенство выражение для производной  $\dot{M}$  из второго уравнения. Пусть  $\omega \neq 0$ . Тогда производная  $\frac{d(M'_n(\omega))}{dt} = 0$ . Выполняя с учетом этого указанные преобразования, получим дифференциальное уравнение замкнутой системы в виде:

$$\ddot{\omega} + \frac{k}{J}\dot{\omega} + \lambda\frac{k}{J}\omega = \lambda\frac{k}{J}\omega^\circ. \quad (6.69)$$

Отсюда следует, что устойчивость системы имеет место при любых  $k > 0$ , в том числе и при  $k \rightarrow \infty$ .

Таким образом, при проектировании системы имеется возможность назначать такое численное значение коэффициента усиления  $k$ , при котором с помощью алгоритма

$$\begin{cases} \dot{M} = k(\varepsilon^* - \dot{\omega}); \\ \varepsilon^*(\omega) = \lambda(\omega^\circ - \omega) \end{cases} \quad (6.70)$$

можно с большой точностью вычислять требуемый момент  $M \approx M^*$ . В этом случае будет достигнута также высокая степень приближения фактического процесса  $(\omega(t) \rightarrow \omega^\circ)$  к желаемому  $(\omega^*(t) \rightarrow \omega^\circ)$ .

Особенность алгоритма (6.70) заключается в том, что для его реализации нет необходимости знать вид нелинейной функции  $M'_n(\omega)$  и ее параметры, так как для вычисления  $M$  используется ускорение  $\dot{\omega}$ , то есть численное значение функции  $\varepsilon(\omega, M)$ , в которую входит нелинейная зависимость  $M'_n(\omega)$ .

*Пример 6.10.* Необходимо исследовать робастную устойчивость системы, характеристический полином которой имеет вид:

$$G(p) = p^4 + 3p^3 + \alpha p^2 + \beta p + \gamma.$$

Коэффициенты полинома равны:  $4 \leq \alpha \leq 5$ ;  $2 \leq \beta \leq 3$ ;  $1 \leq \gamma \leq 2$ . Следовательно,  $A = \{a: a_0 = 1; a_1 = 3; 4 \leq a_2 \leq 5; 2 \leq a_3 \leq 3; 1 \leq a_4 \leq 2\}$ .

Так как  $n = 4$ , то достаточно исследовать следующие полиномы Харитонова:

$$G_1(p) = \bar{a}_0 p^4 + \bar{a}_1 p^3 + \underline{a}_2 p^2 + \underline{a}_3 p + \bar{a}_4 = p^4 + 3p^3 + 4p^2 + 2p + 2;$$

$$G_2(p) = \bar{a}_0 p^4 + \underline{a}_1 p^3 + \underline{a}_2 p^2 + \bar{a}_3 p + \bar{a}_4 = p^4 + 3p^3 + 4p^2 + 3p + 2.$$

Поскольку коэффициенты полиномов положительны, то согласно критерию Лъенара-Шипара для полинома  $G_1(p)$  исследуем определитель Гурвица вида

$$\Delta = \begin{vmatrix} \bar{a}_1 & \underline{a}_3 & 0 \\ \bar{a}_0 & \underline{a}_2 & \bar{a}_4 \\ 0 & \bar{a}_1 & \underline{a}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 24 - 4 - 18 = 2 > 0,$$

а для полинома  $G_2(p)$  – определитель вида

$$\Delta = \begin{vmatrix} \underline{a}_1 & \bar{a}_3 & 0 \\ \bar{a}_0 & \underline{a}_2 & \bar{a}_4 \\ 0 & \underline{a}_1 & \bar{a}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 36 - 9 - 18 = 9 > 0.$$

Исследуемая система робастно устойчива.

*Задача 6.1.* Определите тип и параметры регулятора, предназначенного для управления объектом с передаточной функцией  $W_0(p) = \frac{10}{p(p+1)(p+10)}$ .

*Задача 6.2.* Определите тип и параметры регулятора, предназначенного для управления объектом с передаточной функцией  $W_0(p) = \frac{5}{(p+1)(p+2)(p+4)}$ .

*Задача 6.3.* Определите тип и параметры регулятора, предназначенного для управления объектом с передаточной функцией  $W_0(p) = \frac{2}{p(p+1)(p+5)}$ .

*Задача 6.4.* Определите тип и параметры регулятора, предназначенного для управления объектом с передаточной функцией  $W_0(p) = \frac{1}{(p+1)^2(p+2)}$ .

*Задача 6.5.* Определите алгоритм работы нелинейного корректирующего звена, обеспечивающего изменение управляющего сигнала по следующему закону:

$$U_{\kappa} = \begin{cases} 1, & \omega t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right), \left(2\pi; \frac{5}{2}\pi\right), \dots \\ -1, & \omega t \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right), \left(3\pi; \frac{7}{2}\pi\right), \dots \\ U, & \omega t \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right), \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right), \dots \end{cases}$$

Сигнал на входе корректирующего звена равен  $U = \sin \omega t$ .

*Задача 6.6.* Определите алгоритм работы нелинейного корректирующего звена, обеспечивающего изменение управляющего сигнала по следующему закону:

$$U_{\kappa} = \begin{cases} U, & \omega t \notin ((0 + \varphi); (\pi - \varphi)), ((\pi + \varphi); (2\pi - \varphi)), \dots \\ U_m, & \omega t \in ((0 + \varphi); (\pi - \varphi)), ((\pi + \varphi); (2\pi - \varphi)), \dots \end{cases}$$

Сигнал на входе корректирующего звена равен  $U = U_m \sin \omega t$ .

*Задача 6.7.* Определите алгоритм работы нелинейного корректирующего звена, обеспечивающего изменение управляющего сигнала по следующему закону:

$$U_{\kappa} = \begin{cases} 0,5, & \omega t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right), \left(2\pi; \frac{5}{2}\pi\right), \dots \\ -0,2, & \omega t \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right), \left(3\pi; \frac{7}{2}\pi\right), \dots \\ U, & \omega t \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right), \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right), \dots \end{cases}$$

Сигнал на входе корректирующего звена равен  $U = \sin \omega t$ .

*Задача 6.8.* Определите алгоритм работы нелинейного корректирующего звена, обеспечивающего изменение управляющего сигнала по следующему закону:

$$U_{\kappa} = \begin{cases} U, & \omega t \notin ((0 + \varphi); (\pi - \varphi)), ((\pi + \varphi); (2\pi - \varphi)), \dots \\ U_0, & \omega t \in ((0 + \varphi); (\pi - \varphi)), ((\pi + \varphi); (2\pi - \varphi)), \dots \end{cases}$$

Сигнал на входе корректирующего звена равен  $U = U_m \sin \omega t$ , а  $U_0 = 1,2U_m$ .

*Задача 6.9.* Исследовать робастную устойчивость замкнутой системы, если передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{k}{s(T^2 p^2 + 2\xi Tp + 1)},$$

а множество возможных значений параметров равно:  $0,1 \leq k \leq 1$ ;  $0,1 \leq T \leq 0,5$ ;  $0,1 \leq \xi \leq 0,5$ .

*Задача 6.10.* Исследовать робастную устойчивость замкнутой системы, если передаточная функция разомкнутой системы имеет вид  $W(p) = \frac{k}{(Tp+1)^3}$ , а множество возможных значений параметров равно:  $0,5 \leq k \leq 2$ ;  $1 \leq T \leq 2$ .

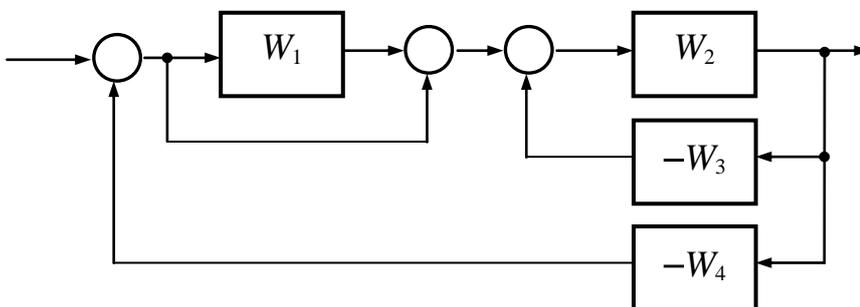
*Задача 6.11.* Исследовать робастную устойчивость замкнутой системы, характеристическое уравнение которой имеет вид  $p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + 0,5 = 0$ , а множество возможных значений коэффициентов равно:  $1 \leq a_1 \leq 2$ ;  $0,5 \leq a_2 \leq 1,5$ .

*Задача 6.12.* Исследовать робастную устойчивость замкнутой системы, характеристическое уравнение которой имеет вид  $p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0$ , а множество возможных значений коэффициентов равно:  $1 \leq a_1 \leq 2$ ;  $0,5 \leq a_2 \leq 1,5$ ;  $0,2 \leq a_3 \leq 0,5$ .

*Задача 6.13.* Исследовать робастную устойчивость замкнутой системы, характеристическое уравнение которой имеет вид  $p^4 + a_1 p^3 + 2p^2 + 3p + a_4 = 0$ , а множество возможных значений коэффициентов равно:  $1 \leq a_1 \leq 2$ ;  $0,2 \leq a_4 \leq 0,5$ .

*Задача 6.14.* Исследовать робастную устойчивость замкнутой системы, характеристическое уравнение которой имеет вид  $p^4 + a_1 p^3 + 2p^2 + a_3 p + 1 = 0$ , а множество возможных значений коэффициентов равно:  $1 \leq a_1 \leq 2$ ;  $0,2 \leq a_3 \leq 0,5$ .

*Задача 6.15.* Исследовать робастную устойчивость системы, структурная схема которой показана на рисунке.



Передаточные функции элементов системы имеют вид  $W_1(p) = \frac{k}{p}$ ;  
 $W_2(p) = \frac{5}{p(Tp+1)}$ ;  $W_3(p) = 0,2$ ;  $W_4(p) = 0,5$ , а множество возможных значений параметров равно:  $0,2 \leq k \leq 1$ ;  $0,1 \leq T \leq 0,5$ .

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 7

### САУ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

*Пример 7.1.* Структурная схема исследуемой системы представлена на рисунке 7.1, где  $x(t)$  – полезный сигнал,  $r(t)$  – помеха,  $y(t)$  – управляемая переменная.

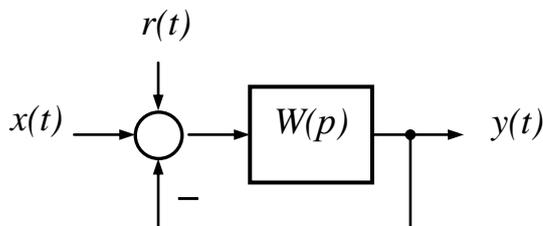


Рисунок 7.1 – Структурная схема исследуемой САУ

Передаточная функция  $W(p) = \frac{k}{p}$ , полезный сигнал равен нулю, а помеха представляет собой случайный сигнал со спектральной плотностью  $S_r(\omega) = N$ . Определим дисперсию ошибки, вызванной действием помехи.

Вначале определим передаточную функцию замкнутой системы

$$H(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} = \frac{k}{p + k} \quad (7.1)$$

и определим квадрат модуля её КЧХ

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{k^2}{k^2 + \omega^2}. \quad (7.2)$$

Спектральная плотность управляемой переменной, вызванная действием помехи (фактически спектральная плотность ошибки при нулевом полезном сигнале), и дисперсия ошибки равны

$$S_y(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_r(\omega) = \frac{k^2}{k^2 + \omega^2} N, \quad (7.3)$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k^2 N}{k^2 + \omega^2} d\omega = \frac{kN}{2}. \quad (7.4)$$

*Пример 7.2.* Рассматриваем систему, показанную на рисунке 7.1. Полагаем, что  $r(t) = 0$ , а полезный сигнал равен  $x(t) = vt + x^\circ(t)$ , где  $x^\circ(t)$  – случайный процесс с корреляционной функцией  $R_x(\tau) = \sigma_x^2 \exp(-\alpha\tau)$ .

Вначале определим установившуюся ошибку, обусловленную детерминированной составляющей  $m_x(t) = vt$  полезного сигнала:

$$\varepsilon_{уст} = \lim_{p \rightarrow 0} H_\varepsilon(p) F_m(p). \quad (7.5)$$

Учитывая, что  $H_\varepsilon(p) = \frac{p}{p+k}$ , а  $F_m(s) = \frac{v}{p}$ , получим  $\varepsilon_{уст} = \frac{v}{k}$ .

Спектральная плотность  $S_x(\omega)$  случайной составляющей  $x^\circ(t)$  полезного сигнала находится как преобразование Фурье корреляционной функции:

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau = \frac{2\alpha\sigma_x^2}{\omega^2 + \alpha^2}. \quad (7.6)$$

Заметим, что  $T_k = 1/\alpha$  является интервалом (временем) корреляции случайного процесса  $x^\circ(t)$  на уровне  $1/e$ . С другой стороны, параметр  $\alpha$  равен ширине энергетического спектра случайного процесса  $x^\circ(t)$  на уровне 0,5, то есть  $\frac{S_x(\omega = \alpha)}{S_x(\omega = 0)} = 0,5$ .

После нахождения спектральной плотности случайной составляющей динамической ошибки

$$S_\varepsilon(\omega) = |H_\varepsilon(j\omega)|^2 S_x(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega^2 + k^2} \cdot \frac{2\alpha\sigma_x^2}{\omega^2 + \alpha^2} \quad (7.7)$$

находим дисперсию динамической ошибки

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_\varepsilon(\omega) d\omega = \frac{\alpha\sigma_x^2}{\alpha + k}. \quad (7.8)$$

Средний квадрат динамической ошибки с учетом детерминированной и случайной составляющих полезного сигнала определяется как сумма

$$\varepsilon_{уст}^2 + \sigma_\varepsilon^2 = \frac{v^2}{k^2} + \frac{\alpha \sigma_x^2}{\alpha + k}. \quad (7.9)$$

Из полученного выражения следует, что при заданных параметрах  $\alpha$ ,  $v$  и  $\sigma_x^2$  входного сигнала уменьшение динамической ошибки достигается путем увеличения коэффициента усиления  $k$ , то есть путем снижения инерционности системы.

*Пример 7.3.* В рассмотренной ранее системе полагаем, что  $x(t) = vt$ , а в качестве помехи  $r(t)$  рассматриваем белый шум со спектральной плотностью  $S_r(\omega) = N$ . Тогда  $S_y(\omega) = |H(j\omega)|^2 N$ , и после проведения необходимых преобразований находим  $\sigma_\varepsilon^2 = \frac{N \cdot k}{2}$ . Из полученного результата следует, что для уменьшения влияния помехи необходимо снижать коэффициент усиления  $k$ , то есть повышать инерционность системы.

Квадрат суммарной ошибки определяется следующим выражением:

$$\varepsilon^2 = \varepsilon_{уст}^2 + \sigma_\varepsilon^2 = \frac{v^2}{k^2} + \frac{N \cdot k}{2}. \quad (7.10)$$

С использованием формулы (7.10) можно построить график зависимости  $\varepsilon^2 = \varepsilon^2(k)$ , примерный вид которого показан на рисунке 7.2.

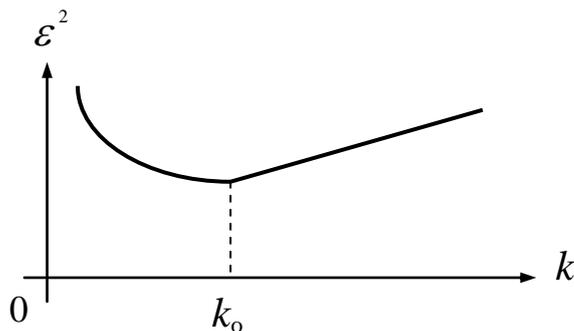


Рисунок 7.2 – График зависимости  $\varepsilon^2 = \varepsilon^2(k)$

Из приведенного графика следует, что существует оптимальное значение параметра  $k$ , обеспечивающее минимум суммарной ошибки. После дифференцирования  $\varepsilon^2$  и приравнивая к нулю производной

$$\frac{d\varepsilon^2}{dk} = -\frac{2v^2}{k^3} + \frac{N}{2} = 0, \quad (7.11)$$

находим

$$k_0 = \sqrt[3]{\frac{4v^2}{N}}. \quad (7.12)$$

Выбирая  $k = k_0$ , мы тем самым решаем задачу оптимизации системы по параметру  $k$ .

*Пример 7.4.* Теперь положим, что при принятой в примере 3 модели помехи полезный сигнал представляет собой центрированный случайный процесс ( $m_x = 0$ ) с корреляционной функцией  $R_x(\tau) = \sigma_x^2 \exp(-\alpha\tau)$ .

С учетом уже полученных ранее результатов имеем:

$$\varepsilon^2 = \frac{\alpha\sigma_x^2}{\alpha + k} + \frac{Nk}{2}. \quad (7.13)$$

График зависимости  $\varepsilon^2 = \varepsilon^2(k)$  здесь имеет вид, близкий к графику, показанному на рисунке 7.2. Однако имеется и существенное отличие, которое заключается в следующем. В предыдущем примере при  $k = 0$  имели  $\varepsilon^2 = \infty$ . В данном примере при  $k = 0$  имеем  $y(t) \equiv 0$ , а дисперсия динамической ошибки конечна и равна

$$\sigma_\varepsilon^2 = M\{(y(t) - x(t))^2\} = \sigma_x^2. \quad (7.14)$$

После дифференцирования  $\varepsilon^2$  по параметру  $k$  можно определить точку минимума квадрата ошибки из условия  $\frac{d\varepsilon^2}{dk} = 0$ . Полученное при этом оптимальное значение  $k_0$  обеспечивает наилучшие показатели функционирования САУ при заданных моделях изменения полезного сигнала и помехи.

*Задача 7.1.* На входе звена с передаточной функцией  $W(p) = \frac{k}{Tp + 1}$  имеет место случайный процесс в виде белого шума с интенсивностью  $N_0$ . Определите спектральную плотность выходной переменной.

*Задача 7.2.* На входе звена с передаточной функцией  $W(p) = \frac{k}{Tp + 1}$  имеет место случайный процесс со спектральной плотностью  $S(\omega) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$ . Определите спектральную плотность выходной переменной.

*Задача 7.3.* На входе звена с передаточной функцией  $W(p) = \frac{k}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2}$  имеет место случайный процесс в виде белого шума с интенсивностью  $N_0$ . Определите спектральную плотность выходной переменной.

*Задача 7.4.* На входе звена с передаточной функцией  $W(p) = \frac{k}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2}$  имеет место случайный процесс со спектральной плотностью  $S(\omega) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$ . Определите спектральную плотность выходной переменной.

## РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Бесекерский В.А. Теория систем автоматического управления. – СПб.: Профессия, 2003.
2. Дорф Р., Бишоп Р. Современные системы управления. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002.
3. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т. 1: Линейные системы: Учебное пособие. – М.: Физматлит, 2003.
4. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т. 2: Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы: Учебное пособие. – М.: Физматлит, 2003.
5. Комиссарчик В.Ф. Автоматическое регулирование технологических процессов: Учебное пособие. – Тверь: ТвГТУ, 2001.
6. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики в теории автоматического управления: Учебное пособие для вузов. – М.: Машиностроение, 2004.
7. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник для вузов / Под ред. Н.Д. Егупова. – М.: МВТУ им. Н.Э. Баумана, 2000.
8. Наладка средств автоматизации и автоматических систем регулирования: Справ. пособие / Под ред. А.С. Ключева. – М.: Энергоатомиздат, 1989.
9. Резников В.А. Теория автоматического управления: Конспект лекций для студентов заочного отделения. – Донецк: ИПШ «Наука і освіта», 2011.
10. Резников В.А. Проектирование и наладка систем управления: Конспект лекций для студентов заочного отделения. – Донецк: ИПШ «Наука і освіта», 2011.