

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до проведення практичних занять з курсу
"ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО УПРАВЛІННЯ"

ЧАСТИНА II

Для студентів, що навчаються за напрямками
6.050201 "Системна інженерія" (СУА)
6.050202 "Автоматизація та
комп'ютерно-інтегровані технології" (АУП)
(для денної та заочної форм навчання)

Розглянуто
на засіданні кафедри
автоматики й телекомунікацій
Протокол № 11 від 22.10.2010.

Затверджено на засіданні
навчально-видавничої ради
ДонНТУ
Протокол № 5 від _____

УДК 62-52 (071)

Методичні вказівки до проведення практичних занять за курсом "Теорія автоматичного управління", частина 2 (для студентів, що навчаються за напрямами 6.050201 "Системна інженерія" (СУА) і 6.050202 "Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології" (АУП) денної й заочної форм)/ Укл.: Р.В. Федюн, В.А. Попов, Т.В. Найдьонова - Донецьк: ДонНТУ, 2010.- 80 с.

Приведено вправи з методикою рішення найбільш важливих і таких що часто зустрічаються на практиці задач, по аналізу показників якості САУ, синтезу й корекції лінійних САУ, а також задач по аналізу нелінійних систем різними методами.

Укладачі:

Р.В. Федюн, доц.

В.О. Попов, доц.

Т.В. Найдьонова, ас.

Рецензент

О.І. Секірін, доц.

Відповідальний за випуск

В.І. Бессараб, зав. каф.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 9

ПОБУДОВА ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ В САУ ЗА ДОПОМОГОЮ БОМ ТА НАБЛИЖЕНИМИ МЕТОДАМИ. ВИЗНАЧЕННЯ ПОКАЗНИКІВ ЯКОСТІ.

Перехідною функцією $h(t)$ називають зміну вихідної величини $y(t)$ в часі, що виникає після подачі на вхід одиничного стрибкоподібного сигналу при нульових початкових умовах.

Перехідна функція може бути задана графічно або аналітично. Аналітичний вираз функції $h(t)$ для конкретного елемента можна знайти, розв'язуючи його диференціальне рівняння при

$$x(t) = 1(t) \quad \text{и} \quad y(-0) = y'(-0) = y''(-0) \dots = y^{(n-1)}(-0) = 0$$

Ця умова означає, що вихідна величина $y(t)$ і її похідні до $(n-1)$ -го порядку безпосередньо перед подачею стрибкоподібного сигналу дорівнюють нулю.

Перехідна функція $h(t)$ має дві складові: вимушену $h_e(t)$ і вільну складову $h_c(t)$.

Вимушена складова $h_e(t)$ перехідного процесу є частинним розв'язанням вихідного диференціального рівняння. При стрибкоподібному впливі вимушена складова дорівнює усталеному значенню вихідної величини, яке може бути визначене з диференціального рівняння:

$$h_e(t) = y(\infty) = \frac{b_m}{a_n}$$

Вільна складова $h_c(t)$ може бути знайдена як вирішення відповідного однорідного диференціального рівняння у вигляді:

$$h_c(t) = \sum_{k=1}^n C_k e^{p_k t}$$

де p_k - коріння характеристичного рівняння

C_k – постійні інтегрування, залежні від початкових умов.

Характеристичним рівнянням даного диференціального рівняння є рівняння алгебри, ступінь і коефіцієнти якого співпадають з порядком і коефіцієнтами лівої частини цього диференціального рівняння:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

Для лінійних систем діє наступне загальне правило: реакція $y(t)$ на неединичний стрибкоподібний сигнал $a \cdot 1(t)$ дорівнює перемноженню перехідної функції $h(t)$ на величину множника a , тобто $y(t) = ah(t)$.

В інженерній практиці графік перехідного процесу, що виникає в системі при стрибкоподібній зміні вхідного сигналу, будують звичайно приблизно за допомогою "метода трапецій" розробленого проф. В.В. Солодовніковим.

Основою даного наближеного методу є залежність:

$$h(t) = \frac{2}{p} \cdot \int_0^{\infty} P(\omega) \frac{\sin(\omega t)}{\omega} d\omega.$$

З умов зв'язку між імпульсною перехідною функцією $w(t)$ та частотною функцією системи:

$$w(t) = \frac{1}{p} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} W(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Спочатку будують ДЧХ $P(\omega)$ замкнутої системи (рис.9.1 а) та розбивають її на трапеції (рис.9.1 б). Таким чином, характеристику $P(\omega)$ логічно представити в вигляді алгебраїчної суми:

$$P(\omega) = \sum_{i=1}^k P_i(\omega)$$

Перехідна функція також може бути представлена в вигляді алгебраїчної суми:

$$h(t) = \sum_{i=1}^k h_i(t)$$

кожна з котрих визначається однією з трапецій $P_i(\omega)$.

Кожна трапеція має типову форму (рис. 9.1), характеризується трьома основними параметрами: висотою $P_i(0)$, частотою рівномірного пропускання та частотою пропускання (позитивності). Висоти $P_i(0)$ ураховуються із

відповідним знаком. Наприклад, на рис. 9.1. трапеція 1 входить в суму зі знаком плюс, а трапеції 2 і 3 – зі знаком мінус. Параметри трапеції заносять в табл. 9.1.

Побудову інших складових $h_i(t)$ (рис.9.1,в) здійснюють за допомогою спеціальних довідкових таблиць.

Перехідні функції $h_i(t)$ для реальних трапецій знаходять шляхом множення нормованих ординат $h_i(t)$ на висоту трапеції:

$$h_i = P_i(\omega) \cdot \bar{h}_i$$

та діленням безрозмірного часу \bar{t} на частоту ω_n :

$$t = \frac{\bar{t}}{\omega_n}.$$

Одержані таким чином дані зводяться в таблицю 9.1.

Після розрахунку всіх складових $h_i(t)$, будують їх графіки, а потім визначають перехідний процес $h(t)$ шляхом підсумовування ординат $h_i(t)$ (зі знаком), який буде відповідати вихідній характеристиці $P(\omega)$.

По графіку $h(t)$ визначають показники якості перехідного процесу.

Таблиця 9.1

Параметри трапеції та відповідні їм h -функції.

1	$P_1(0),$ $\chi = \omega_{d1} / \omega_{n1}$	t	
		h_1	
2	$P_2(0),$ $\chi = \omega_{d2} / \omega_{n2}$	t	
		h_2	
k	$P_k(0),$ $\chi = \omega_{dk} / \omega_{nk}$	t	
		h_k	

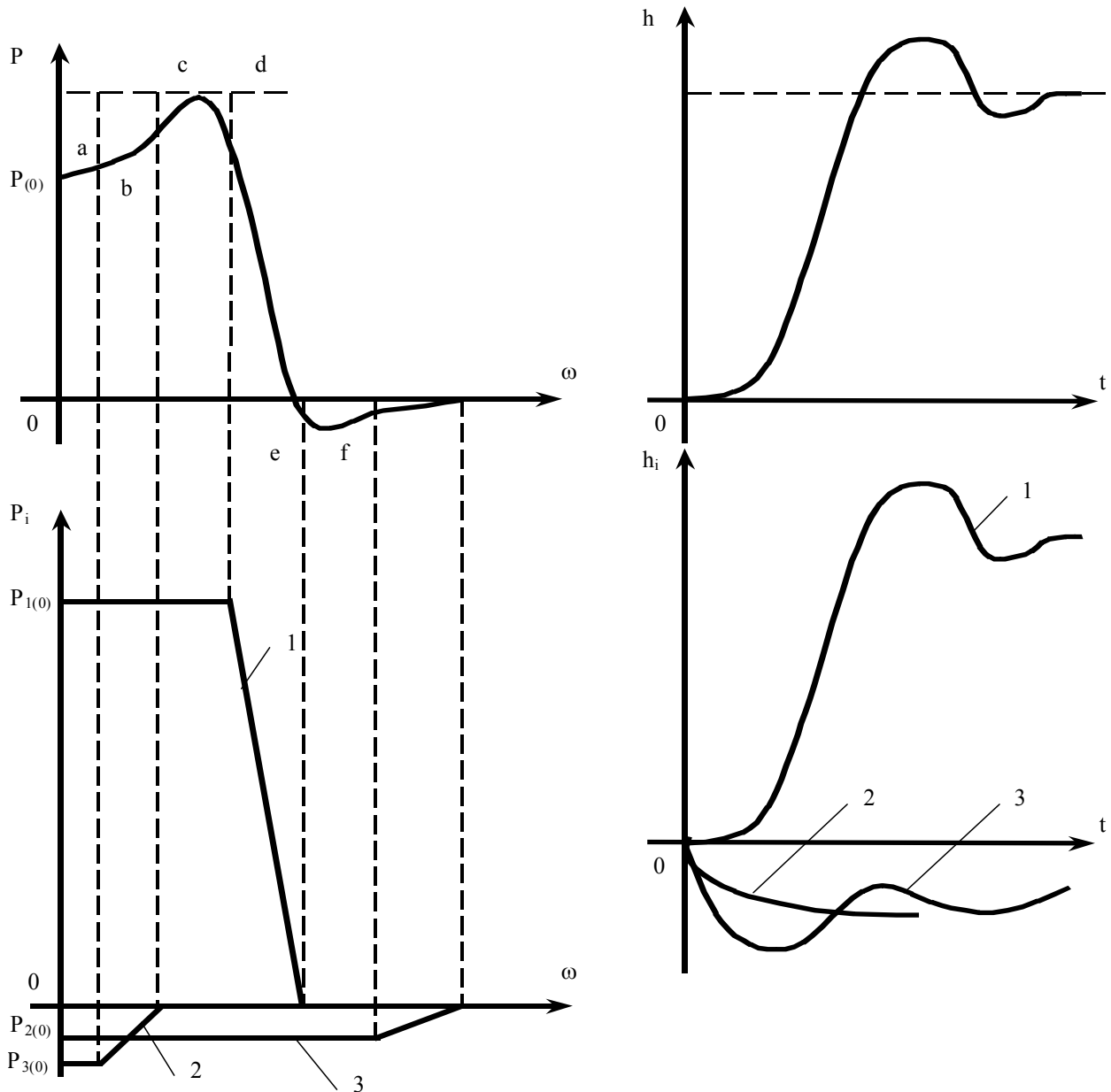


Рисунок 9.1 – Побудова графіка перехідного процесу методом трапецій.

Прямі показники якості визначають за графіком перехідного процесу, що виникає в системі при східчастому зовнішньому впливі. Непрямі показники якості визначають по частотних характеристиках системи або по розподілі коренів характеристичного рівняння. До особливої категорії показників якості відносять інтегральні оцінки, які обчислюють або безпосередньо по перехідній функції системи, або за коефіцієнтами передатної функції системи.

При самій загальній оцінці якості, насамперед, звертають увагу на форму перехідного процесу. Розрізняють наступні типові перехідні процеси: коливальний (1), аперіодичний з перерегулюванням (2), монотонний аперіодичний, (3).

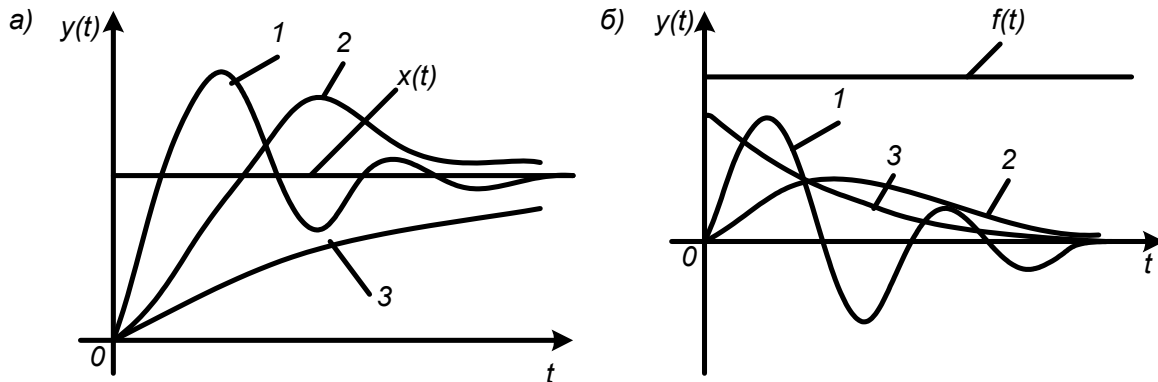


Рисунок 9.2. Типові перехідні процеси (а – за завданням; б – за збурюванням)

Кожний з типових перехідних процесів має свої переваги й недоліки, і переваги тій або іншій формі процесу роблять із урахуванням особливостей керованого об'єкта.

Перерегулювання σ - величина, рівна відношенню першого максимального відхилення y_m керованої величини $y(t)$ від її сталого значення $y(\infty)$ до цього сталого значення $y(\infty)$:

$$\sigma = \frac{y_m - y(\infty)}{y(\infty)} \cdot 100 = \frac{A_1}{y(\infty)} \cdot 100, \%$$

Для перехідних процесів, викликаних впливом, що обурює, $f(t)$ на вході ОУ, перерегулювання можна визначити як відношення першого негативного максимального відхилення A_2 до першого позитивного максимального відхилення A_1 :

$$\sigma = \frac{A_2}{A_1} \cdot 100 = \frac{A_2}{y_m - y(\infty)} \cdot 100, \%$$

Показник перерегулювання, що обчислюється по даній формулі для перехідних процесів по каналу збурювання, називають також **коливальністю**.

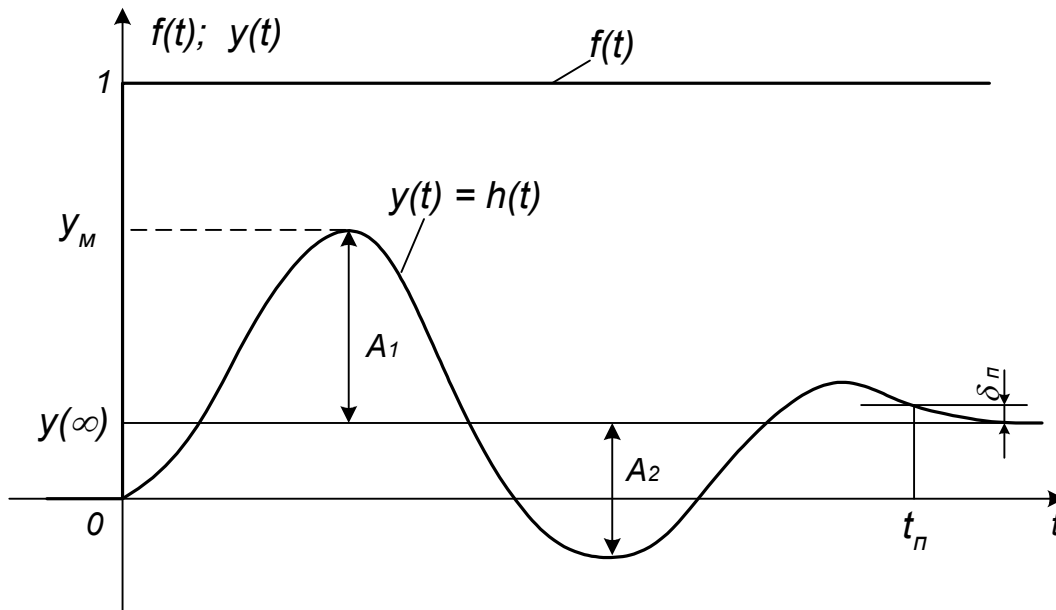


Рисунок 9.3. Прямі показники якості регулювання

Тривалість перехідного процесу (час регулювання) t_n – інтервал часу від моменту додатка східчастого впливу до моменту, після якого відхилення керованої величини $y(t)$ від її нового сталого значення $y(\infty)$ стають менше деякого заданого числа δ_n , тобто до моменту, після якого виконується умова

$$|y(t) - y(\infty)| \leq \delta_n.$$

У промисловій автоматичі величину δ_n звичайно приймають рівної 5% від сталого значення $y(\infty)$: $\delta_n = 0,05y(\infty)$.

При оцінці тривалості перехідних процесів, викликаних одиничним впливом, що обурює, $f(t)$ на вході об'єкта величину δ_n приймають 5% від значення передатного коефіцієнта об'єкта k_0 : $\delta_n = 0,05k_0$.

Ступінь загасання $\psi = \frac{A_1 - A_3}{A_1} = 1 - \frac{A_3}{A_1}$.

де A_1 й A_3 - сусідні максимальні відхилення одного знаку.

Коливальність N – число переходів керованої величини $y(t)$ через її стале значення $y(\infty)$ за час перехідного процесу t_n .

Додаткові часові показники якості:

- Час наростання t_n ;

- Час досягнення першого максимуму t_m ;
- Період загасаючих коливань $Tз$.

Ці показники разом з t_n характеризують швидкодію системи регулювання.

Приклади розв'язання задач

Задача 9.1.

Дано систему, що стежить, яка представлена на рис. 9.4. На вхід підсилювача 1 подається різниця між задаючим впливом g , і вихідною величиною y . Крім того, на підсилювач подається перша похідна задаючого впливу g' ; 2 - двигун, редуктор і виконавчий механізм. Система описується рівнянням

$$(Tp^2 + p + K)y(t) = (K\tau p + K)g(t). \quad (9.1)$$

Постійна часу $T = 5мс$, коефіцієнт підсилення по задаючому впливу $k = 40с^{-1}$, коефіцієнт підсилення по похідній задаючого впливу $K\tau = 0,8$. Знайти закон зміни вихідної величини y при відпрацьовуванні системою неузгодженості y_0 при відсутності задаючого впливу і нульової початкової швидкості.

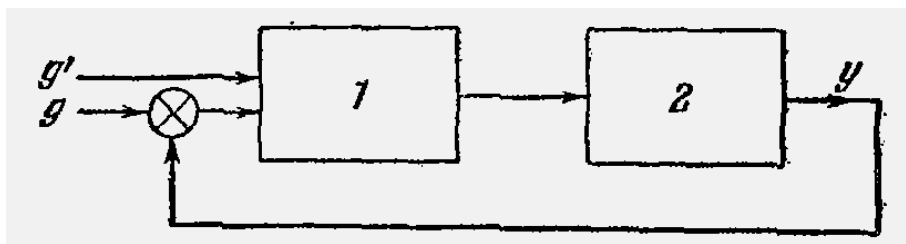


Рисунок 9.4. Структурна схема САУ що стежить

Рішення.

Диференціальне рівняння системи має вигляд

$$(Tp^2 + p + K)y(t) = 0 \text{ або } (0,005p^2 + p + 40)y(t) = 0. \quad (9.2)$$

$$\text{Характеристичне рівняння } 0,005p^2 + p + 40 = 0 \quad (9.3)$$

має два дійсних кореня: $p_1 = -55,3c^{-1}$, $p_2 = -144,7c^{-1}$.

Для випадку дійсних коренів рішення рівняння (9.2) має вигляд

$$y(t) = A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t} \quad (9.4)$$

де α_1 й α_2 - абсолютні значення коренів характеристичного рівняння.

Початкові умови:

$$\text{при } t = 0 \quad y = y_0, \quad y' = y'_0 = 0. \quad (9.5)$$

З (9.4) і (9.5) отримуємо

$$A_1 + A_2 = y_0, \quad -\alpha_1 A_1 - \alpha_2 A_2 = 0. \quad (9.6)$$

З (9.6) находимо

$$A_1 = \frac{\alpha_2 y_0}{\alpha_2 - \alpha_1}, \quad A_2 = \frac{\alpha_1 y_0}{\alpha_1 - \alpha_2} \quad (9.7)$$

Рішення задачі має вигляд, згідно (9.4) і (9.7),

$$y(t) = \frac{y_0}{\alpha_2 - \alpha_1} (\alpha_2 e^{-\alpha_1 t} - \alpha_1 e^{-\alpha_2 t}) 1(t),$$

або

$$y(t) = y_0 (1,619 e^{-55,3t} - 0,619 e^{-144,7t}) 1(t). \quad (9.8)$$

По рівнянню (9.8) на рис. 9.5 побудована крива перехідного процесу.

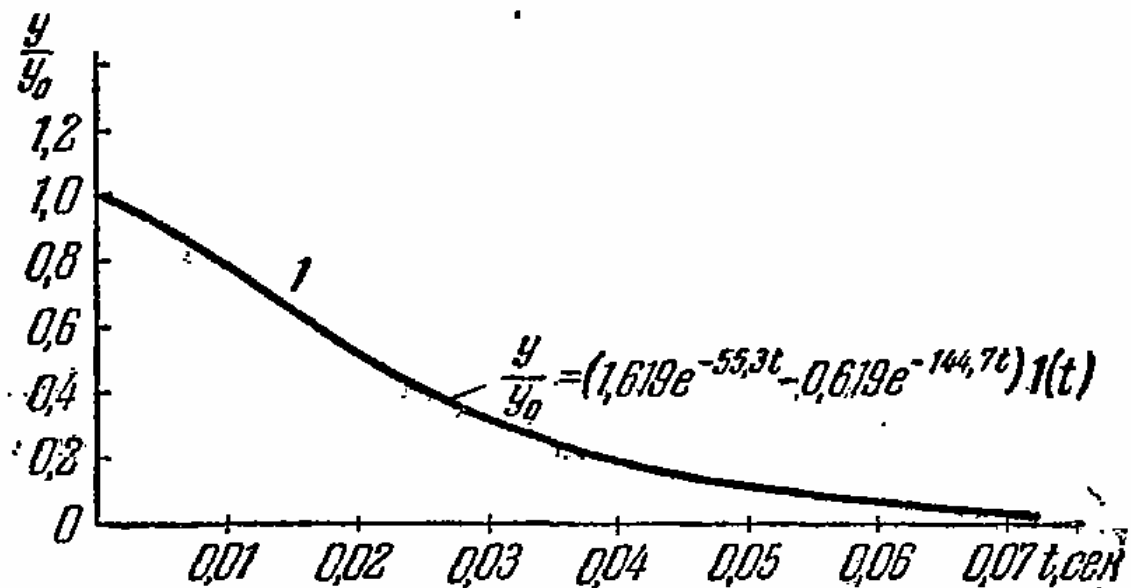


Рисунок 9.5 Крива перехідного процесу при відпрацьовуванні ненульових початкових умов

Задача 9.2.

Передаточна функція розімкнутої системи автоматичного регулювання

$$\text{дорівнює } W(p) = \frac{K}{p(1+Tp)} = \frac{20}{p(1+0,1p)}. \quad (9.9)$$

Знайти перехідну $h(t)$ й вагову $\omega(t)$ функції замкнутої системи.

Рішення.

Передаточна функція замкнутої системи з урахуванням (9.9) дорівнює

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1+W(p)} = \frac{K}{Tp^2 + p + K} = \frac{20}{0,1p^2 + p + 20} \quad (9.10)$$

Перехідна функція $h(t)$ являє собою реакцію системи на одиничний східчастий вплив $1(t)$.

Зображення $Y(p)$ вихідної величини $y(t)$ замкнутої системи при задаючому впливі $g(t)$, зображення якого дорівнює $G(p)$, являє собою при нульових початкових умовах добуток

$$Y(p) = \Phi(p)G(p).$$

Зображення одиничної східчастої функції по Карсону-Хевісайду дорівнює 1, а по Лапласу $\frac{1}{p}$. Тому перехідна функція $h(t)$ системи може бути отримана як результат зворотного перетворення по Карсону-Хевісайду передаточної функції замкнутої системи, тобто вираження (9.10), або як результат зворотного перетворення по Лапласу добутку

$$\frac{1}{p} \Phi(p) = \frac{20}{p(0,1p^2 + p + 20)}. \quad (9.11)$$

Для переходу від зображення (9.10) або (9.11) до шуканого оригіналу $h(t)$ необхідно знаменник зображення розкласти на множники. Для цього дорівнюємо знаменник (9.10) нулю:

$$Tp^2 + p + K = 0 \text{ або } 0,1p^2 + p + 20 = 0; \quad (9.12)$$

знайдемо корені рівняння (9.12):

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= -\gamma + j\lambda = -5 + j13,2c^{-1}, \\ p_2 &= -\gamma - j\lambda = -5 - j13,2c^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (9.13)$$

Далі можна записати знаменник вираження (9.10) у вигляді

$$0,1p^2 + p + 20 = 0,1(p - p_1)(p - p_2) = 0,1[p - (-\gamma + j\lambda)][p - (-\gamma - j\lambda)] = \quad (9.14)$$

$$= 0,1[(p + \gamma)^2 + \lambda^2] = 0,1[(p + 5)^2 + 13,2^2]$$

Тепер замість (9.11) отримаємо

$$\frac{1}{p} \Phi(p) = \frac{20}{0,1p[(p + 5)^2 + 13,2^2]} = \frac{200}{p[(p + 5)^2 + 13,2^2]}. \quad (9.15)$$

З таблиці зображень функцій по Лапласу вибираємо формулу, що відповідає вираженню (9.15):

$$\frac{1}{p[(p + \gamma)^2 + \lambda^2]} = \frac{1}{\gamma^2 + \lambda^2} + \frac{1}{\lambda\sqrt{\gamma^2 + \lambda^2}} e^{-\gamma t} \sin(\lambda t - \psi), \quad (9.16)$$

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{-\gamma}.$$

При підборі формул варто мати на увазі, що в наявних довідниках ці формули розташовуються в порядку зростання ступеню полінома від p у знаменнику зображення.

Для випадку дійсних і для випадку комплексних коренів завжди передбачаються окремі формули. Так, якби корені знаменника зображення (9.10) виявилися дійсними, варто було б замість формули (9.16) взяти табличну формулу

$$\frac{1}{p(p + \alpha)(p + \beta)} = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} - \frac{1}{\beta} e^{-\beta t} \right),$$

де α й β - абсолютні значення коренів.

Зіставляючи (9.15) і (9.16), отримуємо оригінал вираження (9.15), тобто перехідну функцію системи

$$h(t) = \Phi(p) = \left[\frac{200}{5^2 + 13,2^2} - \frac{200}{13,2\sqrt{5^2 + 13,2^2}} e^{-5t} \sin(13,2t + 69^\circ 15') \right] 1(t),$$

або

$$h(t) = [1 - 1,068e^{-5t} \sin(13,2t + 69^\circ 15')]l(t). \quad (9.17)$$

Зауваження.

Варто звернути увагу на обчислення кута ψ по формулі (9.16), тому що знаки у формулах для ψ , які є типовими для подібних виражень, записуються своєрідно. Знак чисельника у вираженні для тангенса ψ є знаком синуса ψ . Таким чином, формула для ψ містить вказівку на квадрант, у якому знаходиться цей кут. Це дозволяє звільнитися від подвійності у відповіді для ψ , яка обумовлена збігом тангенсів двох кутів, що відрізняються на π .

У розглянутому прикладі, де $\operatorname{tg}\psi = -\frac{13,2}{5} = -2,64$, із двох можливих значень ψ , рівних $-69^\circ 15'$ і $+110^\circ 45'$, варто взяти друге число, тому що вираження $\psi = \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{-\gamma} = \operatorname{arctg} \frac{13,2}{-5}$ вказує, що кут знаходиться в другому квадранті. У результаті з формули (9.16) отримуємо

$$\sin(\lambda t - \psi) = \sin(13,2t - 110^\circ 45') = -\sin(13,2t + 69^\circ 15'),$$

що й враховано при записі вираження (9.17).

Функція ваги $\omega(t)$ системи може бути знайдена як похідна перехідної функції (9.17) за часом. Функція ваги може бути знайдена й безпосередньо по передаточній функції (9.10), як її зворотне перетворення по Лапласу:

$$\omega(t) = L^{-1}[\Phi(p)] = L^{-1}\left[\frac{20}{0,1p^2 + p + 20}\right] = L^{-1}\left[\frac{200}{(p + 5)^2 + 13,2^2}\right], \quad (9.18)$$

або як зворотне перетворення по Карсону-Хевісайду добутку

$$p\Phi(p) = \frac{20p}{0,1p^2 + p + 20} = \frac{200p}{(p + 5)^2 + 13,2^2}. \quad (9.19)$$

Підбираємо з таблиць зображень функцій по Лапласу формулу, що відповідає (9.18):

$$\frac{1}{(p + \gamma)^2 + \lambda^2} = \frac{1}{\lambda} e^{-\gamma t} \sin \lambda t. \quad (9.20)$$

Згідно (9.15), (9.18) і (9.20) отримуємо функцію ваги системи

$$\omega(t) = 15,15e^{-5t} \sin 13,2t \cdot 1(t). \quad (9.21)$$

Задача 9.3.

По речовинній частотній характеристиці $P(\omega)$ системи регулювання (рис. 9.6) побудувати криву перехідного процесу при одиничному східчастому впливі й нульових початкових умовах.

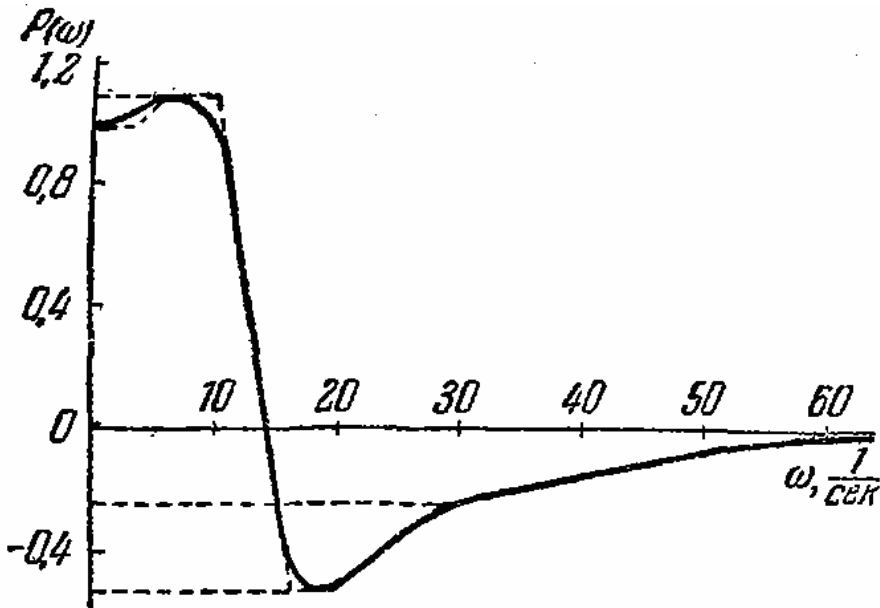


Рисунок 9.6. ДЧХ системи регулювання до задачі 9.3.

Рішення.

Крива $P(\omega)$ приблизно замінюється декількома трапецевидними кривими з таким розрахунком, щоб сума ординат трапецій дорівнювала ординаті дійсної частотної характеристики $P(\omega)$. У цьому випадку можна взяти чотири трапеції, які показані на рис. 9.7: одна з них позитивна, інші негативні. Кожна трапеція повинна мати типовий вигляд, показаний на рис. 9.8, тоді вона повністю визначається трьома числами: частотою пропущення ω_C , коефіцієнтом нахилу $\chi = \omega_d / \omega_C$ й висотою r .

Далі варто скористатися таблицями функцій $h(t_0)$.

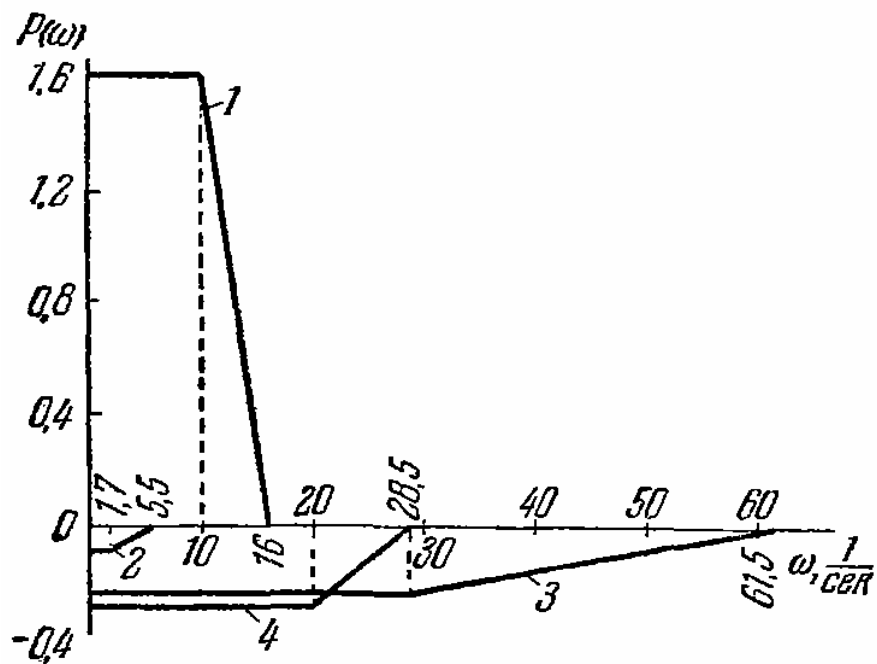


Рисунок 9.7. Розбивка ДЧХ на трапеції

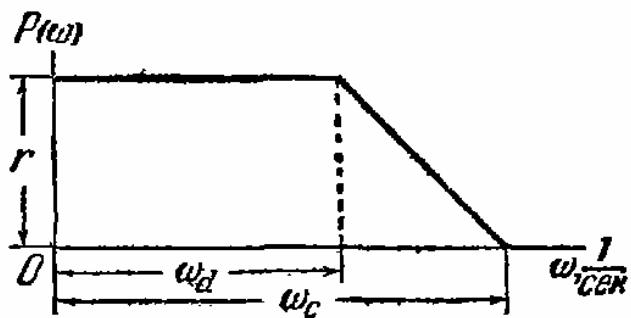


Рисунок 9.8 Параметри трапеції

Трапеції на рис. 9.7 мають параметри, які указані в табл. 1.

Таблиця 1

№ трапеции	1	2	3	4
$\chi = \frac{\omega_d}{\omega_c}$	0,62	0,31	0,46	0,70
$\omega_c, \text{сек}^{-1}$	16	5,5	61,5	28,5
r	1,62	-0,09	-0,24	-0,29

Функція $h(t_0)$ являє собою криву перехідного процесу системи, дійсна частотна характеристика якої — одинична трапеція, що має $r = +1$ і $\omega_C = 1 \text{ сек}^{-1}$. Табличні функції $h(t_0)$ приводяться для різних коефіцієнтів нахилу $0 < \chi < 1$, причому допускається інтерполяція, якщо χ лежить між двома табличними значеннями. Скорочена таблиця таких функцій дана в [4].

Візьмемо таблицю $h(t_0)$ функцій для $\chi = 0,62$ (коефіцієнт нахилу трапеції 1) і випишемо ряд значень часу t_0 і функції $h(t_0)$ (див. перші два рядки в табл. 2). Для одержання точок кривої $y(t)$ перехідного процесу, що відповідає неединичній трапеції, кожне значення функції $h(t_0)$ варто помножити на висоту трапеції r , а час t_0 розділити на частоту зрізу ω_C , тобто

$$y(t) = r \cdot h\left(\frac{t_0}{\omega_C}\right).$$

У третьому й четвертому рядках табл. 2 дані числа t і $y_1(t)$ для трапеції 1.

Аналогічно отримуємо $y_2(t)$, $y_3(t)$, $y_4(t)$ для інших трапецій (див. таблиці 3—5).

За даними таблиць 2 - 5 на рис. 9.9 побудовані графіки $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$, $y_4(t)$. Складаючи ординати цих кривих з урахуванням їх знаків, отримуємо на рис. 9.9 криву $y(t)$ перехідного процесу в заданій системі при одиничному східчастому впливі.

Таблиця 2

Трапеція 1

t_0	0	0,2	0,4	0,8	1,0	1,6	2,6	3,0	4,0
$h(t_0)$	0	0,10	0,20	0,40	0,50	0,75	1,04	1,11	1,16
$t, \text{сек}$	0	0,0125	0,025	0,050	0,0625	0,100	0,162	0,188	0,250
$y_1(t)$	0	0,17	0,33	0,65	0,81	1,21	1,68	1,80	1,88
t_0	4,4	4,8	5,4	6,0	7,0	7,8	9,0	10	
$h(t_0)$	1,15	1,12	1,07	1,01	0,95	0,94	0,96	1,00	
$t, \text{сек}$	0,275	0,300	0,337	0,375	0,438	0,488	0,562	0,625	
$y_1(t)$	1,86	1,82	1,73	1,64	1,54	1,52	1,56	1,62	

Таблиця 3

Трапеція 2

$t, \text{сек}$	0	0,109	0,218	0,364	0,546	0,728	0,822	1,09	1,27
$y_2(t)$	0	-0,022	-0,043	-0,067	-0,086	-0,096	-0,098	-0,096	-0,094

Таблиця 4

Трапеція 3

$t, \text{сек}$	0	0,0065	0,0163	0,026	0,0325	0,0488
$y_3(t)$	0	-0,043	-0,108	-0,163	-0,194	-0,25
$t, \text{сек}$	0,065	0,0813	0,0976	0,114	0,13	
$y_3(t)$	-0,271	-0,269	-0,254	-0,242	-0,235	

Таблиця 5

Трапеція 4

$t, \text{сек}$	0	0,014	0,028	0,042	0,070	0,105	0,133	0,176
$y_4(t)$	0	-0,064	-0,122	-0,467	-0,267	-0,328	-0,339	-0,314
$t, \text{сек}$	0,210	0,246	0,281	0,316	0,351	0,386	0,456	
$y_4(t)$	-0,284	-0,27	-0,27	-0,284	-0,296	-0,302	-0,290	

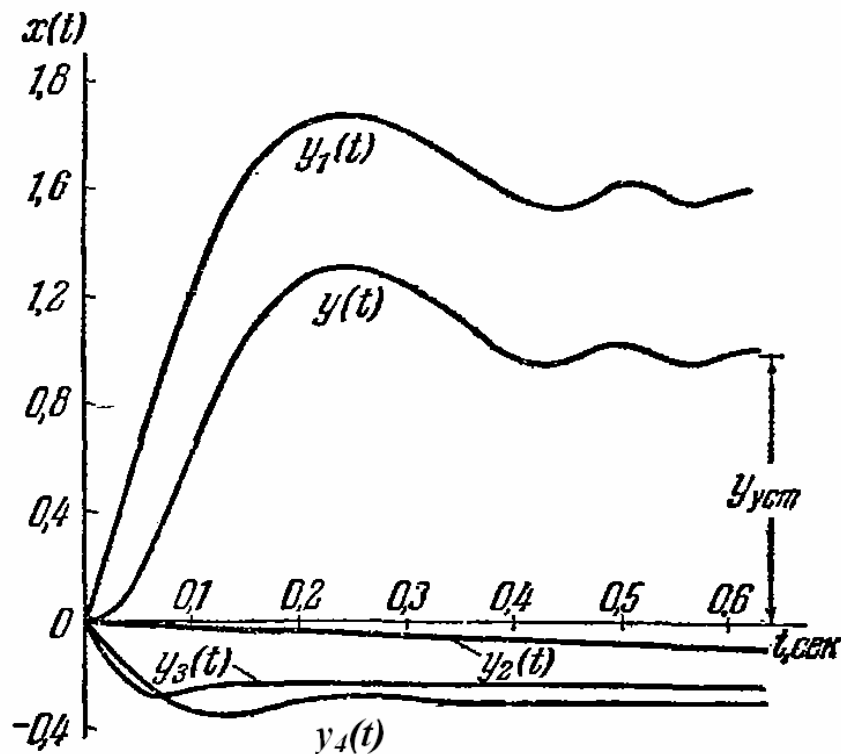


Рисунок 9.9. Отримання кривої переходного процесу до задачі 9.3.

Задача 9.4.

На рис. 9.10 зображена дійсна частотна характеристика замкнутої системи. Визначити орієнтовні значення перерегулювання й часу перехідного процесу.

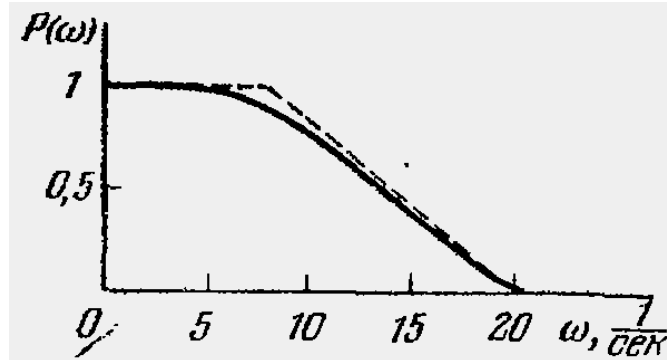


Рисунок 9.10. Дійсна частотна характеристика до задачі 9.4.

Рішення.

Інтервал істотних частот для ДЧХ $\omega_c = 20 \text{ с}^{-1}$. Це дає час перехідного процесу

$$\frac{\pi}{\omega_c} < t_{\Pi} < \frac{4\pi}{\omega_c}$$

або

$$0,157 \text{ сек} < t_{\Pi} < 0,628 \text{ сек}.$$

Перерегулювання $\sigma < 18\%$. (Опукла ДЧХ яка не має максимуму).

Для більш точного розрахунку необхідно звернутися до кривих, які приведені в [4]. Коефіцієнт нахилу дійсної характеристики (див. рис. 9.10) становить $\chi = 0.4$. Це дає $\sigma = 10\%$ й $t_{\Pi} = 0,35 \text{ сек}$.

Задача 9.5.

Визначити перерегулювання й час перехідного процесу для дійсної частотної характеристики, яка зображена на рис. 9.11.

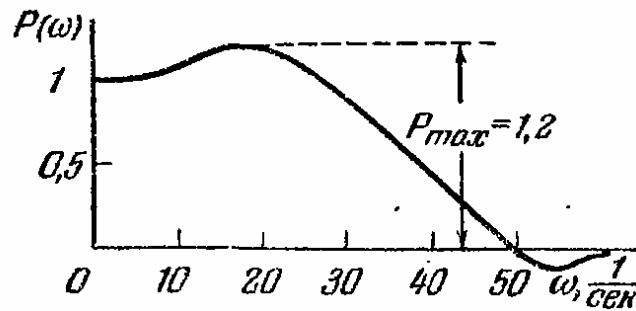


Рисунок 9.11. Дійсна частотна характеристика до задачі 9.5.

Рішення.

Високочастотну частину характеристики, що відповідає $P(\omega) < 0$, можна відкинути, тому що $P_{\min}(\omega) < 0.2$. Тоді перерегулювання в системі дорівнює

$$\sigma < \frac{1.18P_{max} - P(0)}{P(0)} = \frac{1.18 \cdot 1.2 - 1}{1} = 0,41 = 41\%.$$

Час перехідного процесу

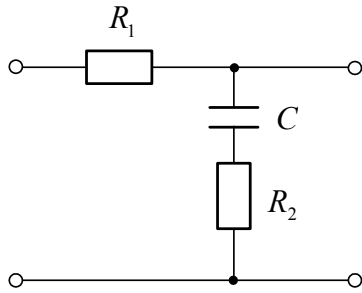
$$t_{II} > \frac{\pi}{\omega_c} = \frac{3,14}{50} = 0,0628 \text{ с.}$$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 10

КОРЕКЦІЯ САУ МЕТОДОМ ЛОГАРИФМІЧНИХ ЧАСТОТНИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Найбільш простим, наочним і добре розробленим методом синтезу коригувальних пристроїв - метод ЛЧХ. Синтез коригувальних пристроїв методом логарифмічних частотних характеристик (ЛЧХ) заснований на зв'язку перехідної характеристики із дійсною частотною характеристикою (ДЧХ) замкнутої системи й ДЧХ замкнутої системи із ЛЧХ розімкнутої системи. Завдяки такому зв'язку можна переходити від прямих показників якості до параметрів ДЧХ і від параметрів ДЧХ до параметрів ЛЧХ системи.

1. Інтегро-диференціююча ланка з перевагою інтегруючих властивостей.

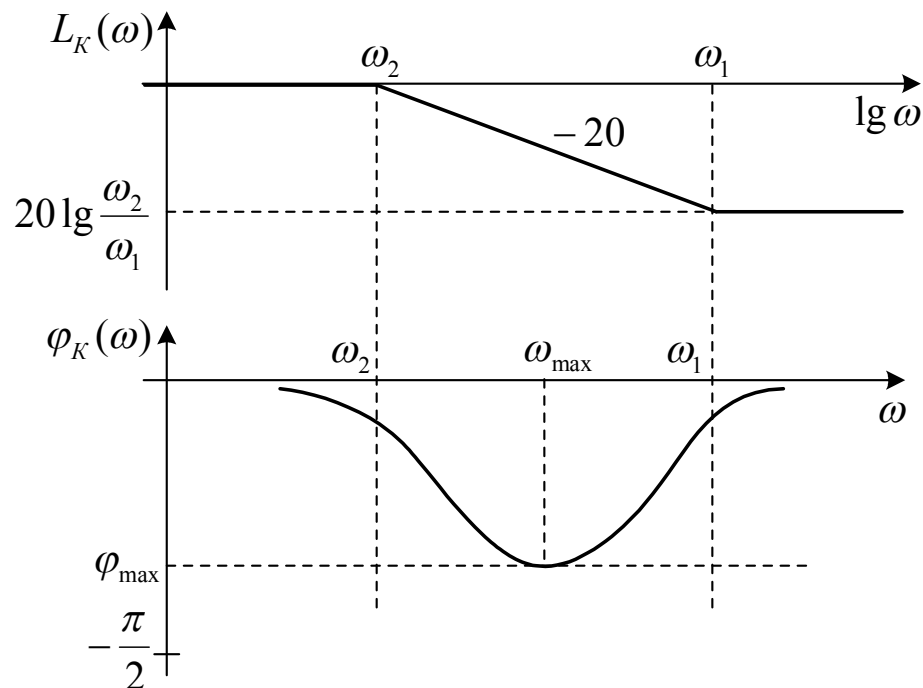


$$W_k(p) = \frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1}; \quad T_2 > T_1;$$

$$T_1 = R_2 C;$$

$$T_2 = (R_1 + R_2) C$$

Дана ланка використовується для корекції ВЧ частини частотної характеристики (подавлення високочастотних перешкод).



При включенні ланки в контур керування АЧХ в області високих частот опускається. Це дозволяє зменшити частоту зрізу не змінюючи загального передатного коефіцієнта системи, або збільшити коефіцієнт передачі не змінюючи частоту зрізу.

Фазочастотна характеристика завжди негативна, а максимальне фазове зрушення φ_{\max} менше 90° . Максимальне фазове зрушення має місце на частоті

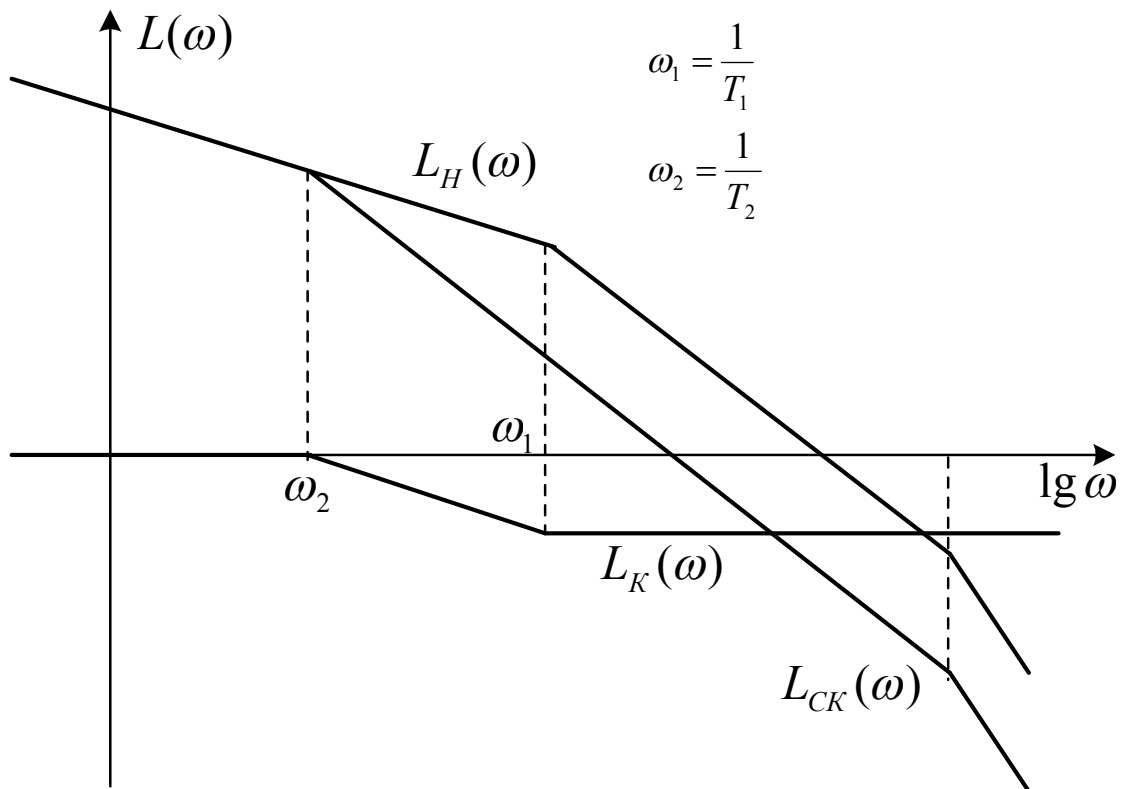
$$\omega_{\max} = \sqrt{\omega_1 \omega_2}.$$

Коригувальний пристрій створює додаткове відставання по фазі в певній області частот. Щоб це відставання не погіршувало запас стійкості частоти, що

сполучають, коригувального пристрою ω_1 і ω_2 повинні перебувати значно лівіше частоти зрізу скоректованої системи:

$$T_1 \approx (10 \div 20) / \omega_{CP}, \quad T_2 \approx (10 \div 20) k_p / \omega_{CP},$$

де k_p - необхідне з умов точності значення коефіцієнта передачі розімкнутого контуру.



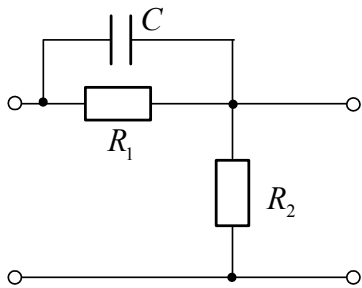
Процедура синтезу коригувального пристрою з відставанням по фазі (з перевагою інтегруючих властивостей) зводиться до наступних етапів:

- Побудувати ЛЧХ для некоректованої системи при коефіцієнті підсилення, який забезпечить необхідне значення коефіцієнта помилки.
- Визначити запас по фазі в некоректованій системі й, якщо він недостатній, виконати наступні етапи.
- Вибрати частоту, на якій буде забезпечуватися задане значення запасу по фазі, тобто частоту ω_{CP} , на якій амплітудна характеристика скоректованої системи буде перетинати рівень 0 дБ. (При цьому необхідно враховувати, що

на даній частоті коригувальний пристрій дасть додаткове фазове зрушення, яке дорівнює -5° .

- Частоту злому, що відповідає нулю коригувального пристрою ω_1 , вибрати на декаду лівіше нової частоти ω_{CP} , щоб гарантувати, що коригувальний пристрій додасть тільки -5° до результуючої фазової характеристики.
- Визначити частоту злому, що відповідає полюсу коригувального пристрою ω_2 графічно.

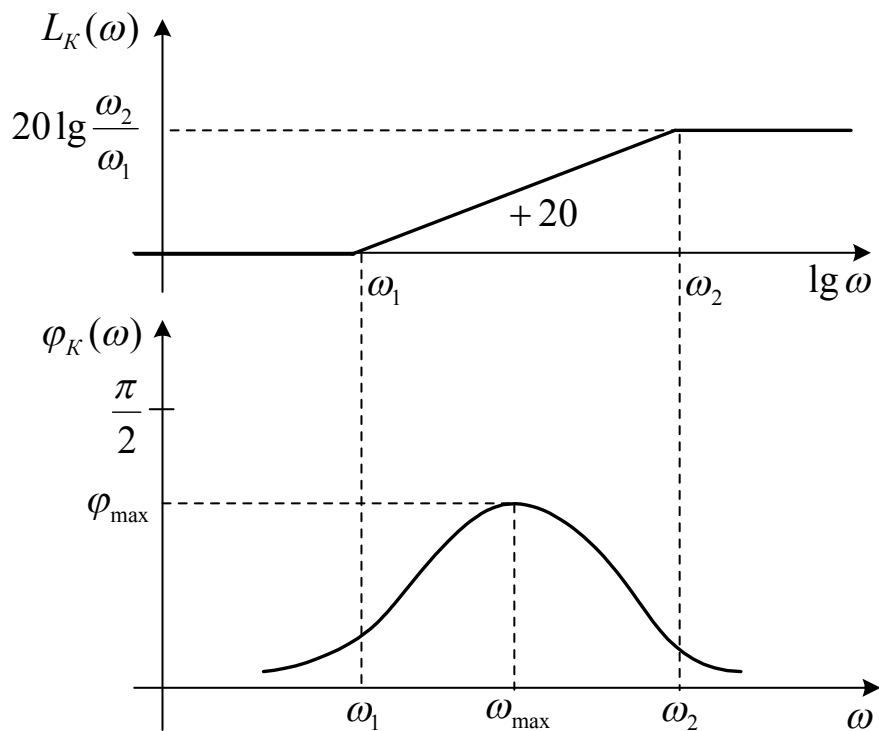
2. Інтегро-диференціююча ланка з перевагою диференціюючих властивостей.



$$W_k(p) = k \frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1}; \quad T_1 > T_2;$$

$$T_1 = R_1 C; \quad T_2 = k T_1$$

$$k = \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad (k < 1)$$



Пасивна інтегро-диференціююча ланка з перевагою диференціюючих властивостей подавляє низькі частоти й зменшує загальний коефіцієнт передачі

системи k . Тому що за умовою забезпечення заданої точності системи зменшення коефіцієнта передачі неприпустимо, то одночасно із включенням цього коригувального пристрою необхідно забезпечувати збереження коефіцієнта передачі системи на необхідному рівні.

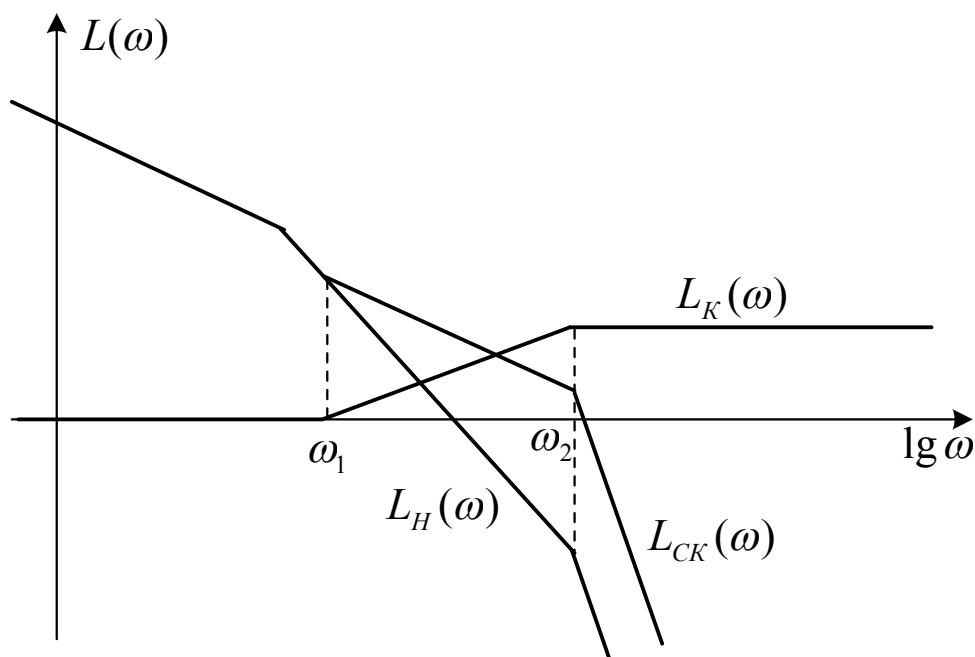
Ланка використовується для підняття високочастотної області АЧХ, крім того, як і у випадку з ланкою, що форсує, для створення випередження по фазі в певній області частот.

Максимальне фазове зрушення має місце на частоті $\omega_{\max} = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$:

$$\varphi_{\max} = \arctg \sqrt{T_1/T_2} - \arctg \sqrt{T_2/T_1}$$

Фазопереджувальні властивості тим сильніше, чим більше відношення T_1/T_2 . Але занадто більшим дане відношення не можна вибирати, тому що при цьому сильно послаблюється сигнал, що проходить через коригувальний пристрій. На практиці приймають $T_1/T_2 = 10 \div 50$. T_1 вибирають приблизно рівним найбільшій постійній часу незмінної частини системи T_M .

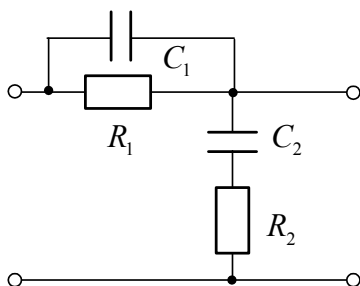
У тих випадках, коли найбільша постійна часу T_M перевищує інші на порядок і більше, або коли на вході системи високочастотні перешкоди, $T_1 < T_M$.



Синтез коригувального пристрою з випередженням по фазі (з перевагою диференціюючих властивостей) зводиться до наступних етапів:

- Оцінити запас по фазі в некоректованій системі за умови задоволення вимог до коефіцієнтів помилки.
- Визначити додаткове фазове зрушення $\varphi_m = \varphi_{ск} - \varphi_n$, яке створюватиме коригувальний пристрій, що вводять у систему. Він визначається як різниця між існуючим запасом стійкості по фазі φ_n й необхідним запасом по фазі $\varphi_{ск}$. Необхідний запас стійкості визначається або по заданому декременту загасання $\xi = 0,01 \cdot \varphi_{ск}$, або по величині перерегулювання.
- Обчислити параметр α по вираженню $\sin \varphi_m = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$.
- Обчислити $10 \lg \alpha$ й знайти частоту, при якій амплітудна характеристика некоректованої системи має значення $-10 \lg \alpha$ дБ. Оскільки на частоті ω_{max} коригувальний пристрій має підсилення $10 \lg \alpha$, то ця частота одночасно буде відповідати перетинанню амплітудною характеристикою скоректованої системи рівня 0 дБ - ω_{CP} .
- Обчислити значення полюсу $\omega_2 = \omega_{max} \sqrt{\alpha}$ й нуля $\omega_1 = \omega_2 / \alpha$.
- Побудувати частотні характеристики скоректованої системи, перевірити отримане значення запасу по фазі й, якщо необхідно, повторити попередні етапи. І, нарешті, для завершення синтезу компенсувати зменшення коефіцієнта підсилення за рахунок члена $1/\alpha$.

3. Інтегро-диференціююча ланка із властивостями смугового фільтра.



$$W_k(p) = \frac{(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_4 p + 1)};$$

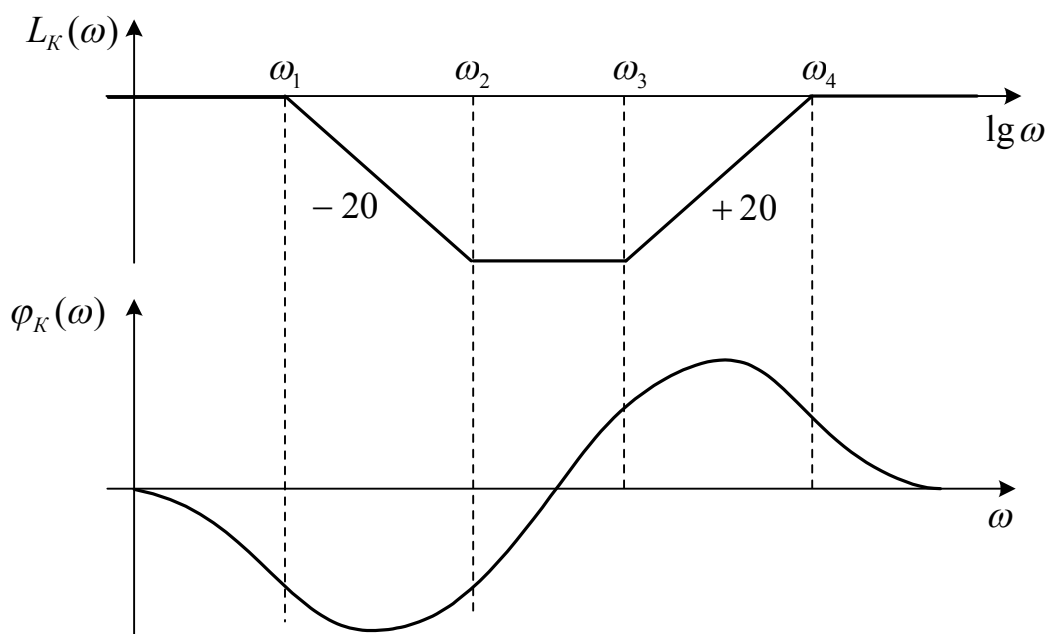
$$T_1 > T_2 > T_3 > T_4;$$

$$T_2 = R_1 C_1; \quad T_3 = R_2 C_2$$

$$\begin{cases} T_1 T_4 = T_2 T_3 \\ T_1 + T_4 = T_2 + T_3 (1 + R_1 / R_2) \end{cases}$$

В області НЧ - інтегруючі властивості.

В області ВЧ – диференціюючі властивості.



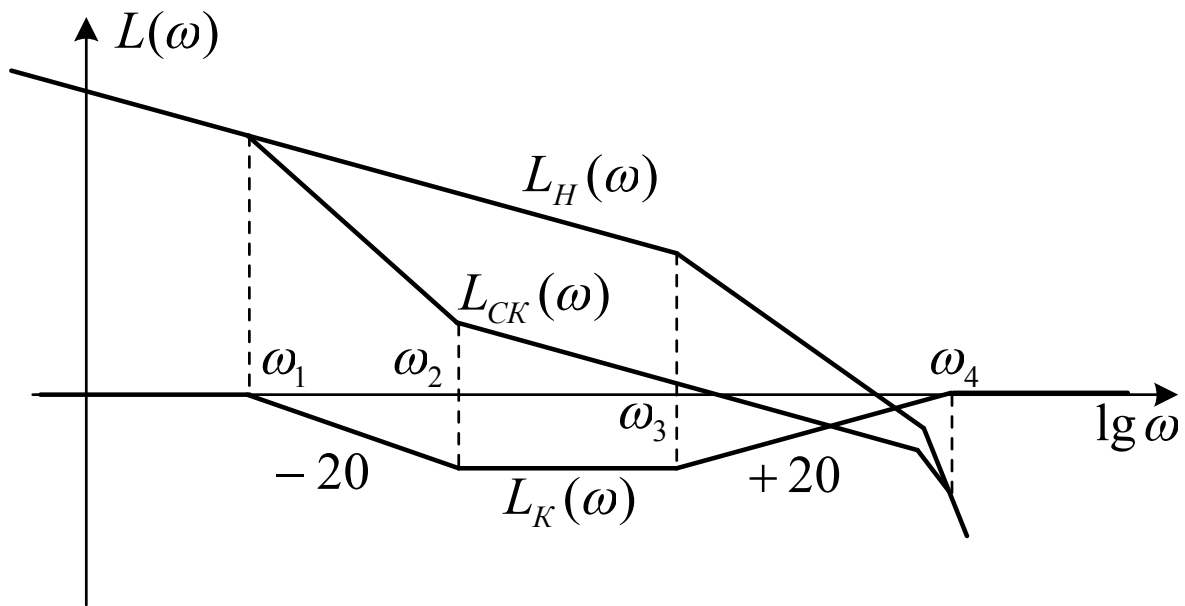
При включенні даної ланки в контур відбувається придушення СЧ. Це дозволяє збільшити загальний передатний коефіцієнт і частоту зрізу системи без погіршення перешкодозахищеності на високих частотах.

При виборі параметрів коригувального пристрою керуються наступними міркуваннями:

- частоти, що сполучають, відповідні постійним часу T_1 і T_2 так само, як і у ланки з перевагою інтегруючих властивостей, повинні бути менше частоти зрізу скоректованої системи. У цьому випадку, область частот, у якій пристрій вносить відставання по фазі буде лівіше частоти зрізу (як мінімум не зменшуватися запаси стійкості).

- постійну часу T_3 доцільно приймати рівною найбільшій постійній часу незмінної частини системи.

- частота зрізу скоректованої системи повинна перебувати між частотами, що сполучають, $1/T_3$ і $1/T_4$, тобто в області максимального випередження фаз, створюваного коригувальним пристроєм (для забезпечення максимального запасу стійкості по фазі).



Приклади розв'язання задач

Задача 10.1.

Необхідно визначити передаточну функцію послідовного коригувального пристрою з перевагою інтегруючих властивостей (корекція з відставанням по фазі):

$$W_k(p) = \frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1}, \quad T_2 > T_1.$$

До системи пред'являються наступні вимоги: коефіцієнт помилки по швидкості $k_v = 20$ й запас по фазі $\varphi_{зад} = 45^\circ$. Передаточна функція розімкнутої некоректованої системи має вигляд:

$$W(p) = \frac{k}{p(Tp + 1)}, \quad T = 0,5 \text{ с.}$$

Рішення.

ЛАЧХ некоректованої системи при $k = k_v$ має вигляд:

$$L_H(\omega) = 20 \lg k_v - 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{1 + T^2 \omega^2}$$

ЛФЧХ некоректованої системи має вигляд:

$$\varphi_H(\omega) = -90^\circ - \arctg T\omega$$

Логарифмічні частотні характеристики (ЛАЧХ і ЛФЧХ) некоректованої системи зображені суцільною лінією на рис.10.1.

У системі без корекції запас по фазі складає 20° (рис.10.1), тому він повинен бути збільшений. З урахуванням того, що коригувальний пристрій буде вносити додаткове фазове зрушення величиною -5° , як нову частоту зрізу ω'_c виберемо частоту, де ЛФЧХ некоректованої системи $\varphi(\omega) = -130^\circ$. ($|-180^\circ - (-130^\circ)| = 50^\circ = 45^\circ + 5^\circ$) У нашому випадку ця частота $\omega'_c = 1,5$ (з деяким запасом). На цій частоті посилення системи зменшиться на 20 дБ. На рис. 10.1 зображені асимптотичні амплітудні характеристики скоректованої й некоректованої систем. На частоті $\omega'_c = 1,5$ посилення зменшується на 20 дБ.

Таким чином, ми маємо

$$20 \text{ дБ} = 20 \lg \alpha,$$

звідки $\alpha = 10$.

Вибравши нуль коригувального пристрою так, щоб відповідна йому частота злому знаходилася на декаду лівіше частоти ω'_c ми отримаємо $\omega_1 = \omega'_c/10 = 0,15 \text{ c}^{-1}$ й відповідно для полюса $\omega_2 = \omega_1/10 = 0,015 \text{ c}^{-1}$. У підсумку скоректована система буде мати передаточну функцію

$$W_{ск}(p) = W(p)W_k(p) = \frac{k_v}{p(Tp + 1)} \cdot \frac{T_1p + 1}{T_2p + 1} = \frac{20}{p(0,5p + 1)} \cdot \frac{6,66p + 1}{66,6p + 1}.$$

Частотні характеристики скоректованої системи зображені на рис.10.1 штриховими лініями. З рис.10.1 видно, що коригувальний пристрій на середніх і високих частотах вносить ослаблення, за рахунок цього амплітудна характеристика перетинає рівень 0 дБ на більш низькій частоті, ніж без корекції, а це у свою чергу приводить до збільшення запасу по фазі. Помітимо також, що негативне фазове зрушення, яке створює коригувальний пристрій, майже повністю зникає на частоті ω'_c . Як перевірку можна обчислити запас по фазі $\Delta\varphi'$ на частоті ω'_c й переконатися, що він дорівнює 45° , як і було потрібно.

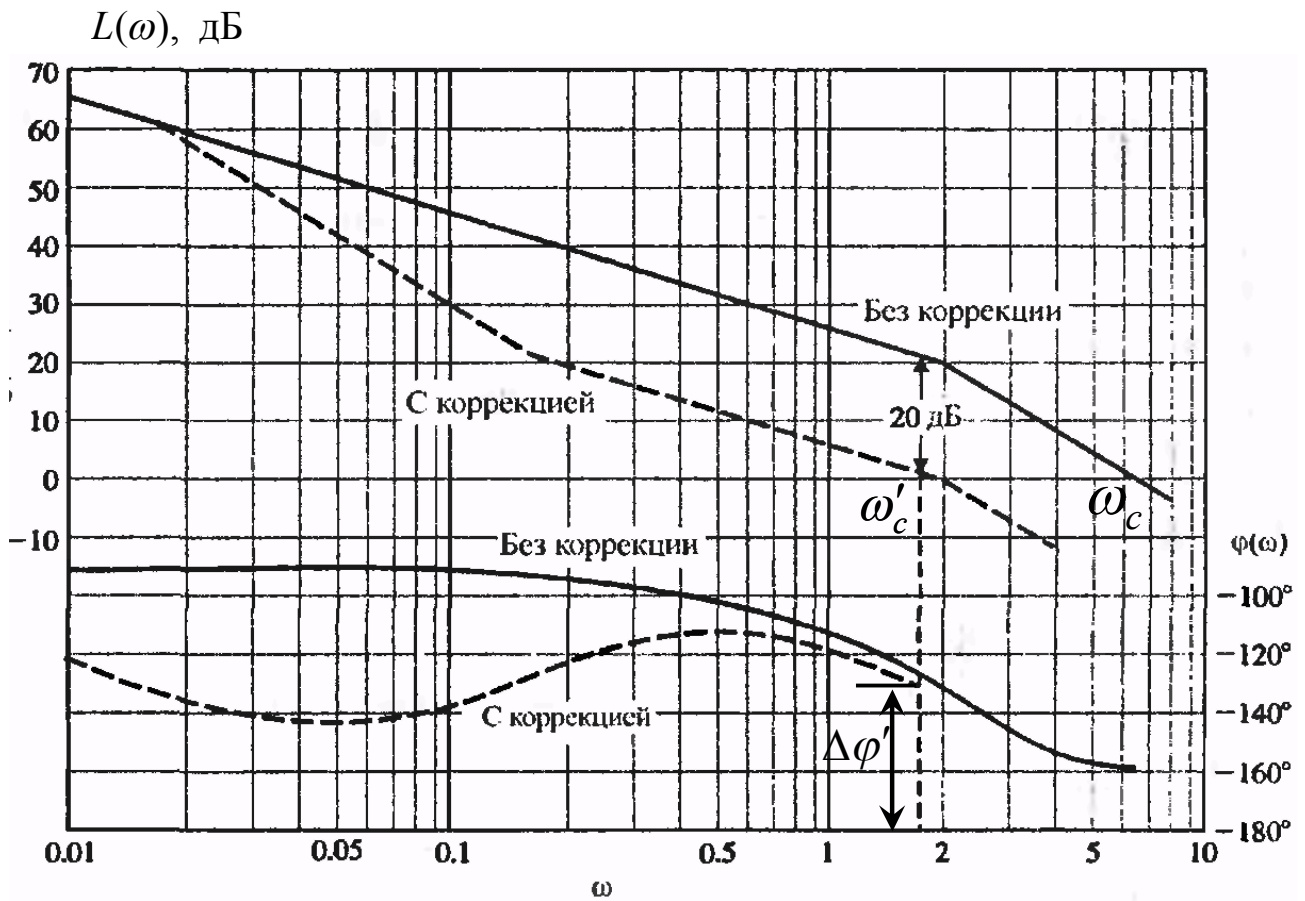


Рисунок 10.1. Синтез коригувального пристрою з відставанням по фазі методом ЛЧХ (до задачі 10.1)

Перехідні характеристики системи зображені на рис. 10.2. У скоректованій системі перерегулювання становить 25%, а час максимуму перехідної характеристики дорівнює 2 с, тому можна вважати, що якість системи цілком прийнятна.

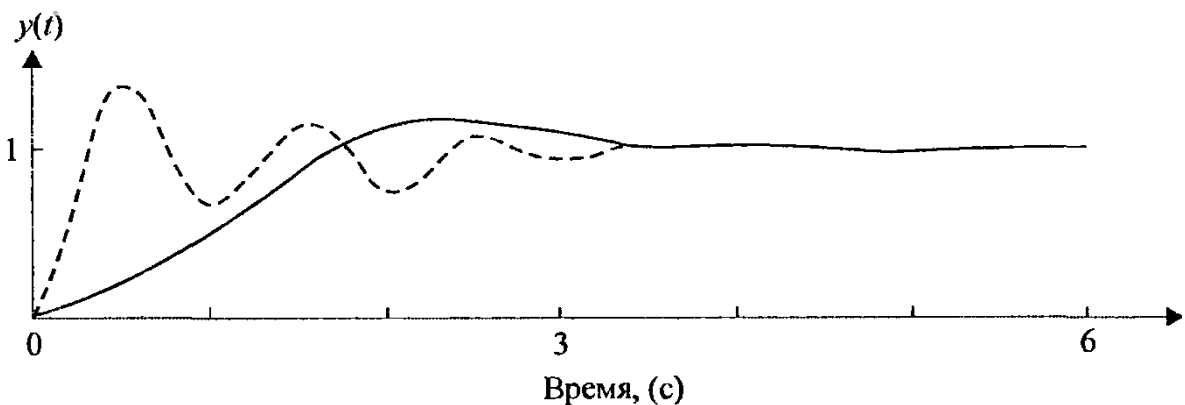


Рисунок 10.2. Перехідні характеристики некоректованої (штрихова лінія) і скоректованої (суцільна лінія) систем

Задача 10.2.

Необхідно визначити передаточну функцію послідовного коригувального пристрою з перевагою інтегруючих властивостей (корекція з відставанням по фазі):

$$W_k(p) = \frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1}, \quad T_2 > T_1.$$

До системи пред'являються наступні вимоги: коефіцієнт помилки по швидкості $k_v = 20$ й коефіцієнт загасання $\xi = 0,65$. Передаточна функція розімкненої некоректованої системи має вигляд:

$$W(p) = \frac{k}{p(Tp + 1)^2}, \quad T = 0,1 \text{ с.}$$

Рішення.

ЛАЧХ некоректованої системи при $k = k_v$ має вигляд:

$$L_H(\omega) = 20 \lg k_v - 20 \lg \omega - 40 \lg \sqrt{1 + T^2 \omega^2}$$

ЛФЧХ некоректованої системи має вигляд:

$$\varphi_H(\omega) = -90^\circ - 2 \arctg T\omega$$

Логарифмічні частотні характеристики (ЛАЧХ і ЛФЧХ) некоректованої системи зображені суцільною лінією на рис. 10.3., звідки видно, що запас по фазі дорівнює нулю. Для забезпечення заданого коефіцієнта загасання ($\xi = 0,65$) необхідний запас стійкості в скоректованій системі $\Delta \varphi' = 65^\circ$ ($\xi \approx 0,01 \cdot \Delta \varphi'$). Зробивши допуск у 5° на фазове зрушення коригувального пристрою, частоту ω'_c виберемо там, де фазова характеристика некоректованої системи має значення $\varphi(\omega) = -110^\circ$. ($|-180^\circ - (-110^\circ)| = 70^\circ = 65^\circ + 5^\circ$). У нашому випадку це $\omega'_c = 1,5$. Вимірявши, наскільки коригувальний пристрій повинен зменшити посилення на цій частоті, отримаємо 23 дБ. Отже,

$$23 \text{ дБ} = 20 \lg \alpha,$$

звідки $\alpha = 14,2$.

Частоту злому, що відповідає нулю коригувального пристрою, виберемо на декаду лівіше, ніж ω'_c тобто

$$\omega_1 = \frac{\omega'_c}{10} = 0,15 \text{ c}^{-1}.$$

Тоді для полюса отримаємо: $\omega_2 = \frac{\omega_2}{\alpha} = \frac{\omega_2}{14,2} = 0,011 \text{ c}^{-1}.$

У підсумку передаточна функція скоректованої системи буде мати вигляд:

$$W_{ск}(p) = W(p)W_k(p) = \frac{k_v}{p(Tp+1)^2} \cdot \frac{T_1p+1}{T_2p+1} = \frac{20}{p(0,1p+1)^2} \cdot \frac{6,66p+1}{90,9p+1}.$$

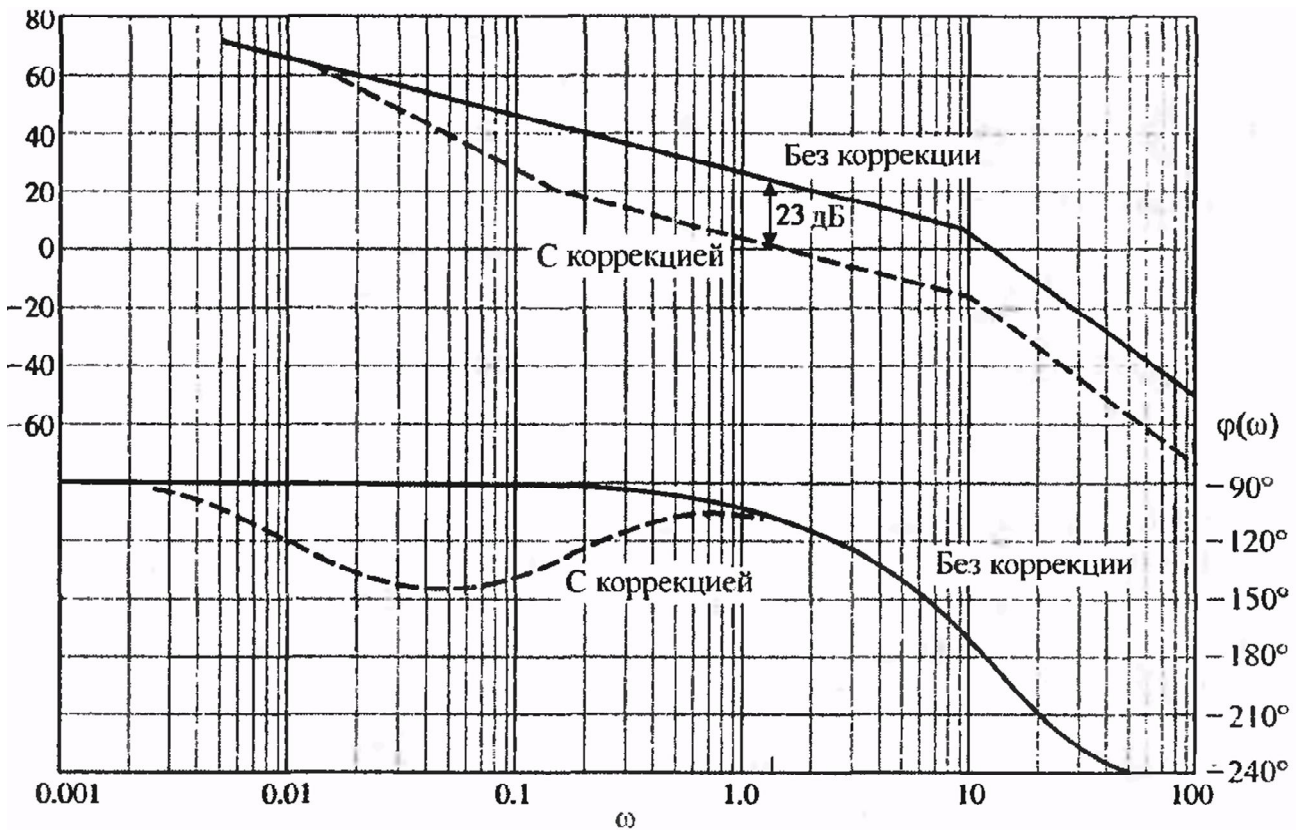


Рисунок 10.3. Синтез коригувального пристрою з відставанням по фазі методом ЛЧХ (до задачі 10.2)

Відповідні частотні характеристики наведені на рис.10.3. Обчисливши запас по фазі на частоті $\omega'_c = 1,5$, отримаємо значення 67° , що задовольняє висунутій вимозі.

Задача 10.3.

Необхідно визначити передаточну функцію послідовного коригувального пристрою з перевагою диференціюючих властивостей (корекція з випередженням по фазі) $W_k(p) = k_k \frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1}$; , $T_2 < T_1$.

До системи пред'являються наступні вимоги: коефіцієнт передачі $k_v = 10$ й коефіцієнт загасання $\xi = 0,45$. Передаточна функція розімкнутої некоректованої системи має вигляд:

$$W(p) = \frac{k}{p^2}.$$

Рішення.

ЛАЧХ некоректованої системи при $k = k_v$ має вигляд:

$$L_H(\omega) = 20 \lg k_v - 40 \lg \omega.$$

ЛФЧХ некоректованої системи має вигляд:

$$\varphi_H(\omega) = -180^\circ.$$

Логарифмічні частотні характеристики (ЛАЧХ і ЛФЧХ) некоректованої системи зображені суцільною лінією на рис. 10.4. Для забезпечення заданого коефіцієнта загасання ($\xi = 0,45$) необхідний запас стійкості в скоректованій системі $\varphi_{mp} = 45^\circ$ ($\xi \approx 0,01 \cdot \Delta\varphi^\circ$).

У некоректованій системі запас по фазі дорівнює 0° , тому що фазова характеристика, що відповідає двом інтеграторам, на всіх частотах має значення -180° . Отже, на частоті, при якій амплітудна характеристика скоректованої системи буде перетинати рівень 0 дБ, ми повинні додати до фазової характеристики 45° . Знайдемо значення параметра α :

$$\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} = \sin \varphi_{mp} = \sin 45^\circ,$$

звідки $\alpha = 5,8$. Виберемо із запасом значення $\alpha = 6$. Тоді $10 \lg \alpha = 7,78$ дБ, тобто коригувальний пристрій на частоті ω_{\max} додасть до амплітудної

характеристики 7,78 дБ. Тому треба вимагати, щоб амплітудна характеристика скоректованої системи перетинала рівень 0 дБ саме на частоті ω_{\max} .

По амплітудній характеристиці некоректованої системи знаходимо, що вона має значення -7,78 дБ при $\omega = 4,95$. Таким чином, максимальне додаткове фазове зрушення ми повинні мати на частоті $\omega = \omega_{\max} = 4,95$, як показано на рис. 10.4.

На підставі процедури синтезу знаходимо значення

полюса $\omega_2 = \omega_{\max} \sqrt{\alpha} = 12$ й нуля $\omega_1 = \omega_2 / \alpha = 2$.

У підсумку для розімкнутого контуру ми маємо

$$W_{ск}(p) = W(p)W_k(p) = \frac{10(0,5p + 1)}{p^2(0,083p + 1)}.$$

Передаюча функція коригувального пристрою приймає вид:

$$W_k(p) = k_k \frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{0,5p + 1}{0,083p + 1},$$

оскільки коефіцієнт передачі пасивної *RC*-схеми дорівнює $k_k = 1/\alpha = 1/6$, то в контур необхідно ввести підсилювач із коефіцієнтом підсилення, рівним $\alpha = 6$, щоб у розімкнутій системі коефіцієнт підсилення лишився рівним 10.

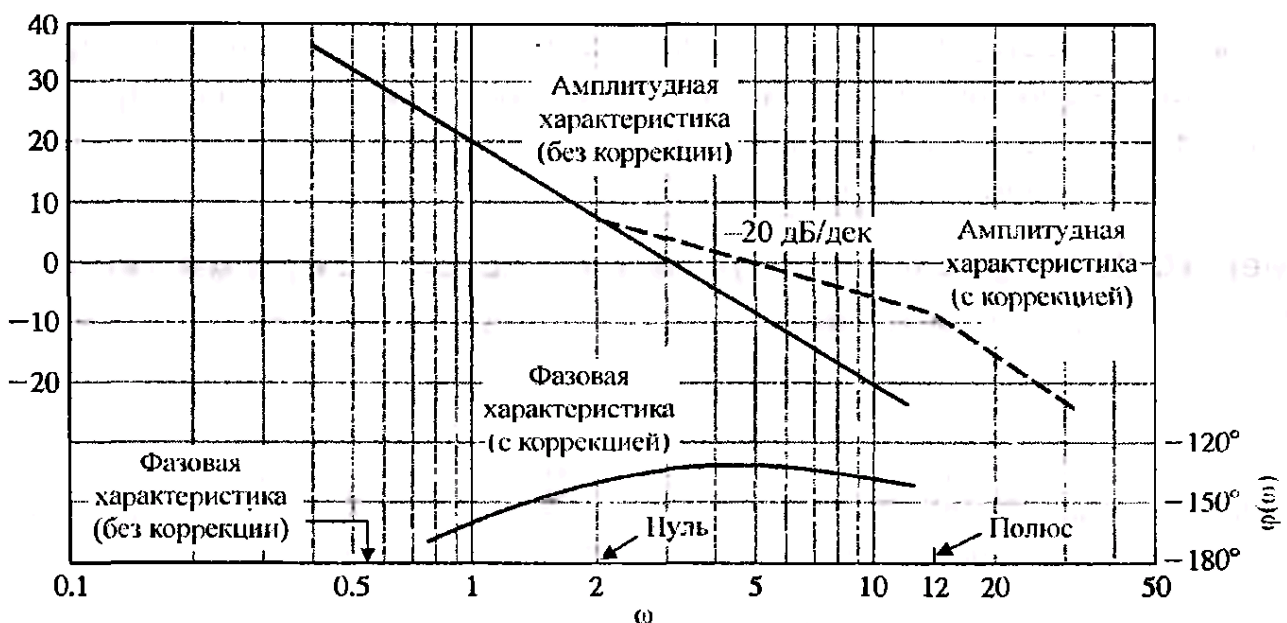


Рисунок 10.4. ЛЧХ до задачі 10.3

Задача 10.4.

Необхідно визначити передаточну функцію послідовного коригувального пристрою з перевагою диференціюючих властивостей, (корекція з випередженням по фазі) $W_k(p) = k_k \frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1}$; , $T_2 < T_1$.

До системи пред'являються наступні вимоги: коефіцієнт передачі $k_v = 20$ й коефіцієнт загасання $\xi = 0,45$. Передаточна функція розімкнутої некоректованої системи має вигляд:

$$W(p) = \frac{k}{p(0,5p + 1)}.$$

Рішення.

ЛАЧХ некоректованої системи при $k = k_v$ має вигляд:

$$L_H(\omega) = 20 \lg k_v - 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{1 + T^2 \omega^2}$$

ЛФЧХ некоректованої системи має вигляд:

$$\varphi_H(\omega) = -90^\circ - \arctg T\omega$$

Результат побудов приведений на рис.10.5. Частота, при якій амплітудна характеристика перетинає рівень 0 дБ, дорівнює $\omega_c = 6,2$.

$$\varphi(\omega_c) = -162^\circ.$$

Отже, запас по фазі дорівнює 18° . Ясно, що для збільшення запасу по фазі до потрібної величини 45° необхідно ввести в систему коригувальний пристрій з випередженням по фазі. Після введення корекції частота, при якій амплітудна характеристика перетне рівень 0 дБ, буде більше, ніж у вихідній системі. Відповідно, буде більше й відставання по фазі в некоректованій системі. З огляду на цю обставину, варто вимагати, щоб максимальне фазове зрушення, яке створює коригувальний пристрій, був не $45^\circ - 18^\circ = 27^\circ$, а на 10% більше, тобто $27^\circ + 3^\circ = 30^\circ$. Тоді можна обчислити параметр α :

$$\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} = \sin \varphi_{mp} = \sin 30^\circ,$$

звідки $\alpha = 3$. Коригувальний пристрій має максимальне фазове зрушення на частоті ω_{\max} , тому вона повинна збігатися із частотою, при якій амплітудна характеристика скоректованої системи буде перетинати рівень 0 дБ. Амплітудна характеристика коригувального пристрою на частоті ω_{\max} має значення $10\lg\alpha = 4,8$ дБ. Тому частоту ω'_c для системи з корекцією визначити досить просто: це буде частота, де $L(\omega) = -4,8$ дБ, тобто $\omega_{\max} = \omega'_c = 8,4$. Побудувавши амплітудну характеристику скоректованої системи так, щоб вона перетинала рівень 0 дБ при $\omega = \omega'_c = 8,4$ знаходимо значення полюса $\omega_2 = \omega_{\max}\sqrt{\alpha} = 14,4$ й нуля $\omega_1 = \omega_2/\alpha = 4,8$.

Тоді коригувальний пристрій буде мати передаточну функцію

$$W_k(p) = k_k \frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{0,21 p + 1}{0,005 p + 1}$$

Коефіцієнт підсилення отриманої системи треба збільшити в 3 рази, щоб компенсувати множник $1/\alpha = 1/3$.



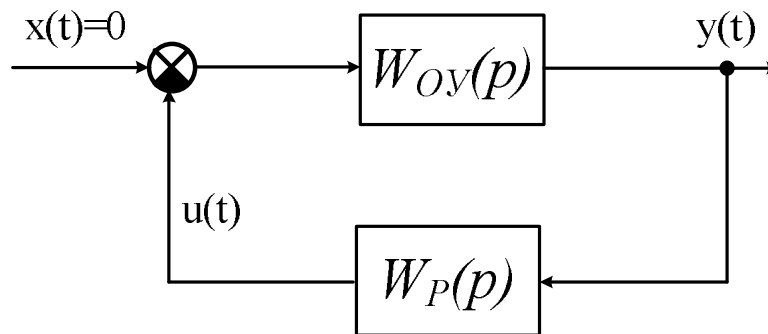
Рисунок 10.5. ЛЧХ до задачі 10.4

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 11
 СИНТЕЗ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ УПРАВЛІННЯ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ
 АНАЛІТИЧНИХ МЕТОДІВ

Стабілізація об'єкта управління

Якщо об'єкт управління не стійкий, тобто не всі корені характеристичного рівняння об'єкта лежать у лівій напівплощині, то ставиться задача його стабілізації.

Необхідною умовою стабілізації, тобто переміщення коренів характеристичного рівняння, є утворення хоча б одного замкнутого контуру, що містить нестійкий об'єкт.



$$W_0(p) = \frac{K_0(p)}{D_0(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}$$

$K_0(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m$ - вхідний оператор ОУ.

$D_0(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$ - власний оператор ОУ.

Передаточна функція об'єкта $W_0(p)$ не повинна мати нестійких диполів, тобто поліноми $K_0(p)$ і $D_0(p)$ не повинні мати однакових (спільних) правих коренів. Наявність диполя (спільного кореня) у передаточній функції приводить до того, що ніякий зворотний зв'язок не може перемістити відповідні корені, і стабілізація такого об'єкта за допомогою зворотного зв'язку неможлива.

Нехай об'єкт описаний диференціальним рівнянням n -го порядку в операторній формі:

$$D_0(p)Y(p) = K_0(p)U(p) \tag{11.1}$$

Ступінь полінома $K_o(p)$ менше ступеню полінома $D_o(p)$: $m < n$, що характерно для реальних ОУ.

Необхідно визначити передаточну функцію (ПФ) стабілізуючого зворотного зв'язка, тобто таку ПФ регулятора $W_p(p)$, яка б перетворювала нестійкий об'єкт у стійкий.

Диференціальне рівняння регулятора запишемо у вигляді:

$$D_p(p)U(p) = -K_p(p)Y(p), \quad (11.2)$$

де $D_p(p) = p^{n_p} + c_1 p^{n_p-1} + \dots + c_{n_p-1} p + c_{n_p}$ - власний оператор регулятора

$K_p(p) = g_0 p^{m_p} + g_1 p^{m_p-1} + \dots + g_{m_p-1} p + g_{m_p}$ - вхідний оператор регулятора.

Рівняння об'єкта й рівняння регулятора утворюють систему:

$$D_o(p)Y(p) = K_o(p)U(p)$$

$$D_p(p)U(p) = -K_p(p)Y(p)$$

Виключивши із цієї системи перемінну $U(p)$ отримаємо однорідне рівняння системи автоматичної стабілізації:

$$Y(p)D(p) = [D_o(p) \cdot D_p(p) + K_o(p) \cdot K_p(p)]Y(p) = 0 \quad (11.3)$$

Характеристичний поліном системи

$$D(p) = D_o(p) \cdot D_p(p) + K_o(p) \cdot K_p(p)$$

повинен бути тотожним бажаному поліному $D_{ж}(p)$:

$$D(p) = D_{ж}(p) \quad (11.4)$$

З тотожності поліномів виходить система з $n_{ж}$ лінійних рівнянь щодо коефіцієнтів поліномів регулятора $D_p(p)$ й $K_p(p)$. Розв'язання цієї системи дає коефіцієнти диференціального рівняння регулятора (11.2), що разом з об'єктом утворить замкнуту систему з бажаним вільним рухом.

Число рівнянь повинне рівнятися числу шуканих коефіцієнтів:

$$n_{ж} = n_p + m_p + 1 \quad (11.5)$$

Ступінь характеристичного полінома замкнутої системи $D(p)$ повинна бути дорівнює сумі порядків рівнянь об'єкта й регулятора $n + n_p$, а бажана система повинна мати той же порядок:

$$n_{жс} = n + n_p \quad (11.6)$$

Доповнимо останні умови (11.5) і (11.6) вимогою рівності ступенів поліномів регулятора (фізична реалізованість):

$$n_p = m_p \quad (11.7)$$

Тоді з рівнянь (11.5), (11.6), (11.7) знайдемо шукані ступені:

$$n_p = m_p = n - 1, \quad n_{жс} = 2n - 1 \quad (11.8)$$

Тепер лишається підібрати $2n - 1$ бажаних корінь, скласти по них бажаний поліном $D_{ж}(p)$, з тотожностей (11.4) вписати $2n - 1$ рівнянь і вирішити їх.

Синтез системи управління з бажаними динамічними властивостями

Для одержання бажаних динамічних властивостей у замкнутій системі задаються вимогами

$$W_3(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{W_y(p)W_{Oy}(p)}{1 + W_y(p)W_{Oy}(p)} = W_{3ж}(p) \quad (11.9)$$

та

$$W_{ЕЗ}(p) = \frac{Y(p)}{F(p)} = \frac{1}{1 + W_y(p)W_{Oy}(p)} = W_{ВЖ}(p) \quad (11.10)$$

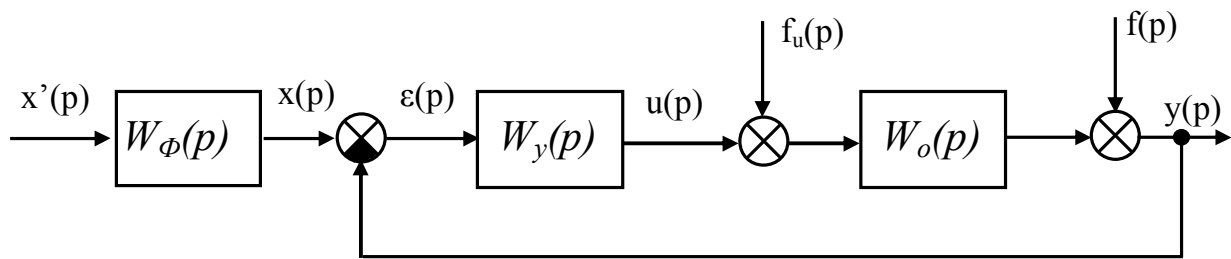
де $W_{3ж}(p)$, $W_{ВЖ}(p)$ - ПФ замкнутої САУ, що має бажані статичні й динамічні властивості, відповідно по каналу завдання й збурювання. (Для стислості будемо називати ці ПФ бажаними).

Бажану ПФ $W_{жс}(p)$ звичайно вибирають, виходячи з умови одержання перехідної характеристики $h(t)$ певного типу. Різні типові, або стандартні, характеристики $h(t)$ будуть розглянуті нижче.

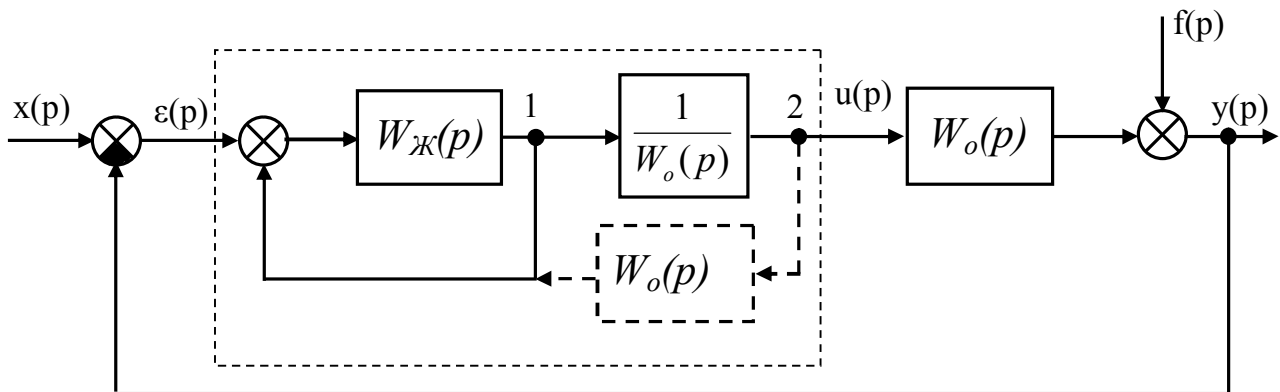
З вираження (11.1) можна для задачі відтворення завдання $x(t)$ отримати наступну ПФ УУ:

$$W_{УЗ}(p) = \frac{W_{3ж}(p)}{1 - W_{3ж}(p)} \cdot \frac{1}{W_O(p)} \quad (11.11)$$

якій відповідає схема на рис.11.1,б.



а)



б)

Рисунок 11.1. Синтез системи з бажаними властивостями

Для задачі компенсації збурювання $f(t)$ ПФ УУ, відповідно до вираження (11.10), повинна бути

$$W_{yB}(p) = \frac{1 - W_{BЖ}(p)}{W_{BЖ}(p)} \cdot \frac{1}{W_o(p)} \quad (11.12)$$

Так як вибором ПФ $W_y(p)$ можна виконати лише одне з умов типу (11.9) і (11.10), то при бажанні одночасного задоволення основної умови (11.9) і другої умови типу (11.10) у схему синтезованої системи доводиться включати додатковий пристрій - попередній, або вхідний, фільтр із ПФ $W_\phi(p)$ (див. рис.11.1,а). Тоді, вибравши спочатку ПФ УУ по другій умові, наприклад по формулі (11.12), ПФ фільтра визначають за умовою

$$W'_3(p) = \frac{Y(p)}{X'(p)} = W_\phi(p) \frac{W_y(p)W_{Oy}(p)}{1 + W_y(p)W_{Oy}(p)} = W_{3Ж}(p) \quad (11.13)$$

з урахуванням уже обраної $W_y(p) = W_{yB}(p)$

$$W_{\Phi}(p) = \frac{W_{3Ж}(p)}{1 - W_{3Ж}(p)} \quad (11.14)$$

Розглянемо тепер процедуру визначення ПФ УУ для об'єкта й бажаної системи, описаних у вигляді наступних дрібно-раціональних ПФ:

$$W_O(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + b_{m-2} p^{m-2} + \dots + b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}, \quad (m < n) \quad (11.15)$$

$$W_{Ж}(p) = \frac{\beta_{\mu} p^{\mu} + \beta_{\mu-1} p^{\mu-1} + \beta_{\mu-2} p^{\mu-2} + \dots + \beta_2 p^2 + \beta_1 p + \beta_0}{\alpha_{\nu} p^{\nu} + \alpha_{\nu-1} p^{\nu-1} + \alpha_{\nu-2} p^{\nu-2} + \dots + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0}, \quad (\mu < \nu) \quad (11.16)$$

Передаточна функція УУ, отримана відповідно до формул (11.11) або (11.12), у загальному випадку буде мати вигляд

$$W_Y(p) = \frac{c_r p^r + c_{r-1} p^{r-1} + c_{r-2} p^{r-2} + \dots + c_2 p^2 + c_1 p + c_0}{d_s p^s + d_{s-1} p^{s-1} + d_{s-2} p^{s-2} + \dots + d_2 p^2 + d_1 p + d_0} = \frac{C(p)}{D(p)}, \quad (r \leq s) \quad (11.17)$$

Для конкретних каналів, по яких задані бажані ПФ (11.9) або (11.10), ПФ УУ будуть мати вигляд

$$W_{y3}(p) = \frac{\beta(p)A(p)}{[\alpha(p) - \beta(p)]B(p)} \quad (11.18)$$

$$W_{yB}(p) = \frac{[\alpha(p) - \beta(p)]A(p)}{\beta(p)B(p)} \quad (11.19)$$

Для фізичної реалізованості ПФ (11.17) необхідно бажану ПФ $W_{жс}(p)$ вибирати так, щоб порядок полінома $C(p)$ виявився не більше порядку полінома $D(p)$, тобто для ПФ (11.18) повинне бути

$$r = n + \mu \leq s = m + \nu \quad \text{або} \quad n - m \leq s = \nu - \mu \quad (11.20)$$

а для ПФ (11.19)

$$r = n + \nu \leq s = m + \mu \quad \text{або} \quad n - m \leq s = \mu - \nu \quad (11.21)$$

При вирішенні практичних завдань синтезу вибір бажаних ПФ $W_{жс}(p)$ обмежують певними формами, які називаються *стандартними* і які мають більше простий вид, чим ПФ (11.16):

$$W_{Ж}(p) = \frac{\beta_0}{\alpha_{\nu} p^{\nu} + \alpha_{\nu-1} p^{\nu-1} + \alpha_{\nu-2} p^{\nu-2} + \dots + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0} \quad (11.22)$$

Коефіцієнт β_0 чисельника, виходячи з умови статички $W_{3ж}(0) = 1$, приймають рівним $\beta_0 = \alpha_0$, а коефіцієнти знаменника $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_v$ вибирають по одній зі стандартних форм, приведених у табл.11.1 і відповідних різним видам перехідної характеристики $h_{ж}(t)$ (рис. 11.2).

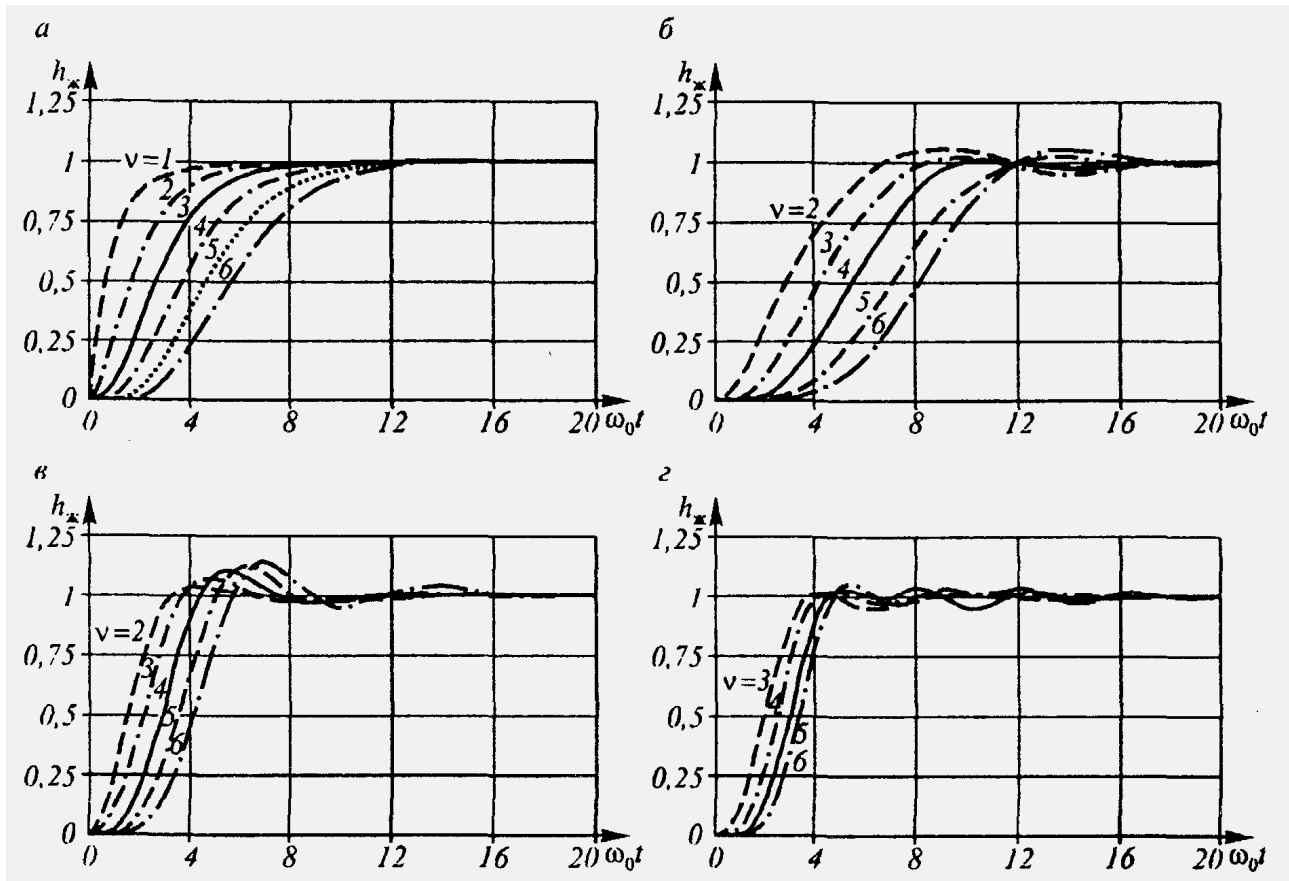


Рисунок 11.2. Стандартні перехідні характеристики бажаної САУ

Найпростіша стандартна форма називається *біноміальною*, тому що їй відповідає бажана ПФ зі знаменником у вигляді бінома:

$$W_{ж}(p) = \frac{\omega_0^v}{(p + \omega_0)^v} \quad (11.23)$$

де ω_0 - відносна частота.

Стандартные полиномы $\beta(p)$ желаемой ПФ для $\nu = 1; 2; \dots; 6$

Биномиальная форма	Форма Баттерворта
$s + \omega_0$ $s^2 + 2\omega_0 s + \omega_0^2$ $s^3 + 3\omega_0 s^2 + 3\omega_0^2 s + \omega_0^3$ $s^4 + 4\omega_0 s^3 + 6\omega_0^2 s^2 + 4\omega_0^3 s + \omega_0^4$ $s^5 + 5\omega_0 s^4 + 10\omega_0^2 s^3 + 10\omega_0^3 s^2 + 5\omega_0^4 s + \omega_0^5$ $s^6 + 6\omega_0 s^5 + 15\omega_0^2 s^4 + 20\omega_0^3 s^3 + 15\omega_0^4 s^2 + 6\omega_0^5 s + \omega_0^6$	$s + \omega_0$ $s^2 + 1,4\omega_0 s + \omega_0^2$ $s^3 + 2,0\omega_0 s^2 + 2,0\omega_0^2 s + \omega_0^3$ $s^4 + 2,6\omega_0 s^3 + 3,4\omega_0^2 s^2 + 2,6\omega_0^3 s + \omega_0^4$ $s^5 + 3,24\omega_0 s^4 + 5,24\omega_0^2 s^3 + 5,24\omega_0^3 s^2 + 3,24\omega_0^4 s + \omega_0^5$ $s^6 + 3,86\omega_0 s^5 + 7,64\omega_0^2 s^4 + 9,14\omega_0^3 s^3 + 7,46\omega_0^4 s^2 + 3,86\omega_0^5 s + \omega_0^6$
$\min_0^{t_n} \int_0^{t_n} e(t) dt$	$\min t_T$
$s + \omega_0$ $s^2 + 1,4\omega_0 s + \omega_0^2$ $s^3 + 1,75\omega_0 s^2 + 2,15\omega_0^2 s + \omega_0^3$ $s^4 + 2,1\omega_0 s^3 + 3,4\omega_0^2 s^2 + 2,7\omega_0^3 s + \omega_0^4$ $s^5 + 2,8\omega_0 s^4 + 5,0\omega_0^2 s^3 + 5,5\omega_0^3 s^2 + 3,4\omega_0^4 s + \omega_0^5$ $s^6 + 3,25\omega_0 s^5 + 6,60\omega_0^2 s^4 + 8,60\omega_0^3 s^3 + 7,45\omega_0^4 s^2 + 3,95\omega_0^5 s + \omega_0^6$	$s + \omega_0$ $s^2 + 1,4\omega_0 s + \omega_0^2$ $s^3 + 1,55\omega_0 s^2 + 2,10\omega_0^2 s + \omega_0^3$ $s^4 + 1,60\omega_0 s^3 + 3,15\omega_0^2 s^2 + 2,45\omega_0^3 s + \omega_0^4$ $s^5 + 1,575\omega_0 s^4 + 4,05\omega_0^2 s^3 + 4,10\omega_0^3 s^2 + 3,025\omega_0^4 s + \omega_0^5$ $s^6 + 1,45\omega_0 s^5 + 5,10\omega_0^2 s^4 + 5,30\omega_0^3 s^3 + 6,25\omega_0^4 s^2 + 3,425\omega_0^5 s + \omega_0^6$

Передаточна функція (11.23) відповідає, у свою чергу, послідовному з'єднанню з ν інерційних ланок першого порядку з однаковими постійними часу $T_i = 1/\omega_0$, і отже, з однаковими полюсами $p_i = -\omega_0$. На аперіодичний перехідний процес $h_{\mathcal{J}}(t)$ такого з'єднання орієнтуються лише в тих рідких випадках, коли перерегулювання в синтезованій системі небажано

Більш часто використовується стандартна форма Баттерворту (англ. - *Buttenthorth*), поліноми $\beta(p)$ якої мають ν коренів p_i розташованих у лівій напівплощині рівномірно на дузі з радіусом ω_0 , що відстоять друг від друга на однакові кути π/n :

$$p_i = \omega_0 \cdot e^{j\pi(n+2i-1)/2n} \quad (11.24)$$

Найпоширенішою є форма полінома $\beta(p)$, який відповідають перехідні процеси з мінімальним значенням поліпшеної модульної інтегральної оцінки наступного виду:

$$I'_M = \int_0^{\infty} t |\varepsilon(t)| dt \quad (11.25)$$

Нарешті, четверта з розглянутих стандартних форм застосовується, коли необхідно забезпечити мінімальну тривалість перехідного процесу.

Синтез систем за критерієм модульного оптимуму

При проектуванні систем управління об'єктами, що не містять чистого запізнювання, найбільше застосування одержали два критерії - модульний оптимум (МО) і симетричний оптимум (СО).

Критерій модульного оптимуму, називаний також критерієм амплітудного або технічного оптимуму, полягає у виконанні наступних вимог до форми амплітудної характеристики $A_3(\omega)$ замкнутої системи (Рисунок 11.3): характеристика в як можна більше широкому діапазоні частот повинна бути горизонтальною і рівною одиниці; похила ділянка характеристики повинен бути як можна більше крутопадаючою. Інакше кажучи, критерій модульного оптимуму вимагає, щоб настроювана система наближалася по своїх частотних

передатних властивостях до ідеального фільтра низької частоти, що має, як відомо, прямокутну частотну характеристику с. $\omega_0 = \omega_{II}$ Тоді при відсутності перешкоди на вході, система буде щонайкраще відтворювати вплив, що *задає*, $x(t)$ і подавляти *збурювання* $f(t)$. При наявності на вході високочастотної перешкоди частоту пропусчення ω_0 системи вибирають також досить великою, але по компромісній умові спільної фільтрації всіх діючих сигналів.

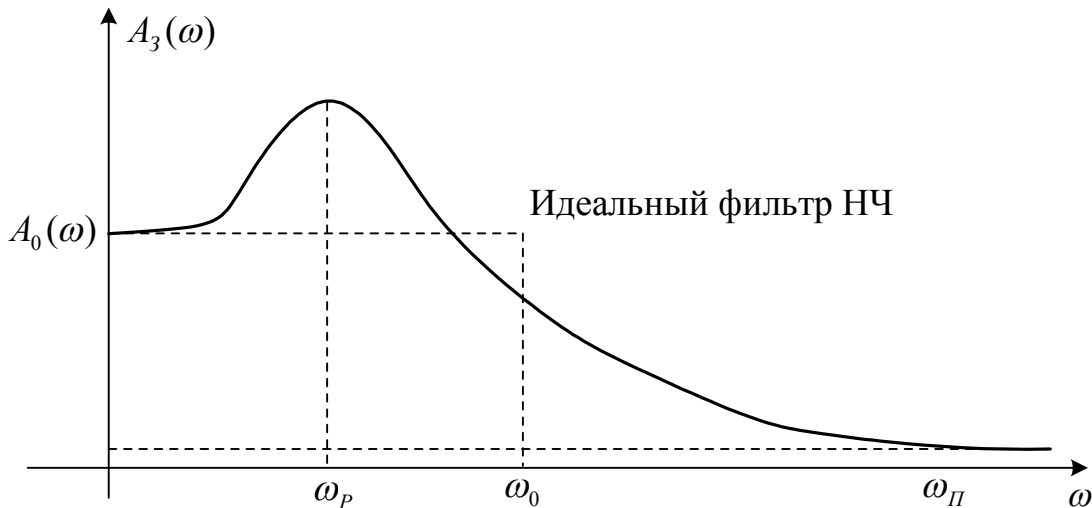


Рисунок 11.3. АЧХ замкнутої системи

Настроювання системи за критерієм МО забезпечують мале перерегулювання й досить швидке протікання перехідного процесу з наступними показниками якості:

$$\sigma < 9\%, \quad t_H < \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad t_{II} < \frac{3\pi}{\omega_0}.$$

Амплітудну характеристику, близьку за формою до прямокутної характеристики ідеального фільтра, має так званий *фільтр Баттерворта*, у якого АЧХ

$$A_B(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 + T\omega)^{2n}}}. \quad (11.26)$$

На практиці звичайно використовують фільтри з порядком $n = 2 \dots 8 \dots 8$

При настроюванні систем за критерієм МО передатну функцію замкнутої системи

$$W_3(p) = \frac{b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_{n-1} p + a_n} \quad (11.27)$$

приводять до нормованого виду

$$W_3(\bar{p}) = \frac{B_m}{\bar{p}^n + A_1 \bar{p}^{n-1} + A_2 \bar{p}^{n-2} + \dots + A_{n-1} \bar{p} + 1}, \quad (11.28)$$

де $\bar{p} = pT_M = p/\omega_0$ - оператор Лапласа, що відповідає безрозмірному (відносному) часу $\bar{t} = t/T_M$, T_M - масштабний множник, рівний

$$T_M = 1/\omega_0 = \sqrt[n]{a_0/a_n}; \quad (11.29)$$

безрозмірні коефіцієнти

$$A_1 = \frac{a_1}{a_0} T_M; \quad A_2 = \frac{a_2}{a_0} T_M^2; \dots; \quad A_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_0} T_M^{n-1}; \quad B_m = \frac{b_m}{a_n} \dots \quad (11.30)$$

Щоб забезпечити бажану форму амплітудної характеристики, близьку до прямокутного, коефіцієнти нормованої функції (11.28) вибирають у відповідності зі стандартними поліномами Баттерворта (табл. 11.2). Саме при таких сполученнях коефіцієнтів A_i амплітудна характеристика фільтра приймає вид (1), причому $T = T_M$, а відносна частота $\Omega_0 = \omega_0 T = 1$ відповідає значенню АЧХ, рівному 0,7 (при $Bm = 1$).

Таблиця 11.2. Коефіцієнти фільтрів Баттерворта

n	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
2	1,4	--	--	--	--	--	--
3	2,0	2,0	--	--	--	--	--
4	2,61	3,41	2,61	--	--	--	--
5	3,24	5,24	5,24	3,24	--	--	--
6	3,86	7,46	9,13	7,46	3,86	--	--
7	4,5	10,1	14,6	14,6	10,1	4,5	--
8	5,12	13,1	21,8	25,7	21,8	13,1	5,12

Масштабний множник T_M не впливає на форму перехідного процесу й служить узагальненою мірою швидкодії системи. Його значення можна вибрати

виходячи з необхідних показників швидкодії t_H і t_{II} по наступних наближених формулах:

$$t_H \approx nT_M, \quad t_{II} \approx 2nT_M. \quad (11.31)$$

Знайдене по цих формулах значення T_M забезпечують за рахунок вибору по формулі (4) відповідного загального передатного коефіцієнта розімкнутого контуру k , що входить у вільний член a_n : $a_n = 1 + k$ - для статичних систем, $a_n = k$ - для астатичних систем.

У системах, параметри яких обрані у відповідності зі стандартними поліномами Баттерворта, перерегулювання $\sigma \approx 10 \div 15\%$.

Зазначені вище значення тривалості перехідного процесу t_n і перерегулювання σ строго втримуються тільки в тих випадках, коли чисельник передатної функції (11.27) не містить доданків з оператором p . Проте й для систем з більше складним поліномом чисельника можна користуватися значеннями коефіцієнтів Баттерворта, що рекомендуються. При цьому також забезпечується досить гарна якість перехідного процесу. Крім того, настроювання, що відповідають поліномам Баттерворта, можуть використовуватися як вихідні (відправні) для відшукування оптимальних настроювань систем, передатні функції яких мають чисельник у вигляді полінома від p .

Приклади розв'язання задач

Задача 11.1

Визначити передаточну функцію і її параметри стабілізуючого зворотного зв'язка для об'єкта, що складається із двох інтегруючих ланок і нестійкої статичної ланки:

$$W_1(p) = \frac{k_1}{p} \quad W_2(p) = \frac{k_2}{p} \quad W_3(p) = \frac{k_3}{Tp - 1}$$

Рішення.

Диференціальне рівняння даного об'єкта:

$$(Tp^3 - p^2)Y(p) = kU(p).$$

Об'єкт нестійкий - характеристичний поліном має один правий і два нульових корені:

$$Tp^3 - p^2 = 0, \quad p_1 = p_2 = 0, \quad p_3 = 1/T$$

Вибираємо ступені поліномів регулятора й бажаної системи по формулах (8):

$$n_p = m_p = 3 - 1 = 2, \quad n_{жс} = 2n - 1 = 5$$

Бажаний характеристичний поліном має вигляд:

$$D_{жс}(p) = p^5 + d_1p^4 + d_2p^3 + d_3p^2 + d_4p + d_5$$

Нехай коефіцієнти полінома $D_{жс}(p)$ призначені так, щоб його корені бажаним образом розташовувалися в лівій напівплощині.

Шукані поліноми регулятора в загальному виді запишуться:

$$D_p(p) = p^2 + c_1p + c_2$$

$$K_p(p) = g_0p^2 + g_1p + g_2$$

З тотожності (4)

$$D(p) = D_{жс}(p), \quad D(p) = D_o(p) \cdot D_p(p) + K_o(p) \cdot K_p(p)$$

$$(p^3 - \frac{1}{T}p^2)(p^2 + C_1p + C_2) + \frac{K}{T}(g_0p^2 + g_1p + g_2) = p^5 + d_1p^4 + d_2p^3 + d_3p^2 + d_4p + d_5$$

$$\begin{cases} C_1 - \frac{1}{T} = d_1 \\ C_2 - \frac{C_1}{T} = d_2 \\ -\frac{C_2}{T} + \frac{k}{T}g_0 = d_3 \\ \frac{k}{T}g_1 = d_4 \\ \frac{k}{T}g_2 = d_5 \end{cases}$$

З розв'язання цієї системи знаходяться коефіцієнти передаточної функції регулятора:

$$(p^2 + c_1p + c_2)U(p) = -(g_0p^2 + g_1p + g_2)Y(p)$$

$$W_p(p) = \frac{U(p)}{y(p)} = \frac{K_p(p)}{D_p(p)} = \frac{q_0p^2 + q_1p + q_2}{p^2 + C_1p + C_2}.$$

Задача 11.2

Необхідно визначити для об'єкта управління

$$W_o(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{1}{5p^3 + 11p^2 + 7p + 1}$$

передаточну функцію пристрою управління (ПУ), що забезпечує перехідний процес (по впливу, що задає) з мінімальним значенням інтегрального показника (11.25) і з тривалістю наростання $t = 8$ с.

Рішення.

Для вихідного об'єкта з $n - m = 3$ умова реалізованості (11.20) буде $\nu - \mu \geq 3$ або для спрощеної бажаної ПФ (11.22) - $\nu \geq 3$. Відповідно до табл. 11.1 для $\nu \geq 3$

$$\alpha(p) = p^3 + 1,75\omega_0p^2 + 2,15\omega_0^2p + \omega_0^3,$$

де з урахуванням заданої тривалості наростання $\omega_0 = \frac{4}{t_H} = \frac{4}{8} = 0,5 \text{ c}^{-1}$.

Тоді для реального часу

$$\alpha(p) = p^3 + 0,875\omega_0p^2 + 0,3575\omega_0^2p + 0,125$$

а ПФ ПУ відповідно до формули (11.18) буде

$$W_{v3}(p) = \frac{C(p)}{D(p)} = \frac{0,125(5p^3 + 11p^2 + 7p + 1)}{(p^3 + 0,875\omega_0p^2 + 0,3575\omega_0^2p + 0,125 - 0,125)1} = \frac{5p^3 + 11p^2 + 7p + 1}{p(8p^2 + 7p + 4,3)}$$

Завдання 11.3.

Нехай вихідна частина системи, що складається з функціонально необхідних елементів, описується передаточною функцією

$$W(p) = \frac{k}{p(T_1p + 1)(T_2p + 1)}$$

де $T_1 = 1$ с, $T_2 = 2$ с.

Потрібно визначити параметри T_3 і T_4 послідовного коригувального пристрою

$$W_k(p) = (T_3 p + 1)(T_4 p + 1)$$

і загальний коефіцієнт передачі k , що забезпечують критерій МО й бажану тривалість перехідного процесу $t_{II} = 6$ с.

Рішення.

Передаточна функція замкнутої системи по каналу $x-y$

$$W_3(p) = \frac{k(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)}{T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2 + k T_3 T_4) p^2 + (1 + k T_3 + k T_4) p + k}$$

Не звертаючи уваги на наявність полінома в чисельнику цієї передаточної функції, будемо підбирати параметри коригувального пристрою так, щоб безрозмірні коефіцієнти A_1 і A_2 поліному знаменника відповідали фільтру Баттерворта.

Визначимо спочатку масштабний множник T_M орієнтуючись на наближене співвідношення (11.31):

$$T_M = t_{II} / 2n = 6 / 2 \cdot 3 = 1 \text{ с.}$$

Тепер відповідно до формули (11.29) можна знайти необхідне (для заданої швидкодії) значення загального коефіцієнта передачі:

$$k = a_0 = \frac{a_3}{T_M^3} = \frac{T_1 T_2}{T_M^3} = \frac{1 \cdot 2}{1^3} = 2 \text{ с.}$$

Для $n=3$ обидва безрозмірних коефіцієнта Батгерворта, згідно табл.11.2 повинні бути рівні 2:

$$A_2 = \frac{a_2}{a_3} T_M = \frac{T_1 + T_2 + k T_3 T_4}{T_1 T_2} T_M = \frac{3 + 2 T_3 T_4}{2} = 2,$$

$$A_1 = \frac{a_1}{a_3} T_M^2 = \frac{1 + k T_3 + k T_4}{T_1 T_2} T_M^2 = \frac{1 + 2 T_3 + 2 T_4}{2} = 2.$$

Вирішуючи спільно ці два рівняння, отримаємо $T_3 = 0,5$ с і $T_4 = 1$ с.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 12

ПОБУДОВА ФАЗОВИХ ПОРТРЕТІВ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ САУ МЕТОДОМ ФАЗОВОЇ ПЛОЩИНИ

Метод фазових траєкторій являє собою графоаналітичний спосіб дослідження нелінійних систем. Сутність методу полягає в описі поведінки систем за допомогою наочних геометричних представлень - фазових портретів.

Вільний рух нелінійної динамічної системи управління з однією вихідною величиною $\mathbf{x}(t)$ у загальному випадку може бути представлений у вигляді диференціального рівняння виду:

$$\Phi[x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n)}(t)] = 0 \quad (12.1)$$

Якщо ввести додаткові змінні $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = x'(t)$, $x_3(t) = x''(t)$... то це рівняння перетвориться в систему диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = f_1[x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t)] \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = f_2[x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t)] \\ \dots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} = f_n[x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t)] \end{cases} \quad (12.2)$$

де $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = x'(t)$, $x_3(t) = x''(t)$, ..., $x_n(t) = x^{(n-1)}(t)$ - фазові змінні стану.

Миттєвий стан системи і її подальша поведінка однозначно визначені, якщо в цей момент часу $t = t_i$ відомі значення всіх n змінних x_i . Ці значення можна розглядати як координати точки (x_1, x_2, \dots, x_n) в n -мірному просторі, що називається фазовим простором.

Точку з координатами x_1, x_2, \dots, x_n називають зображуючою точкою, а лінію, по якій вона переміщається при зміні стану системи - фазовою траєкторією.

Як відомо, даній групі початкових умов $x_1(0) = x_{10}, x_2(0) = x_{20}, \dots, x_n(0) = x_{n0}$ відповідає єдине розв'язання системи (12.2) – визначена сукупність функції часу $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$... Тому кожній групі початкових умов відповідає тільки одна точка і єдина фазова траєкторія, а безлічі груп початкових умов відповідає ціле сімейство траєкторій, які називаються фазовими портретом системи.

Метод фазового простору найбільш зручний для аналізу систем другого порядку, тому що їхні фазові траєкторії розташовуються в одній площині змінних x_1, x_2 .

Нехай нелінійна система другого порядку представлена системою двох рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = f_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (12.3)$$

де $x_1 = x$ – відхилення вихідної величини або сигналу помилки від сталого значення.

Якщо в якості другої змінної стану x_2 прийнята похідна змінної $x_1 = x$, тобто $x_2(t) = x_1'(t)$, то завжди функція $f_1(x_1, x_2) = x_2 = \frac{dx_1(t)}{dt}$.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (12.4)$$

Розділивши друге рівняння системи (12.4) на перше, отримуємо рівняння фазових траєкторій у диференціальній формі:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{x_2} \quad (12.5)$$

у якому незалежною змінною є величина x_1 (не час t !), а залежною - x_2 .

Розділяючи далі змінні x_1 і x_2 і інтегруючи рівняння (12.5), можна отримати рівняння фазових траєкторій у явному виді

$$x_2 = F(x_1) + C_0 \quad (12.6)$$

де C_0 - постійна інтегрування, що залежить від початкових умов.

На рис.12.1. б, г, е, показані характерні фазові траєкторії лінійної системи другого порядку, що відповідають загасаючому (рис.12.1,а), що розходиться (рис.12.1,в) і незатухаючому (рис. 12.1,д) коливальним процесам. Моменти часу t_1, t_3, t_5 , коли криві $x(t)$ досягають своїх максимумів і мінімумів, відповідають перетинанню фазовими траєкторіями осі $x_1 = x$, а моменти проходження кривих $x(t)$ через нуль (t_2, t_4) - перетинанню осі $x_2 = x'$.

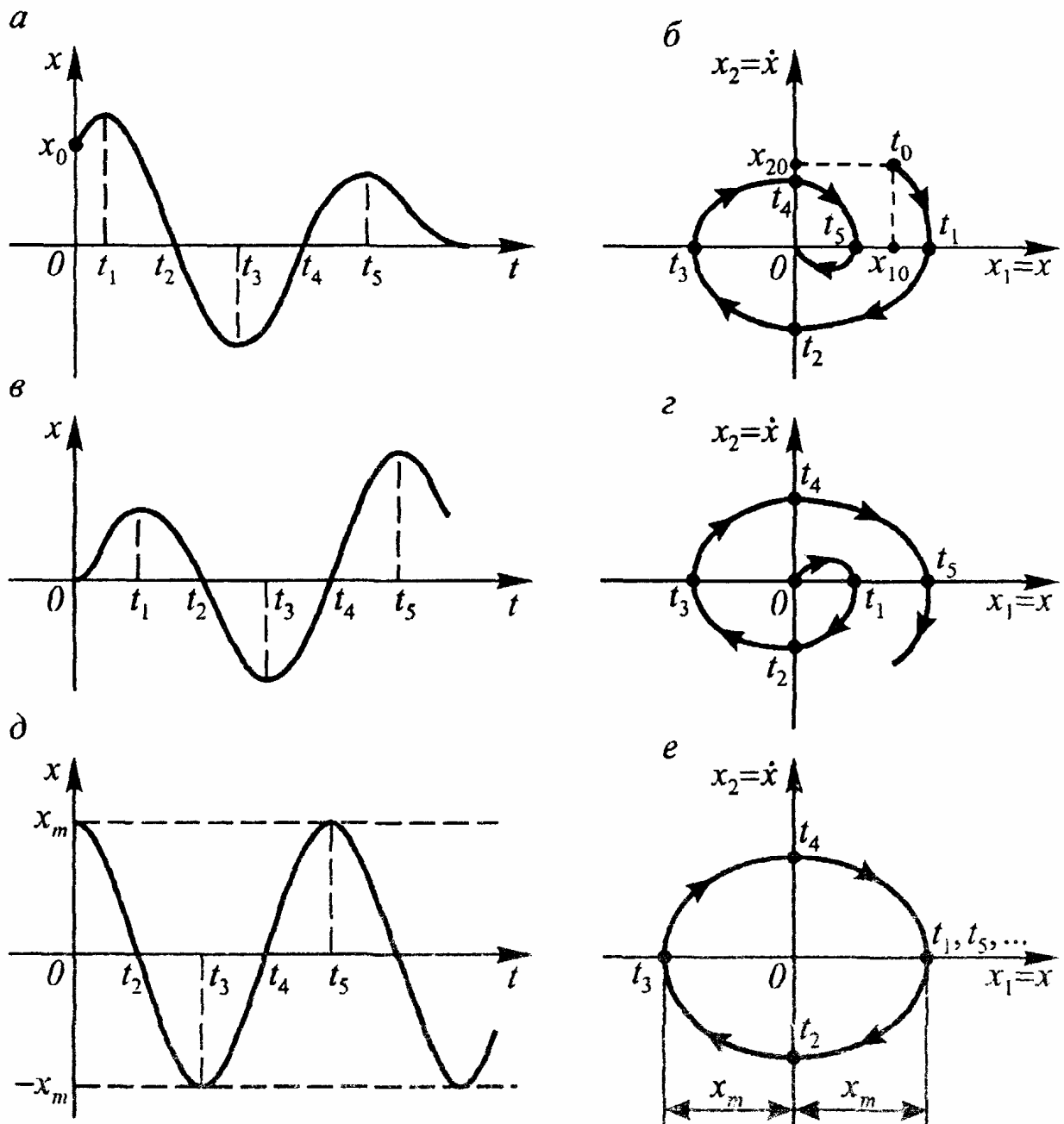


Рисунок 12.1 Фазові траєкторії й відповідні їм перехідні процеси

Загасаючому (стійкому) перехідному процесу відповідає фазова траєкторія, що сходиться до початку координат або відрізка спокою.

Нестійкому процесу відповідає фазова траєкторія, що віддаляється від початку координат.

Періодичному процесу відповідає замкнута фазова траєкторія, називана граничним циклом. Граничний цикл може бути стійким або нестійким. Якщо всі сусідні фазові траєкторії стягаються до граничного циклу, то він є стійким і відповідає автоколиванням. Якщо ж сусідні траєкторії відходять від циклу то він є нестійким.

За графіком стійкого граничного циклу можна визначити два основних параметри автоколивального режиму - частоту й амплітуду. Частота ω_a дорівнює відношенню відрізка, що відсікає траєкторією на осі x_2 , до відрізка, що відсікає на осі x_1 а амплітуда x_m дорівнює відрізку на осі x_1 .

Фазовий портрет нелінійної системи, що має кусочно-лінійну або розривну характеристику, складається з кількох областей з різними фазовими траєкторіями. Лінії, що відокремлюють на площині одну область від іншої, називаються *лініями перемикання*. Рівняння ліній перемикання визначаються по математичному опису нелінійного елемента.

У точках перетинання фазовими траєкторіями ліній перемикання відбувається злом траєкторій. Це відбувається через стрибкоподібну зміну правої частини рівняння (12.5).

Приклади розв'язання задач

Задача 12.1

Розглянемо жорсткий супутник, зображений на рис.12.2.

Передбачається, що супутник жорсткий, тертя відсутнє, і що він обертається щодо осі, перпендикулярній сторінці книги. Обертаючий момент, що приложений до супутника, створюється двигунами. Наприклад, якщо включені два двигуни, як показано на рисунку, це приводить до зменшення кута Θ . Якщо ж включена інша пара двигунів, то кут Θ має тенденцію до

збільшення. Передбачається, що момент $\tau(t)$, створюваний двигунами, є входом системи, а кут $\Theta(t)$ — її виходом. Тоді:

$$\tau(t) = J \frac{d^2 \Theta(t)}{dt^2}$$

оскільки тертя об повітря відсутнє (J — момент інерції супутника). У цьому випадку передаточна функція дорівнює

$$W(p) = \frac{\Theta(p)}{\tau(p)} = \frac{1}{Jp^2}$$

Це досить точна модель жорсткого супутника, і вона часто використовується в багатьох прикладах у силу її простоти. Однак якщо до супутника прикріплені сонячні панелі, то допущення про його жорсткість вже не діє (одні частини супутника можуть переміщатися щодо інших частин), і модель виходить більш складною.

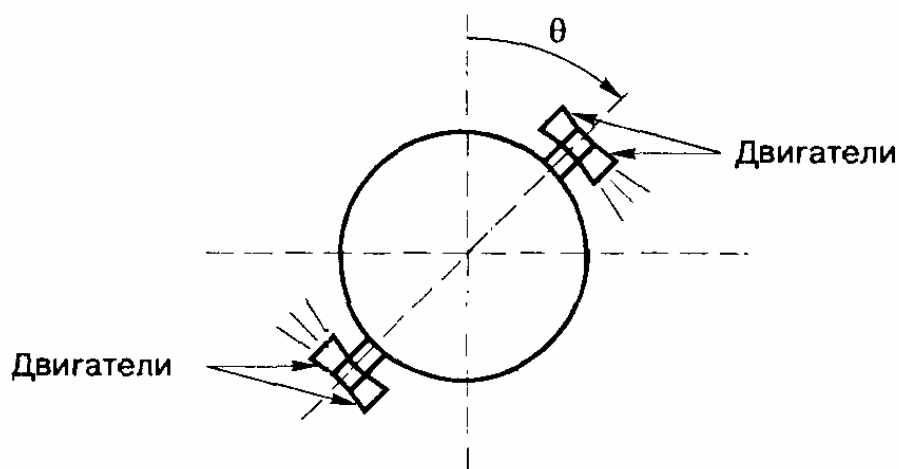


Рисунок 12.2. Схема штучного супутника землі

Система управління супутником призначена для підтримки його заданого кутового положення Θ шляхом включення двигунів, показаних на рисунку. Модель системи описується рівнянням

$$\Theta'' = \frac{\tau}{J} = u$$

де τ — момент, що розвивають двигуни, J — момент інерції супутника, а u можна розглядати як нормований момент. Модель супутника у фазових змінних має вигляд:

$$\begin{aligned}x_1 &= \Theta \\x_1' &= x_2 = \Theta' \\x_2' &= u = \Theta''\end{aligned}$$

Припускається, що двигуни розвивають постійну тягу, тобто

$$u(t) = \pm U$$

На рис. 12.2 включенню двигунів відповідає зменшення кута Θ , тому

$$u(t) = -U$$

Для двох інших двигунів $u(t) = U$.

Модель супутника має вигляд

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = u(t) \end{cases}$$

Спочатку розглянемо випадок, коли $u(t) = -U$. Рівняння фазових траєкторій у диференціальній формі:

$$\begin{aligned}\frac{dx_2/dt}{dx_1/dt} &= \frac{u(t)}{x_2}, \\ \frac{dx_2}{dx_1} &= \frac{-U}{x_2},\end{aligned}$$

або

$$x_2 dx_2 = -U dx_1.$$

Виконав інтегрування цього рівняння, отримаємо:

$$\frac{x_2^2}{2} = -U x_1 + C_1$$

де C_1 - постійна інтегрування, яка визначається з початкових умов:

$$C_1 = U x_1(0) + \frac{x_2^2(0)}{2}.$$

Таким чином, на площині (x_1, x_2) ми отримали сімейство парабол, що зображене на рис.12.3,а.

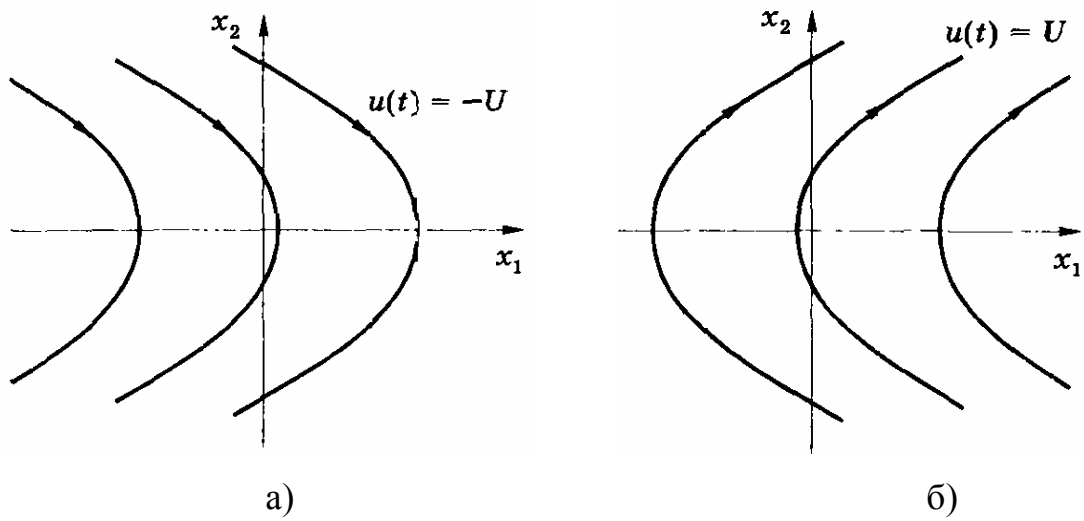


Рисунок 12.3. Фазові портрети супутника при обертанні в різні сторони

При $u(t) = U$ розв'язання рівнянь стану дає результат

$$\frac{x_2^2}{2} = Ux_1 + C_2$$

C_2 - постійна інтегрування, яка визначається з початкових умов:

$$C_2 = -Ux_1(0) + \frac{x_2^2(0)}{2}$$

Розглянемо замкнуту систему управління супутником, що зображена на рис. 12.4.

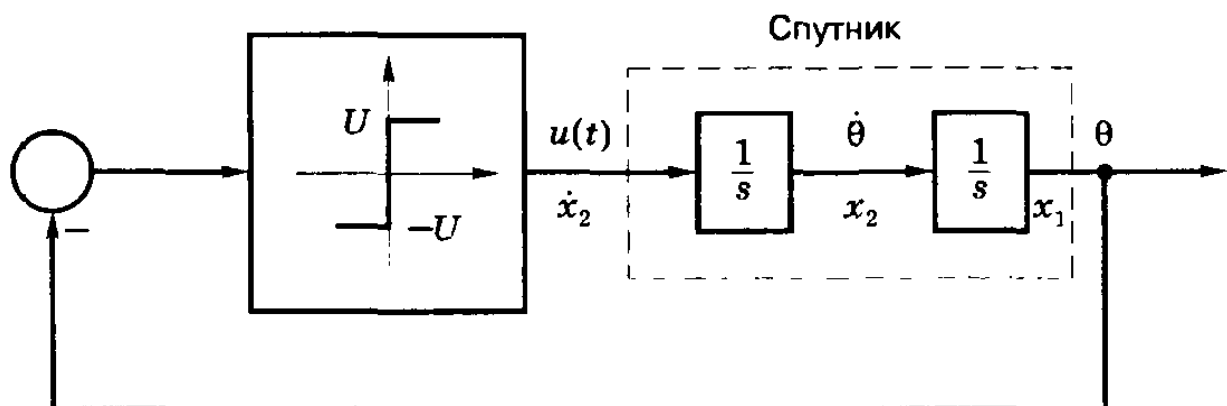


Рисунок 12.4. Замкнута система управління супутником

Ця система зі зворотним зв'язком призначена для підтримки кутового положення супутника $\Theta = 0^\circ$. Якщо $\Theta \neq 0^\circ$, то відповідні двигуни включаються, прагнучи повернути кут Θ до 0° .

Коли $\Theta = x_1 > 0^\circ$ то $f(t) = -U$ й дійсні траєкторії, що зображені на рис.12.3,а. Якщо ж $\Theta = x_1 < 0^\circ$ то $f(t) = U$ й дійсні траєкторії, що зображені на рис. 12.3,б.

Помітимо, що переключення $u(t)$ відбувається при $x_1 = 0$, тому лінія $x_1 = 0$ (вісь x_2) є *лінією переключення*. Типова траєкторія руху системи зображена на рис. 12.5,а, звідки видно, що в ній виникають незатухаючі коливання. Фазовий портрет приведений на рис. 12.5,б. Очевидно, що система управління з такою динамікою є неприйнятною.

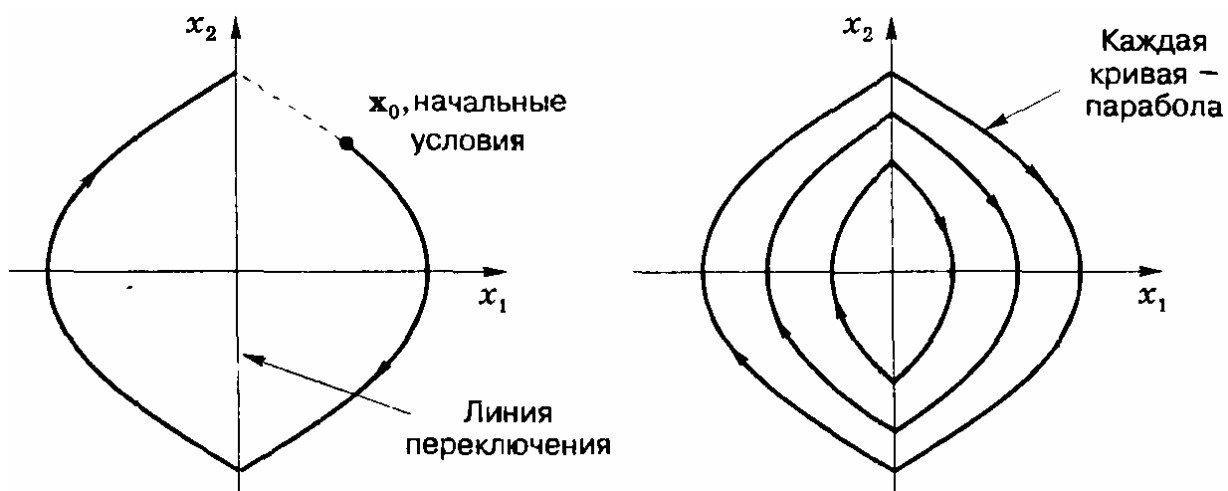


Рисунок 12.5. Фазова траєкторія (а) і фазовий портрет (б) замкнутої САУ

Для поліпшення динамічних властивостей системи використовується зворотний зв'язок по швидкості, як показано на рис. 12.6.

Інформацію про кутову швидкість супутника містить вихідний сигнал датчика з коефіцієнтом підсилення α . Вхідний сигнал супутника як і раніше приймає значення $\pm U$, і траєкторії руху об'єкта на фазовій площині залишаються параболою, як і у випадку некерованого супутника.

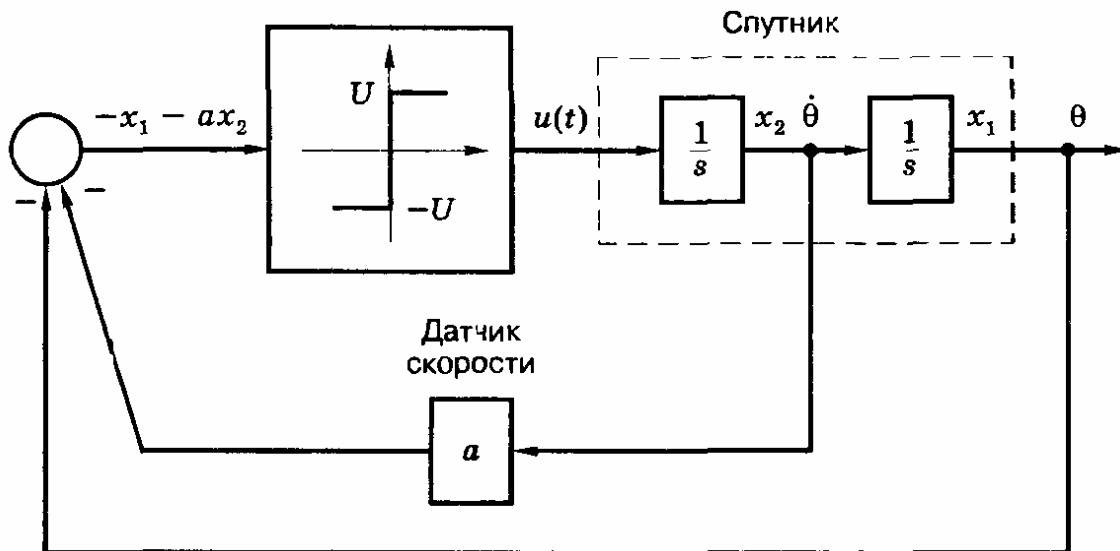


Рисунок 12.6. Система управління супутником зі зворотним зв'язком по швидкості

Однак тепер інакше виглядають умови переключень $u(t)$: вони відбуваються, коли сигнал на вході реле дорівнює нулю, тобто

$$\begin{aligned} -x_1 - \alpha x_2 &= 0, \\ x_1 + \alpha x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Це рівняння визначає лінію переключення - пряму з нахилом

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-1}{\alpha}.$$

Типова фазова траєкторія в цьому випадку показана на рис. 12.7.

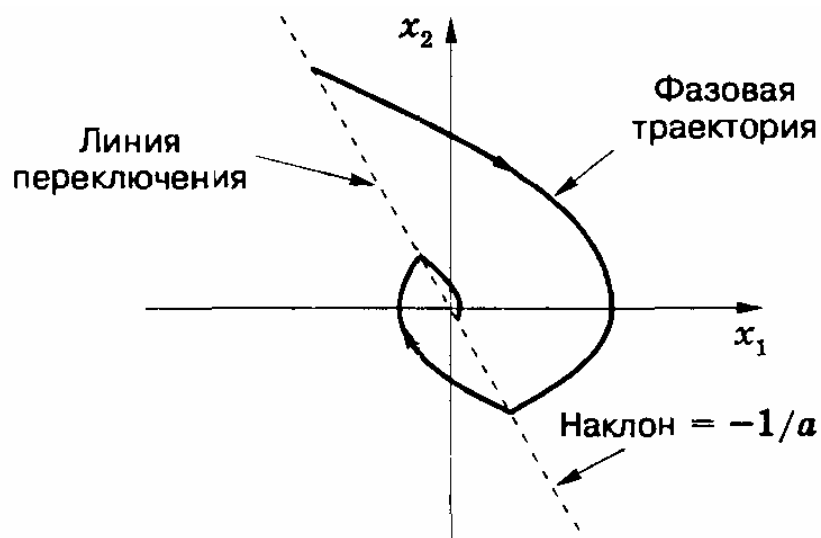


Рисунок 12.7. Фазові траєкторії системи управління супутником зі зворотним зв'язком по швидкості

Задача 12.2.

Розглянемо як приклад нелінійної САУ систему стабілізації температури з нелінійним керуючим пристроєм (рис.12.8). Як керуючий пристрій застосоване трипозиційне реле P , на обмотку якого подана напруга розбалансу u_p мосту M . Одним із пліч моста є термопір $ТС$, який поміщений в робочий простір об'єкта.

При відхиленні температури Θ від заданої Θ_3 порушується рівновага мосту й реле подає напругу u_d певної полярності на виконавчий двигун $ИД$, що за допомогою засувки $З$ збільшує або зменшує подачу палива в об'єкт.

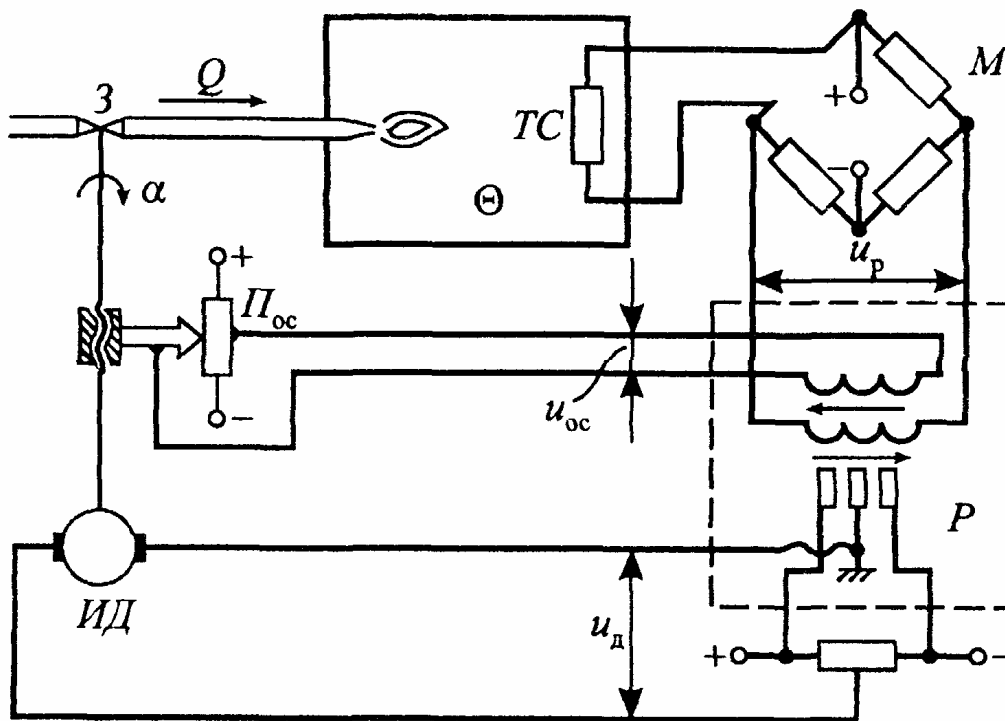


Рисунок 12.8. Система стабілізації температури з нелінійним керуючим пристроєм

У цій системі є істотно нелінійний елемент - трипозиційне реле (рис.12.8), і їй властиві всі зазначені вище особливості. Наприклад, при певних значеннях параметрів у системі можуть виникнути автоколивання: температура буде безупинно коливатися навколо деякого середнього значення, рівного величині Θ_3 . Автоколивання будуть виникати, якщо відкривання й закривання засувки після вмикання двигуна будуть відбуватися дуже швидко. При цьому

температура буде швидко вертатися до заданого значення й «проскакувати» зону нечутливості реле, а двигун буде знову й знову то збільшувати, то зменшувати подачу палива.

Для усунення цих автоколивань і поліпшення динамічних властивостей системи в ній за допомогою потенціометра Π_{oc} здійснений внутрішній негативний зворотний зв'язок по положенню регулювального органу - куту повороту засувки 3.

Побудуємо фазовий портрет і оцінімо динаміку системи стабілізації температури (див. рис. 12.8). Алгоритмічна схема системи приведена на рис.12.9,а. Об'єкт управління представлений інерційною ланкою першого порядку, виконавчий двигун — ідеальною інтегруючою ланкою (без урахування механічної й електричної інерції двигуна), вимірювальна мостова схема й засувка - безінерційними статичними ланками. Нелінійним елементом системи є трипозиційне реле. Вхідна величина реле - результуюча магніторушійна сила (ампер-витки) основної обмотки й обмотки зворотного зв'язка, вихідна - напруга u_D , яка подається на якірні затискачі двигуна.

Для аналізу доцільно вихідну схему перетворити до розрахункової схеми (рис. 12.9,б), на якій вхідна величина реле має ту ж розмірність, що й керована величина Θ . При цьому зона нечутливості реле b (рис. 12.9,в) повинна бути також виражена в градусах. Вона дорівнює $b = b_1/k_u$, де b_1 - зона нечутливості, виражена в ампер-витках; k_u - коефіцієнт передачі вимірювальної схеми.

Лінійна частина системи (без урахування внутрішнього зворотного зв'язку по положенню засувки) описується диференціальним рівнянням другого порядку

$$T_0 \frac{d^2\Theta}{dt^2} + \frac{d\Theta}{dt} = k_L u_D, \quad (12.7)$$

де $k_L = k_3 \cdot k_O \cdot k_D$ - коефіцієнт передачі лінійної частини, °C/(В с).

Реле описується нелінійною функцією $u_D = f(x_H)$, що може приймати три значення (див. рис. 12.9,в):

$$u_d = f(x_H) = \begin{cases} +c & \text{при } x_H > b \\ 0 & \text{при } |x_H| < b \\ -c & \text{при } x_H < -b \end{cases}$$

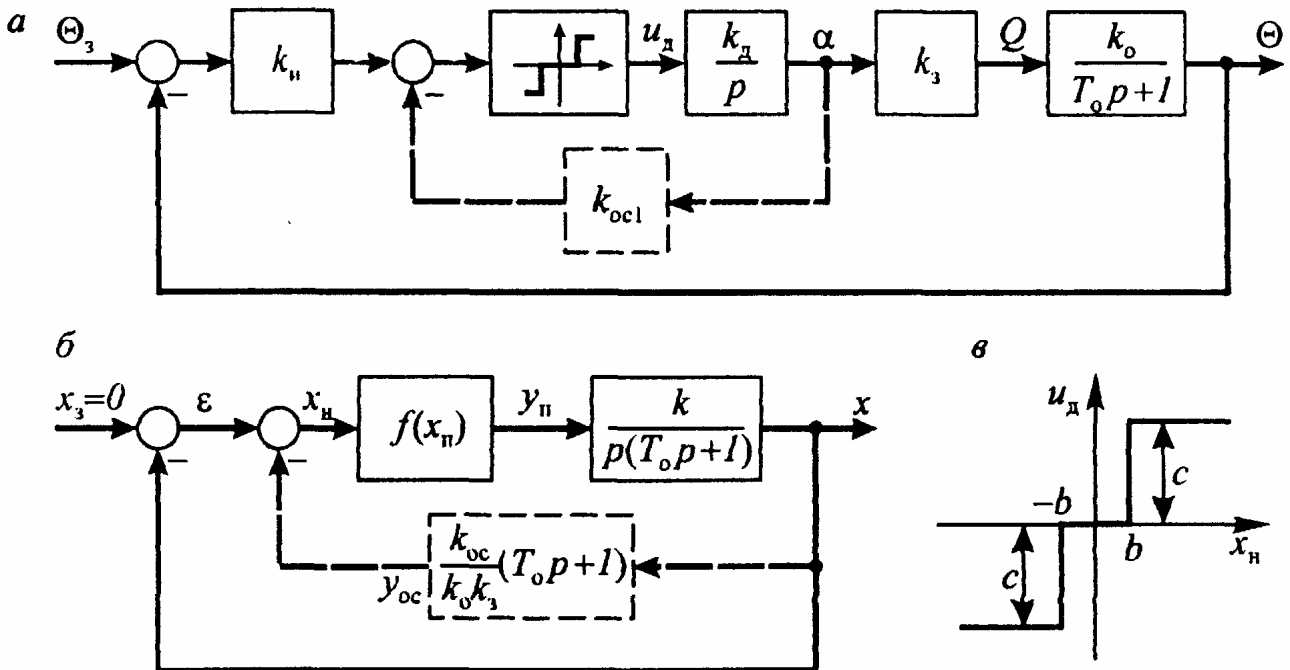


Рисунок 12.9. Вихідна (а) і розрахункова (б) алгоритмічні схеми системи стабілізації температури й характеристика реле (в)

При відсутності внутрішнього зворотного зв'язка сигнал $x_H = \varepsilon$.

Будемо розглядати тільки відхилення температури Θ від її заданого значення Θ_3 , позначаючи їх символом x . Тоді сигнал помилки $\varepsilon = -x$, а рівняння замкнутої системи у відхиленнях буде мати вигляд

$$T_0 \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = k_{\text{Л}} f(x), \quad (12.8)$$

$$f(x) = \begin{cases} +c & \text{при } x < -b \\ 0 & \text{при } |x| < b \\ -c & \text{при } x > b \end{cases} \quad (12.9)$$

Рівняння (12.8) еквівалентно системі двох рівнянь першого порядку, яка записана у формі Коші:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{-x_2 + k_{\text{Л}} f(x_1)}{T_0} \end{cases} \quad (12.10)$$

де $x_1 = x = \Delta\Theta = \Theta - \Theta_3$, $x_2 = x_1'$.

Розділивши друге рівняння на перше, отримаємо нелінійне рівняння фазових траєкторій

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-1 + k_{\text{Л}} \frac{f(x_1)}{x_2}}{T_0} \quad (12.11)$$

Відповідно до виду функції (12.9) розділимо фазову площину (рис.12.10) на три області. В області I, що відповідає значенням $|x_H| < b$ рівняння (12.11) приймає вид

$$dx_2 = \frac{-1}{T_0} dx_1 \quad (12.12)$$

воно легко інтегрується. Його рішення

$$x_2 = \frac{-1}{T_0} x_1 + C_{01} \quad (12.13)$$

де C_{01} - постійна інтегрування, що залежить від початкових умов.

Таким чином, у середній області I фазові траєкторії являють собою прямі лінії з негативним нахилом $1/T_0$.

В областях II і III, де відповідно $x > b$ й $x < -b$ $f(x_1) = -c$ і $f(x_1) = +c$, рівняння (12.11) приймає такий вид:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-1 - k_{\text{Л}} \frac{c}{x_2}}{T_0}, \quad \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-1 + k_{\text{Л}} \frac{c}{x_2}}{T_0} \quad (12.14)$$

Розділяючи змінні x_1 й x_2 , одержимо

$$dx_1 = \frac{-T_0 x_2}{x_2 \pm k_{\text{Л}} c} dx_2 \quad (12.15)$$

Після інтегрування вираження (12.15) знаходимо рівняння фазових траєкторій

$$\begin{aligned} x_1 &= -T_0 x_2 - T_0 k_{Лс} \cdot \ln|x_2 + k_{Лс}| + C_{II} \\ x_1 &= -T_0 x_2 + T_0 k_{Лс} \cdot \ln|x_2 - k_{Лс}| + C_{III} \end{aligned} \quad (12.16)$$

На рис.12.10 приведені фазові траєкторії, які побудовано при різних значеннях постійних C і наступних параметрах системи: $T_0 = 10$ с, $k_{Л} = 0,04$ °C/(B·с), $z = 50$ У, $b = 2$ °C. Жирною лінією виділена фазова траєкторія, що відповідає початковому відхиленню температури $\Delta\Theta = x_0 = +10$ °C.

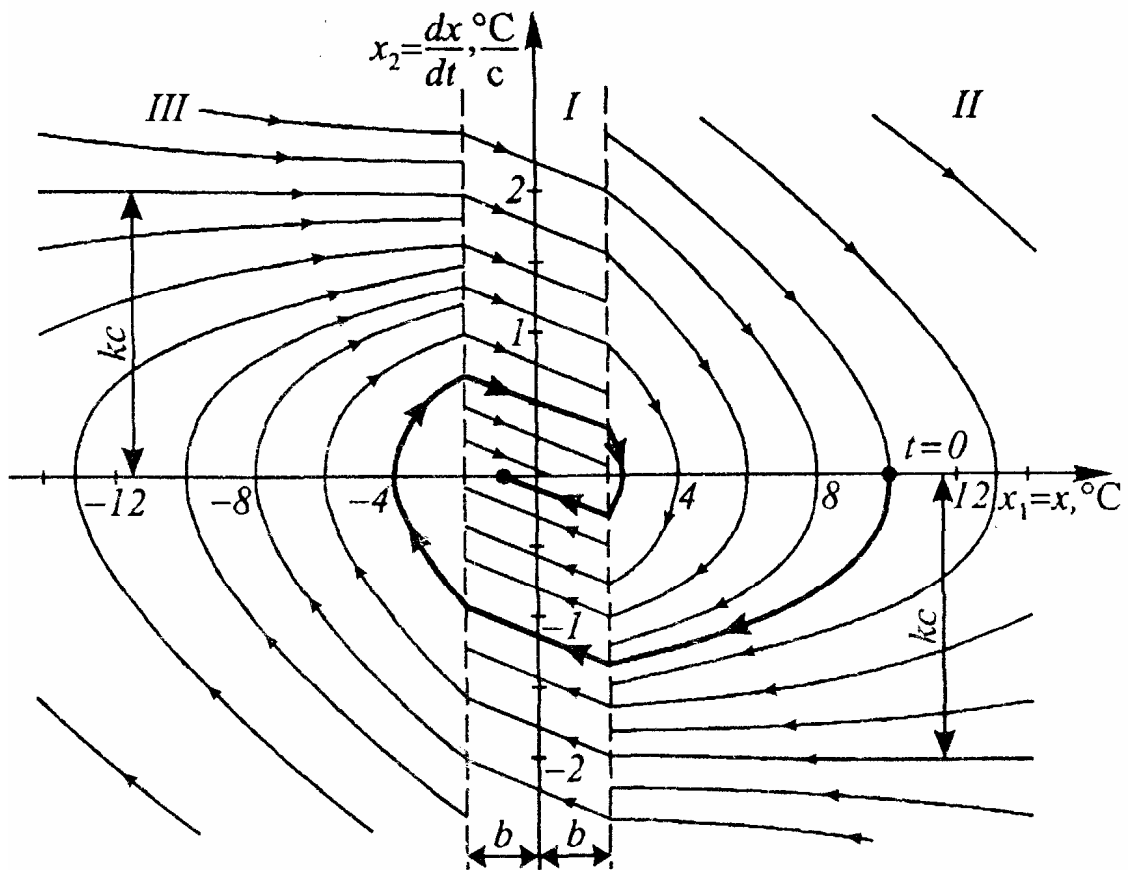


Рисунок 12.10. Фазовий портрет системи стабілізації температури

По фазовому портрету бачимо, що після будь-яких початкових відхилень температури і її похідної у системі відбувається загасаючий коливальний процес, що триває доти, поки відхилення температури не стануть менше зони нечутливості $b = 2$ °C.

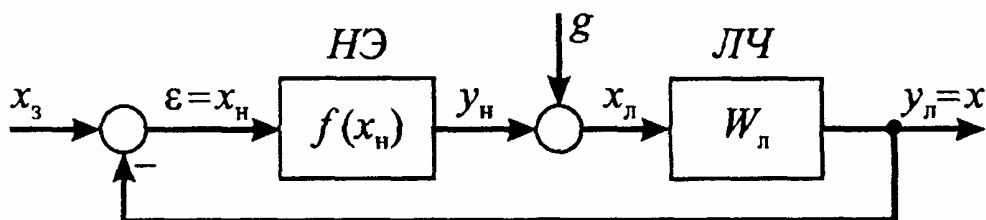
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 13
 РОЗРАХУНОК АВТОКОЛИВАНЬ У НЕЛІНІЙНИХ САУ МЕТОДОМ
 ГАРМОНІЧНОЇ ЛІНЕАРИЗАЦІЇ

Є наближеним методом дослідження режиму автоколивань нелінійних систем. Цим методом можна визначити умови виникнення й параметри автоколивань як у системах другого порядку, так і в більш складних системах

Метод полягає в заміні істотного нелінійного елемента з характеристикою $f(x)$ еквівалентною лінійною ланкою з коефіцієнтом k . У замкнутій САУ, що працює в режимі автоколивань, умовою еквівалентності служить рівність амплітуд і фаз вихідного сигналу реального нелінійного елемента. При цьому припускається, що сигнал на вході нелінійного елемента є синусоїдальним. Таке припущення справедливо у всіх випадках, коли лінійна частина системи досить інерційна й не пропускає високочастотні гармоніки.

Нехай САУ складається з віддільних друг від друга лінійної й нелінійної частин, і нелінійна частина описується рівнянням:

$$y_n(t) = f(x_n(t), x'_n(t)) \quad (13.1)$$



Припустимо, що контур системи розімкнuto (на виході лінійної частини) і що на вході нелінійного елемента діє синусоїдальний сигнал

$$x_n(t) = x_{nm} \sin \omega t \quad (13.2)$$

При цьому на виході нелінійного елемента буде виникати періодичний сигнал $y_n(t)$, форма якого залежить від характеру нелінійності й у загальному випадку істотно відрізняється від синусоїдальної.

Рівняння нелінійної частини (13.1) при синусоїдальному впливі (13.2) можна записати в такому загальному виді:

$$y_n(t) = f[x_n(t), x'_n(t)] = f[x_{nm} \sin \omega t, x_{nm} \omega \cos \omega t] \quad (13.3)$$

Опускаючи теоретичне обґрунтування, що приводиться в літературі, можна замість вираження (13.3) записати

$$y_n(t) \approx q(x_{nm})x_n(t) + q_1(x_{nm})x'_n(t)/\omega \quad (13.4)$$

або в операторній формі

$$y_n(t) \approx q(x_{nm})x_n(t) + q_1(x_{nm})px_n(t)/\omega \quad (13.5)$$

Таким чином, нелінійне рівняння (13.3) може бути замінено лінійним рівнянням (13.4). Ця операція називається **гармонічною лінеаризацією**, а коефіцієнти $q(x_{nm})$ й $q_1(x_{nm})$ - **коефіцієнтами гармонічної лінеаризації**.

У табл. 14.1. приведені коефіцієнти гармонічної лінеаризації $q(x_{nm})$ й $q_1(x_{nm})$ для нелінійностей, що часто зустрічаються .

Гармонічна лінеаризація принципово відрізняється від звичайної лінеаризації, тому що коефіцієнти гармонічно лінеаризованного елемента непостійні, а залежать від амплітуди вхідного сигналу x_{nm} . Однак при певному режимі періодичних коливань, коли значення ω й x_{nm} фіксовані, коефіцієнти гармонічної лінеаризації мають також постійні значення. Завдяки цьому для рішення деяких завдань аналізу нелінійних систем можуть бути використані поняття й методи теорії лінійних систем.

З рівняння (13.5) можна отримати **еквівалентну передаточну функцію нелінійного елемента**

$$W_H(p, x_{nm}, \omega) = \frac{y_n(p)}{x_n(p)} = q(x_{nm}) + q_1(x_{nm})p/\omega \quad (13.6)$$

а підстановкою в неї $p = j\omega$ - **еквівалентну АФЧХ**

$$W_H(x_{nm}) = q(x_{nm}) + jq_1(x_{nm}) \quad (13.7)$$

Модуль функції (13.7) $W_H(x_{nm})$

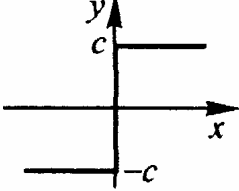
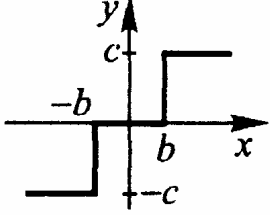
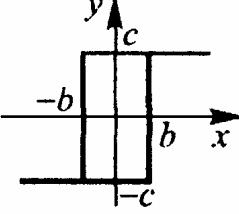
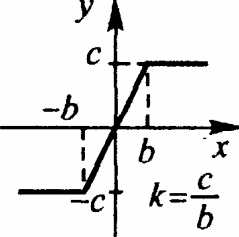
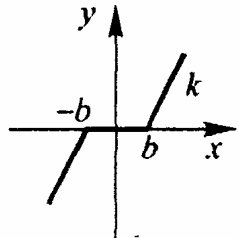
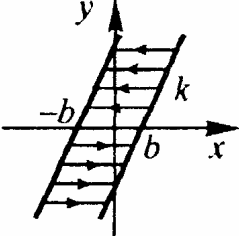
$$A_H(x_{nm}) = \frac{y_{m1}}{x_m} = \sqrt{[q(x_{nm})]^2 + [q_1(x_{nm})]^2} \quad (13.8)$$

визначає відношення амплітуди першої гармоніки вихідного сигналу до амплітуди вхідного сигналу, а аргумент функції

$$\varphi_H(x_{nm}) = \operatorname{arctg} \frac{q_1(x_{nm})}{q(x_{nm})} \quad (13.9)$$

- фазове зрушення між першою гармонікою й вхідним сигналом.

Таблиця 13.1.

	$y_n = f(x_n)$	$q(x_m)$	$q_1(x_m)$
1		$\frac{4c}{\pi x_m}$	0
2		$\frac{4c}{\pi x_m^2} \sqrt{x_m^2 - b^2}$ при $x_m > b$	0
3		$\frac{4c}{\pi x_m^2} \sqrt{x_m^2 - b^2}$ при $x_m > b$	$-\frac{4cb}{\pi x_m^2}$ при $x_m > b$
4		$\frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{x_m} + \frac{b}{x_m^2} \sqrt{x_m^2 - b^2} \right)$ при $x_m > b$	0
5		$k - \frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{x_m} + \frac{b}{x_m^2} \sqrt{x_m^2 - b^2} \right)$ при $x_m > b$	0
6		$\frac{k}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin \left(1 - \frac{2b}{x_m} \right) + 2 \left(1 - \frac{2b}{x_m} \right) \times \sqrt{\frac{b}{x_m} \left(1 - \frac{b}{x_m} \right)} \right]$	$-\frac{4kb}{\pi x_m} \left(1 - \frac{b}{x_m} \right)$ при $x_m > b$

Перейдемо тепер безпосередньо до використання методу гармонічної лінеаризації для дослідження режиму автоколивань.

Якщо відомі ПФ лінійної частини

$$W_L(p) = \frac{K_L(p)}{D_L(p)} \quad (13.10)$$

і еквівалентна ПФ (13.6) нелінійної частини, то можна записати еквівалентну ПФ розімкнутого контуру нелінійної САУ

$$W(p, x_m, \omega) = W_L(p)W_H(p, x_m, \omega) = \frac{K_L(p)}{D_L(p)} \cdot [q(x_{nm}) + q_1(x_{nm})p/\omega] \quad (13.11)$$

і характеристичне рівняння замкнутої гармонічно лінеаризованої системи

$$F(p, x_m, \omega) = D_L(p) + K_L(p) \cdot [q(x_{nm}) + q_1(x_{nm})p/\omega] = 0 \quad (13.12)$$

У режимі автоколивань амплітуда x_m і частота ω залишаються постійними. Отже, і функція $W(p, x_m, \omega)$ в цьому режимі постійна, а вираження (13.11) і (13.12) лінійні, і їх можна аналізувати звичайними методами теорії лінійних САУ.

Існуванню в нелінійній САУ автоколивань відповідає знаходження лінеаризованої системи (13.12) на коливальній границі стійкості. Для визначення коливальної границі можна використовувати будь-який із критеріїв стійкості, що застосовуються для лінійних систем.

Критерій Михайлова.

Для того щоб установити, чи можливі в системі автоколивання виду $x(t) = x_{ma} \sin \omega_a t$ з постійною амплітудою x_{ma} й частотою ω_a , необхідно в характеристичне рівняння (19) підставити чисто мнимий корінь $p = j\omega_a$:

$$D_L(j\omega_a) + K_L(j\omega_a) \cdot [q(x_{nm}) + q_1(x_{nm})j\omega_a/\omega_a] = 0 \quad (13.13)$$

і вирішити його щодо невідомих x_{ma} і ω_a .

Розв'язання рівняння (13.13) спрощується завдяки тому, що в лівій частині завжди можуть бути виділені дійсна й мнима складові, які порізно також дорівнюють нулю:

$$\begin{cases} P(x_{ma}, \omega_a) = 0 \\ Q(x_{ma}, \omega_a) = 0 \end{cases} \quad (13.14)$$

Одночасне виконання рівностей (13.14) відповідає проходженню характеристичної кривої $F(x_m, j\omega)$ через початок координат.

Якщо рівняння (13.14) не мають позитивних дійсних коренів x_{ma} і ω_a , то автоколивання в системі неможливі.

Після відшукування параметрів x_{ma} і ω_a необхідно перевірити, чи відповідають вони стійким автоколиванням. Для цього використовують наступну умову стійкості автоколивань:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x_m}\right)^* \left(\frac{\partial Q}{\partial \omega}\right)^* - \left(\frac{\partial P}{\partial \omega}\right)^* \left(\frac{\partial Q}{\partial x_m}\right)^* > 0 \quad (13.15)$$

де зірочка означає, що в частинні похідні, отримані з виразів (13.14), необхідно підставити знайдені чисельні значення параметрів x_{ma} і ω_a .

Критерій Найквіста

Якщо лінійна частина описується рівнянням високого порядку або містить запізнювання, то аналітичне розв'язання системи (13.14) важко або неможливо. У цих випадках автоколивання можна відшукати за допомогою критерію Найквіста.

Згідно критерію Найквіста, система знаходиться на коливальній границі стійкості, якщо АФХ розімкнутого контуру проходить через точку $(-1; j0)$. Отже, умовою існування автоколивань є рівність

$$W_{\text{Л}}(j\omega_a)W_{\text{Н}}(x_{ma}) = -1 \quad (13.16)$$

або

$$W_{\text{Л}}(j\omega_a) = \frac{-1}{W_{\text{Н}}(x_{ma})} \quad (13.17)$$

Ліва частина рівняння (13.17) являє собою АФХ всіх лінійних ланок системи, а права - зворотну характеристику нелінійного елемента, узятую із протилежним знаком.

Рівняння (13.17) зручно вирішувати графічно. Для цього необхідно побудувати указані характеристики в одній системі координат (рис.13.1.). У точках перетинання кривих виконується рівність (13.17). Ці точки визначають параметри автоколивань. Позначка поточної частоти на кривій $W_{\text{л}}(j\omega)$ визначає частоту автоколивань ω_a , а позначка поточної амплітуди на кривій $-1/W_{\text{н}}(x_m)$ - амплітуду автоколивань x_{ma} .

Якщо характеристики не перетинаються, то автоколивання відсутні.

Факт стійкості або нестійкості знайденого режиму автоколивань встановлюють за допомогою наступного правила: якщо точка на кривій $-1/W_{\text{н}}(x_m)$, близька до точки перетинання, але зрушена в напрямку зростання параметра x_m , не охоплюється характеристикою $W_{\text{л}}(j\omega)$, то автоколивання стійкі, якщо ж охоплюється, - то нестійкі. На рис. точка M_2 відповідає стійким автоколиванням, а точка M_1 - нестійким.

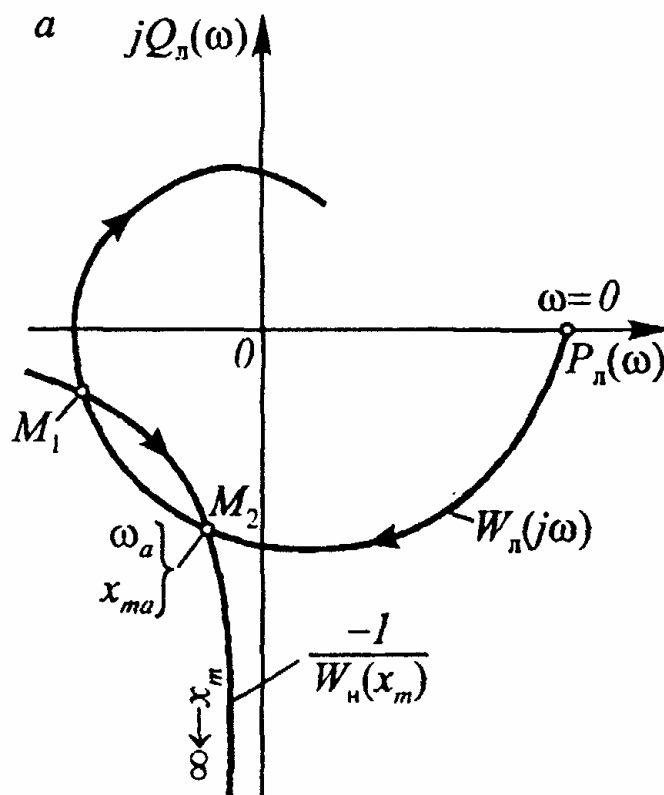


Рисунок 13.1. До визначення автоколивань за критерієм Найквіста

Приклади розв'язання задач

Задача 13.1.

Визначимо амплітуду й частоту автоколивань у системі стабілізації температури, що працює без внутрішнього зворотного зв'язка (див. задачу 12.2) при наступних параметрах системи: $k_n = 0,04 \text{ } ^\circ\text{C}/(\text{B} \cdot \text{c})$; $c = 50 \text{ C}$; $b = 2 \text{ } ^\circ\text{C}$; $T_o = 10 \text{ з}$; $T_D = 0,5 \text{ с}$.

Рішення.

Передаточна функція лінійної частини (з урахуванням інерційності виконавчого двигуна)

$$W_L(p) = \frac{k_n}{p(T_o p + 1)(T_D p + 1)}, \quad (13.18)$$

а еквівалентна передаточна функція нелінійного елемента - трипозиційного реле (див. табл. 13.1)

$$W_H(p, x_{nm}) = q(x_{nm}) = \frac{4c\sqrt{x_m^2 - b^2}}{\pi x_m^2}. \quad (13.19)$$

Характеристичний поліном системи

$$F(p, x_m) = T_o T_D p^3 + (T_o + T_D) p^2 + p + k_n q(x_m) \quad (13.20)$$

Підставимо в поліном (13.20) $p = j\omega_a$ і дорівнюємо його дійсну й мниму складові до нуля

$$\begin{cases} P(\omega_a, x_{ma}) = k_n q(x_{ma}) - (T_o + T_D) \omega_a^2 = 0; \\ Q(\omega_a, x_{ma}) = (1 - T_o T_D \omega_a^2) \omega_a = 0 \end{cases} \quad (13.21)$$

Із другого рівняння системи (13.21) можна визначити частоту автоколивань

$$\omega_a = \frac{1}{\sqrt{T_o T_D}}, \quad (13.22)$$

яка в цьому випадку залежить тільки від постійних часу.

Підставляючи значення ω_a в перше рівняння системи (13.21), отримаємо рівняння з одним невідомим - амплітудою x_{ma}

$$k_{л} \frac{4c\sqrt{x_{ma}^2 - b^2}}{\pi x_{ma}^2} - \frac{T_O + T_D}{T_O T_D} = 0, \quad (13.23)$$

яке можна привести до виду

$$Ax_{ma}^4 - x_{ma}^2 + b^2 = 0 \quad (13.24)$$

де $A = \frac{\pi^2 (T_O + T_D)^2}{16k_{л}^2 c^2 T_O^2 T_D^2}$.

Перш ніж вирішувати це бікватратне рівняння при конкретних значеннях коефіцієнтів, дослідимо його дискримінант

$$D = 1 - 4Ab^2 \quad (13.25)$$

Рівняння (13.24) має дійсні корені x_{ma}^2 (а в системі відповідно можливі автоколивання з амплітудою x_m) тільки в тому випадку, якщо дискримінант $D > 0$, тобто якщо

$$2k_{л}cT_O T_D - \pi(T_O + T_D)b > 0 \quad (13.26)$$

При заданих в параметрах нерівність (13.26) не виконується, отже, автоколивання в системі не можуть виникнути.

З умови (13.26) можна визначити граничне значення коефіцієнта передачі лінійної частини:

$$k_{л.гр} = \frac{\pi(T_O + T_D)b}{2cT_O T_D} \quad (13.27)$$

При більшому значенні коефіцієнта лінійної частини автоколивання можливі. Наприклад, при $k_{л} = 0,4$ рівняння (13.24) має два дійсних рішення; $x_{ma} = 2,1^\circ\text{C}$ і $x_{ma} = 12^\circ\text{C}$.

Для того щоб установити, яке із цих двох рішень відповідає стійким коливанням, застосуємо загальну умову стійкості автоколивань (13.15). У цьому випадку маємо

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial x_m} \Big|_{x_m=x_{ma}} = \frac{4k_{\text{л}}c(2b^2 - x_{ma}^2)}{\pi x_{ma}^3 \sqrt{x_{ma}^2 - b^2}}, \\ \frac{\partial P}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_a} = -2(T_O + T_D)\omega_a; \\ \frac{\partial Q}{\partial x_m} = 0; \\ \frac{\partial Q}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_a} = 1 - 3T_O T_D \omega_a^2. \end{array} \right. \quad (13.28)$$

Підставляючи значення частинних похідних (13.28) в умову (13.15) і з урахуванням вираження (13.22) для частоти, отримаємо

$$\frac{4k_{\text{л}}c(2b^2 - x_{ma}^2)(1-3)}{\pi x_{ma}^3 \sqrt{x_{ma}^2 - b^2}} > 0 \quad (13.29)$$

або

$$x_{ma} > b\sqrt{2}. \quad (13.30)$$

Цій умові задовольняє тільки друге рішення. Отже, у системі будуть виникати стійкі автоколивання з амплітудою $x_{ma} = 12^\circ\text{C}$ й частотою

$$\omega_a = \frac{1}{\sqrt{T_O T_D}} \approx 0,45 \text{ c}^{-1}.$$

Покажемо, що при відсутності зони нечутливості реле в системі завжди будуть виникати стійкі автоколивання. Дійсно, при $b=0$ рівняння (13.24) завжди має одне дійсне рішення

$$x_{ma} = \frac{4k_{\text{л}}T_O T_D}{\pi(T_O + T_D)}.$$

Задача 13.2

Визначимо амплітуду й частоту автоколивань системи, що складається із трипозиційного реле й лінійної частини із запізнюванням:

$$W_{\text{л}}(p) = \frac{k_{\text{л}}e^{-p\tau}}{Tp + 1}$$

Параметри системи: $k_{\text{л}} = 1$, $T = 10 \text{ c}$, $\tau = 5 \text{ c}$, $c = 25$, $b = 1$.

Рішення.

Оскільки система має запізнювання, застосуємо графічний спосіб розв'язання.

На рис.13.2 побудовані АФХ лінійної частини й зворотна характеристика реле

$$-1/W_H(x_m) = -\pi x_m^2 / 4c\sqrt{x_m^2 - b^2}. \quad (13.31)$$

Характеристика (13.31) двічі проходить уздовж дійсної осі $P(\omega)$. При $x_m=b=1$ характеристика починається від $-\infty$, при $x_m = b\sqrt{2} \approx 1,4$ досягає максимального значення $\pi b/2c$, а потім при $x_m \rightarrow \infty$ знову прагне к. $-\infty$

Характеристики лінійної й нелінійної частин перетинаються у двох точках. Відповідно до наведеного вище правила, точка M_1 (на верхній гілці зворотної характеристики) відповідає нестійким коливанням, а точка M_2 (на нижній гілці) - стійким. Амплітуда автоколивань $x_{ma} \approx 8$, а частота $\omega_a \approx 0,375 c^{-1}$

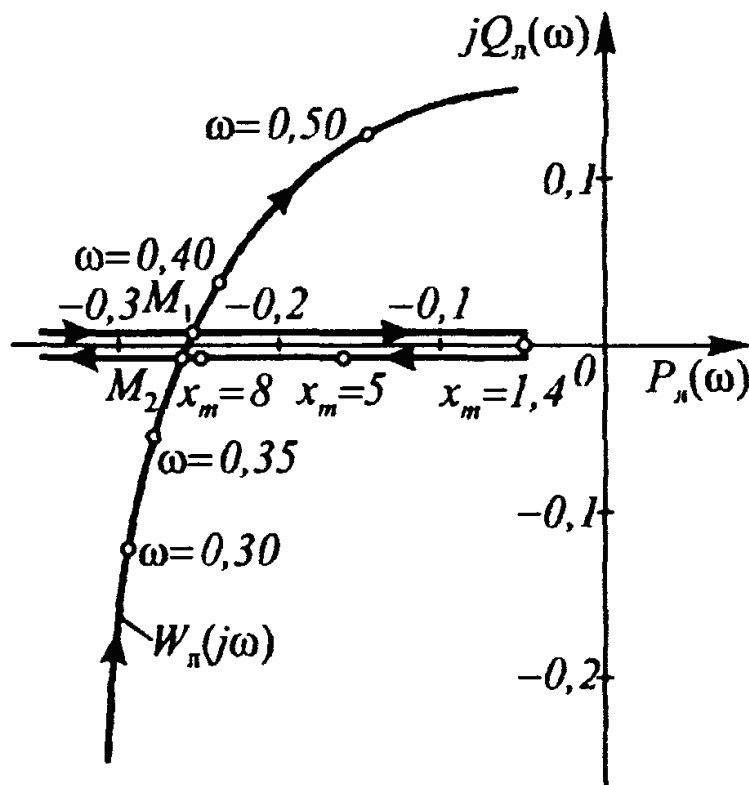


Рисунок 13.2. Характеристики до задачі 13.2.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 14

РОЗРАХУНОК СТІЙКОСТІ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ЗА ДОПОМОГОЮ ЧАСТОТНОГО КРИТЕРІЮ АБСОЛЮТНОЇ СТІЙКОСТІ В.М.ПОПОВА.

При вирішенні практичних задач аналізу й синтезу нелінійних САУ часто виникає необхідність оцінки стійкості стану рівноваги й визначення припустимих варіацій форми й параметрів статичної характеристики нелінійного елемента. Ці дві задачі пов'язані з поняттям і критерієм абсолютної стійкості нелінійної системи.

Нехай у контурі нелінійної САУ міститься нелінійний елемент із характеристикою $f(x_n)$, що має будь-яку форму, але такою, що не виходить за межі певного сектора $[0, k_H]$ (рис 14.1,а).

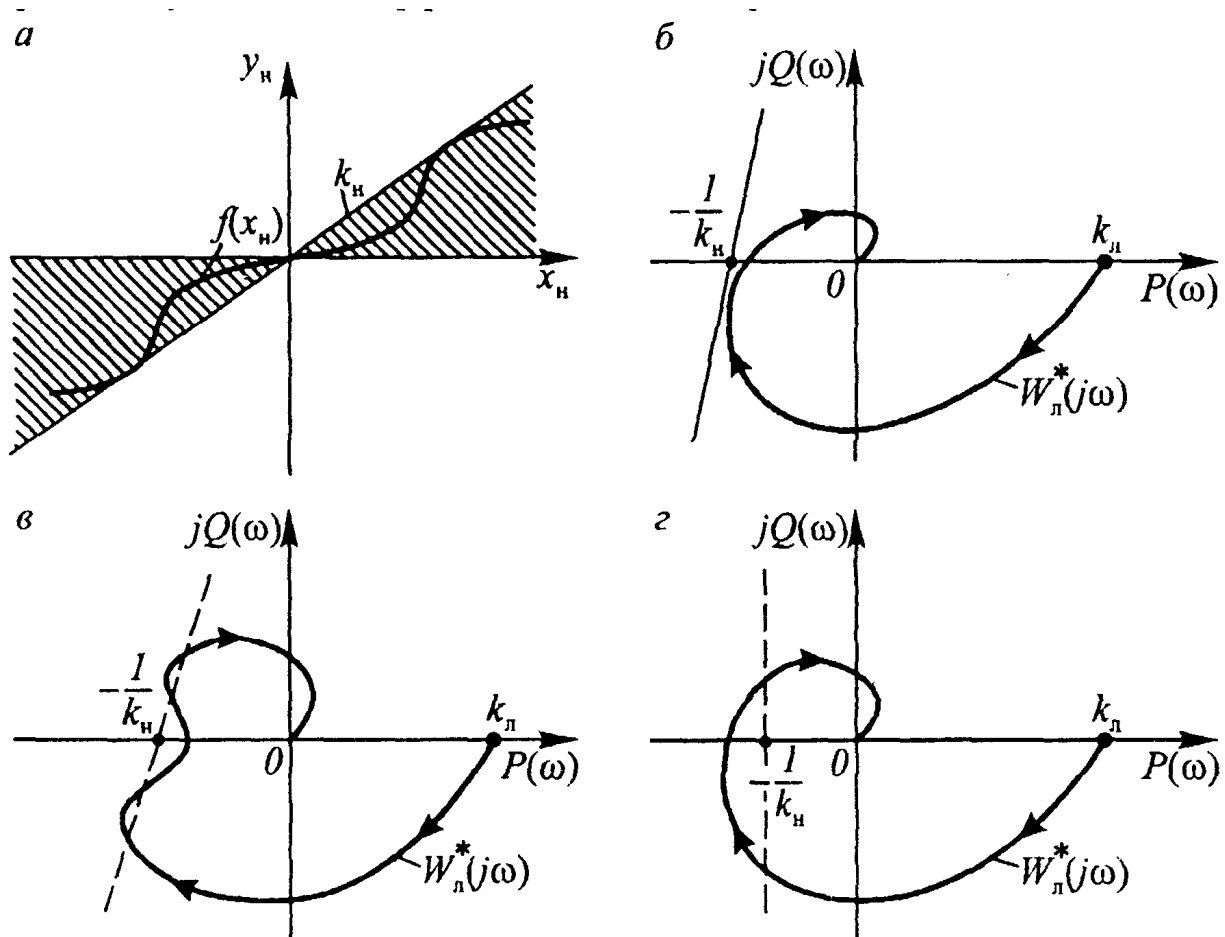


Рисунок 14.1. До розгляду критерію абсолютної стійкості Попова

Стан рівноваги нелінійної системи називається **абсолютно стійким**, якщо він є стійким при будь-якій нелінійності, що належить до певного класу. Нелінійності вважаються одного класу, якщо їхні характеристики $f(x_H)$ розташовуються в секторі між віссю абсцис і прямою з кутовим коефіцієнтом k_H (див. рис 14.1,а).

Зручний критерій для судження про абсолютну стійкість нелінійних САУ запропонував в 1959 р. румунський учений В.Попов. Його критерій заснований, як і критерій Найквіста, на використанні АФЧХ.

У формулюванні критерію використовується поняття модифікованої АФЧХ. Нехай лінійна частина стійка й має наступну АФЧХ:

$$W_{\text{Л}}(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

Утворимо із цієї звичайної АФЧХ наступну видозмінену АФЧХ:

$$W_{\text{Л}}^*(j\omega) = P(\omega) + j\omega T_M Q(\omega)$$

у якої мнима частина отримана множенням $Q(\omega)$, на ωT_M , де $T_M = 1$ с - множник, що нормує. Характеристика $W_{\text{Л}}^*(j\omega)$ називається **модифікованою**.

Тепер можна в такий спосіб сформулювати критерій абсолютної стійкості рівноваги нелінійної САУ, що складається з лінійної частини з АФЧХ $W_{\text{Л}}(j\omega)$ і нелінійного елемента з характеристикою $f(x_H)$, яка розташована в секторі $[0, k_H]$:

для абсолютної стійкості рівноваги досить, щоб модифікована характеристика $W_{\text{Л}}^(j\omega)$ не охоплювала точку $(-1/k_H, j0)$ й через цю точку можна було провести пряму, що не перетинає характеристику $W_{\text{Л}}^*(j\omega)$ (остання лежить праворуч від прямої).*

На рис.14.1,б показаний випадок, коли критерій Попова виконується, а на 14.1,в,г - випадки, коли не виконується.

За допомогою критерію Попова вирішують і зворотню задачу, будують задану характеристику $W_{\text{Л}}^*(j\omega)$, потім проводять якнайближче до цієї

характеристики пряму так, щоб отримати найменший відрізок $[0, -1/k_H]$, і в такий спосіб знаходять припустиме значення кутового коефіцієнта k .

По нахилу прямої Попова, «притиснутої» до кривої $W_L^*(j\omega)$, можна судити про припустимий клас нелінійності: якщо пряма вертикальна, то нелінійність може бути тільки однозначною, а якщо вона нахилена, то нелінійність може бути й однозначною, і неоднозначною (наприклад, з гістерезисом).

Приклади розв'язання задач

Задача 14.1.

Структурна схема нелінійної автоматичної системи зображена на рис.14.2,а. Коефіцієнт передачі лінійної частини системи й нелінійної ланки $k = k_n k_d$ умовно віднесений до нелінійної ланки. Визначити, при яких значеннях k система буде абсолютно стійка, якщо характеристика нелінійної ланки розташована в сектори $(0, k)$ (рис. 14.2,б). Вихідні дані: постійна часу лінійної частини системи $T_1 = 0,5c$, $T_2 = 0,2c$, $T_3 = 0,1c$.

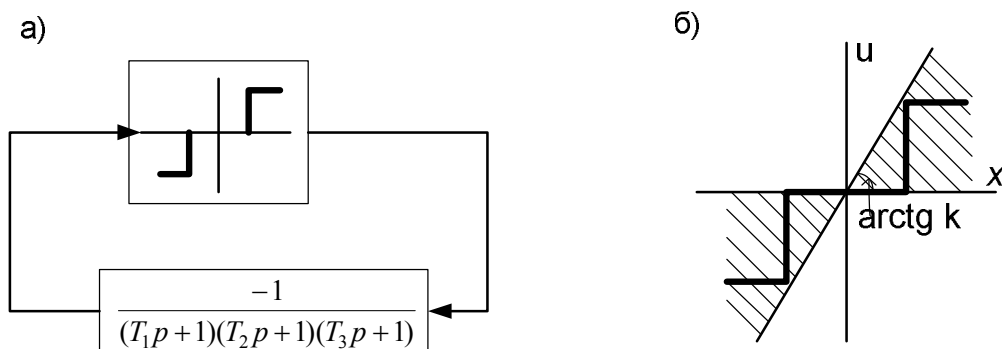


Рисунок 14.2. Структурна схема системи й статична характеристика нелінійної ланки.

Рішення.

Частотна передаточна функція лінійної частини системи має вигляд

$$W(j\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)(1 + j\omega T_3)}. \quad (14.1)$$

Її дійсна й мнима частини відповідно рівні

$$P(\omega) = \operatorname{Re}W(j\omega) = \frac{1 - \omega^2(T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3)}{(1 + \omega^2T_1^2)(1 + \omega^2T_2^2)(1 + \omega^2T_3^2)}, \quad (14.2)$$

$$Q(\omega) = \operatorname{Im}W(j\omega) = \frac{-\omega(T_1 + T_2 + T_3) + \omega^3T_1T_2T_3}{(1 + \omega^2T_1^2)(1 + \omega^2T_2^2)(1 + \omega^2T_3^2)}. \quad (14.3)$$

Введемо деякі функції $P^*(j\omega)$ й $Q^*(j\omega)$ у такий спосіб:

$$P(\omega) = \operatorname{Re}W(j\omega) = \frac{1 - \omega^2(T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3)}{(1 + \omega^2T_1^2)(1 + \omega^2T_2^2)(1 + \omega^2T_3^2)}, \quad (14.4)$$

$$Q^*(\omega) = \omega \operatorname{Im}W(j\omega) = \frac{-\omega^2(T_1 + T_2 + T_3) + \omega^4T_1T_2T_3}{(1 + \omega^2T_1^2)(1 + \omega^2T_2^2)(1 + \omega^2T_3^2)} \quad (14.5)$$

По вираженнях (14.4) і (14.5) побудуємо характеристику $Q^*(\omega) = f[P^*(\omega)]$ й через точку $(-1/k, j0)$ проведемо пряму Попова так, щоб побудована характеристика цілком лежала праворуч від цієї прямої (рис.14.3.)

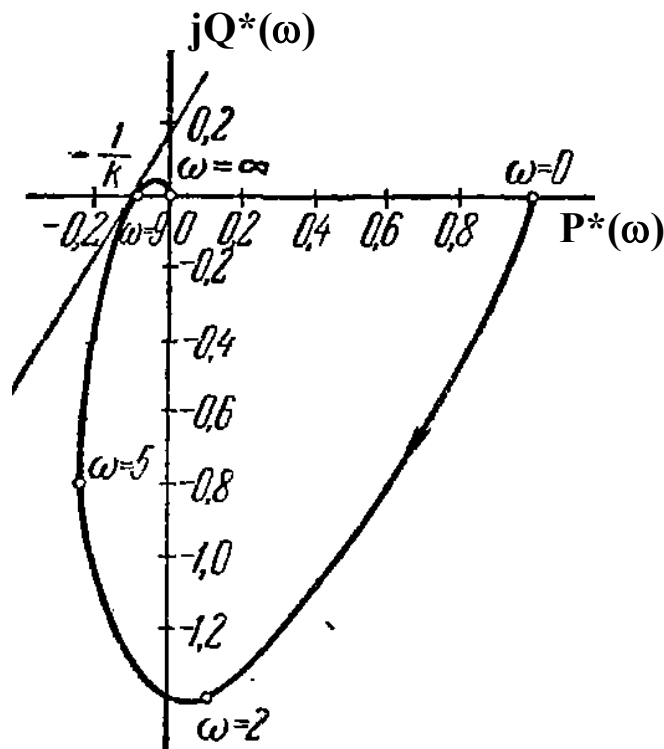


Рисунок 14.3. Модифікована АФЧХ до задачі 14.1.

Згідно рис.14.3. $1/k \approx 0,08$. Тому система абсолютно стійка для всіх нелінійних характеристик розташованих у секторі

$$0 < k < 12,5 \quad (14.6)$$

і, зокрема, для характеристики релейного типу, зображеної на рис.14.2,б.

Таким чином, достатня умова абсолютної стійкості замкнутої нелінійної системи зводиться в цьому випадку до виконання необхідної й достатньої умови стійкості замкнутої лінійної системи, що має в розімкнутому стані коефіцієнт передачі, рівний k .

Задача 14.2.

Структурна схема нелінійної автоматичної системи зображена на рис.14.4,а. Перевірити виконання достатньої умови абсолютної стійкості системи при наступних значеннях параметрів системи: $T_1 = 5c$, $T_2 = 1,25c$, $\xi_1 = 0,5$, $\xi_2 = 0,05$, коефіцієнт передачі лінійної частини системи $k_{\text{л}} = 4$, коефіцієнт підсилення нелінійної ланки $k_{\text{н}} = c/b = 0,5$ (рис.14.4,б).

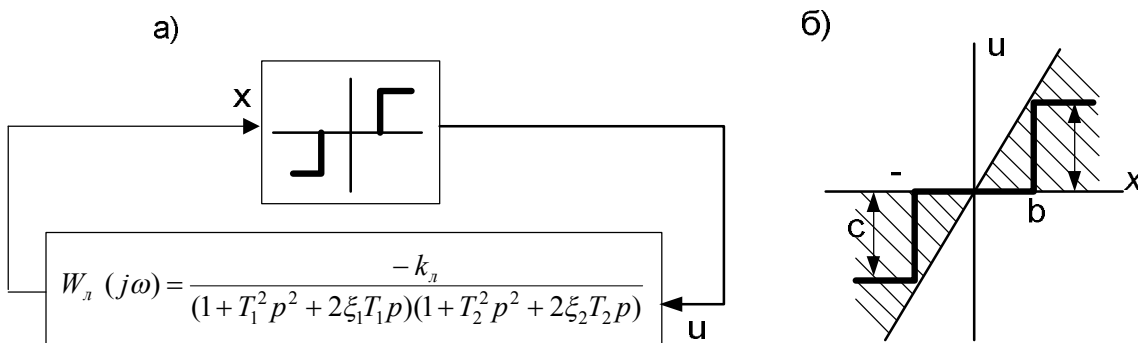


Рисунок 14.4. Структурна схема системи й характеристика нелінійної ланки.

Рішення.

Коефіцієнт передачі розімкнутої системи

$$k = k_{\text{л}} k_{\text{н}} = 4 \cdot 0,5 = 2$$

віднесемо до нелінійної ланки. Тоді частотна передаточна функція розімкнутої системи буде дорівнює

$$W_{\text{л}}(j\omega) = \frac{1}{(1 - T_1^2 \omega^2 + 2j\xi_1 T_1 \omega)(1 - T_2^2 \omega^2 + 2j\xi_2 T_2 \omega)} \quad (14.7)$$

Визначаємо функції

$$P^*(\omega) = \operatorname{Re} W_n(j\omega) = \frac{(1 - T_1^2 \omega^2)(1 - T_2^2 \omega^2) - 4\xi_1 \xi_2 T_1 T_2 \omega^2}{[(1 - T_1^2 \omega^2)^2 + 4\xi_1^2 T_1^2 \omega^2][(1 - T_2^2 \omega^2)^2 + 4\xi_2^2 T_2^2 \omega^2]}, \quad (14.8)$$

$$Q^*(\omega) = \omega \operatorname{Im} W_n(j\omega) = \frac{-2\omega^2 [(1 - T_1^2 \omega^2)\xi_2 T_2 + (1 - T_2^2 \omega^2)\xi_1 T_1]}{[(1 - T_1^2 \omega^2)^2 + 4\xi_1^2 T_1^2 \omega^2][(1 - T_2^2 \omega^2)^2 + 4\xi_2^2 T_2^2 \omega^2]}. \quad (14.9)$$

По вираження (14.8) і (14.9) будемо характеристику $Q^*(\omega) = f[P^*(\omega)]$ (рис.14.5) на речовинній осі відкладемо точку з координатами $(-1/k, j0)$. Через цю точку можна провести пряму Попова так, що вся побудована характеристика буде розташовуватися праворуч від неї. Отже, дана система буде стійкою при заданому $k=2$, якщо статична характеристика нелінійної ланки цілком розташовується в секторі $(0, k)$. Цей сектор заштрихований на рис.14.4,б.

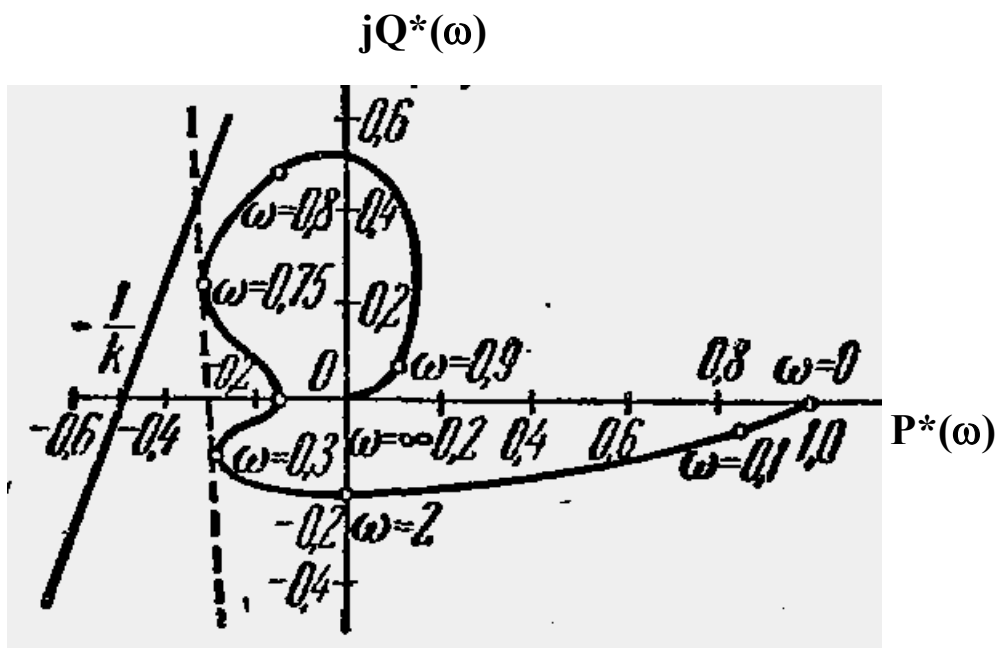


Рисунок 14.5. Модифікована АФЧХ до задачі 14.2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления. Автоматическое регулирование непрерывных линейных систем.– М.:Энергия, 1980.- 310с.
2. Теория автоматического управления. Ч. 1/ под общей редакцией Нетушила А.В. – М.: Высшая школа, 1968.- 424с.
3. Лукас В. А. Теория автоматического управления. – М.: Недра, 1990. – 416 с.
4. Попов Е.П. Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления. М.: Наука, 1989. 304 с.
5. Расчет автоматических систем / под редакцией Фатеева А.В.– М.: Высшая школа, 1973.- 336с.
- 6.Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления/под редакцией Бесекерского В.А. – М.:Наука,1978.-510с.

Навчальне видання

Методичні вказівки до проведення практичних занять з курсу

"Теорія автоматичного управління"

Частина 2

Для студентів, що навчаються за напрямками

6.050201 "Системна інженерія" (СУА) і

6.050202 "Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології" (АУП)

(для денної й заочної форм навчання)

Укладачі:

Федюн Роман Валерійович, к.т.н, доц.

Попов Владислав Олександрович, к.т.н, доц.

Найдьонова Тетяна Володимирівна, ас.

Рецензент

Секірін Олександр Іванович, к.т.н, доц.

Відповідальний
за випуск

Бессараб Володимир Іванович, к.т.н., доц., зав. каф.