ГВУЗ «Донецкий национальный технический университет»

Кафедра экономической кибернетики

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к лабораторным занятиям и организации работы студентов по курсу „Экономическая кибернетика"

Рекомендовано кафедрой
экономической кибернетики
протоколом «№ 5 от 26.12.2012 г.

Донецк, 2013

Методические указания к выполнению лабораторных работ по дисциплине «**Экономическая кибернетика**» / для студентов специальности «Экономическая кибернетика» дневной и заочной форм обучения / Сост. к.э.н., доцент.Коломицева А.О., асс. Головань Л.О. – Донецк, ДонНТУ, 2013. – 77 с.

Выполнение лабораторных работ требует применения теоретических положений к решению конкретных задач. Развитию навыков решения практических задач служит самостоятельная работа студентов, состоящая в выполнении индивидуальных заданий, варианты которых приводятся в методических указаниях.

По каждой теме, приведенной в методических указаниях, помещены содержательные примеры, охватывающие весь предназначенный для изучения материал.

Для выполнения заданий предусмотрено использование стандартных прикладных пакетов и а так же разработка индивидуальных программ.

СОДЕРАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Предметом экономической кибернетики является сложные экономические системы и усовершенствование процессов управления ими на основе использования средств моделирования и автоматизации

Цель курса: произвести первичные знания теории и практики анализа и синтеза сложных экономических систем .

Задачи курса :

Сформировать системные знания относительно базовых понятий экономической кибернетики : система, модель, управление, информация, а также понятие экономической системы управления, как объекта экономической кибернетики

Сформировать научные принципы, для управления факторами, которые влияют на процедуры анализа экономической системы

Предоставить основные задачи анализа систем общественного потребления, анализ рыночной системы на макроуровне, анализ производственной системы. В ходе изучения основных вопросов данного курса ***студенты должны знать***: основные процедуры и принципы идентификации экономических систем с помощью основных методов: системного подхода, математического моделирования, оценки неопределенности информации, как одного из критериев эффективного управления экономическими системами, принципы анализа и синтеза сложных производственных
систем основные принципы анализа и синтеза моделей экономических систем, а также самостоятельно рассматривать выделенные отдельные методики и приемы оптимизации экономических систем, определять задачи и критерии оптимизации экономических процессов.

Студенты должны уметь:

Использовать методы математического моделирования, системного подхода, для решения сугубо экономической проблемы определения поведения экономической системы;

Осуществлять на практике методы декомпозиционного анализа для построения предприятия как экономической системы, а также системного анализа для определения глобального и локальных критериев эффективности работы экономической системы определения направлений ее развития в динамике.

2. МОДУЛЬНО-ТЕМАТИЧЕСКАЯ ПРОГРАММА КУРСА

4- семестра

Название зачетных и смысловых модулей	Общее количество часов	Аудиторные занятия, часы из них		Ср	I/КР
		Л	Лр		
Зачетный модуль № 1. Концептуализация					
Смысловой модуль 1.1 Система, подсистемы, элементы	**10**	2	2	4	2
Смысловой модуль 1.2. Модели и математическое моделирование моделей	**24**	6	6	4	8
Смысловой модуль 1.3 Управления, принципы и законы управления	**10**	2	2	4	2
Смысловой модуль 1.4 Информация. Количественное измерение информации	**20**	4	4	4	8
Смысловой модуль 1.5 Экономическая система	**24**	6	6	2	10
Комплексный отчет из модулю №1				1	1
Модульная неделя Форма модульного контроля – тестирование				1	3
Зачетный модуль № 2. Анализ экономической системы					
Смысловой модуль 2.1 Основные принципы анализа и синтеза моделей экономических систем	**14**	2	2	4	6
Смысловой модуль 2.2 Анализ экономической системы. Процедуры анализа	**10**	2	2	4	2
Смысловой модуль 2.3 Анализ системы общественного потребления	**18**	4	4	4	6
Смысловой модуль 2.4 Анализ производственной системы	**22**	4	4	4	10
Смысловой модуль 2.5 Модели анализа межотраслевых связей	**16**	4	4	2	6
Комплексный отчет из модулю №2				1	1
Модульная неделя Форма модульного контроля – комплексная контрольная работа				1	3
ВСЕГО ЧАСОВ	**180**	**36**	**36**	**40**	**68**
Форма итогового контроля – дифференцированный зачет					

5-й семестр

Название зачетных и смысловых модулей	Общее количество часов	Аудиторные занятия, часы из них		Ср	I/КР
		Л	Лр		
Зачетный модуль № 1 Синтез экономической системы					
Смысловой модуль 1.1 Модели и методы анализа экономической динамики	**14**	6	4	4	-
Смысловой модуль 1.2 Методология синтеза экономической системы	**12**	4	4	4	-
Смысловой модуль 1.3 Модели и методы синтеза структуры систем управления	**12**	4	6	2	-
Смысловой модуль 1.4 Обзор подходов к синтезу экономических систем	**12**	4	4	4	-
Курсовая работа (отчет 1 раздел)	**35**				35
Комплексный отчет из модулю №1				1	1
Модульная неделя	Форма модульного контроля – тестирование			1	3
Зачетный модуль № 2 Оптимизация систем					
Смысловой модуль 2.1 Проблемы оптимизации экономических систем	**12**	4	4	4	-
Смысловой модуль 2.2 Теория оптимума систем	**10**	4	4	2	**-**
Смысловой модуль 2.3 Многокритериальная и многоуровневая оптимизация	**16**	6	6	4	**-**
Смысловой модуль 2.4 Модели и методы оптимизации в экономике	**10**	4	4	2	**-**
Курсовая работа (отчет 2 раздел)	**35**			-	35
Комплексный отчет из модулю №2				1	1
Модульная неделя	Форма модульного контроля – комплексная контрольная работа			1	3
ВСЕГО ЧАСОВ	**180**	**36**	**36**	**30**	**78**
Форма итогового контроля – экзамен					

3. ЗАДАНИЯ К ЛАБОАТОРНЫМ ЗАНЯТИЯМ

МОДУЛЬ 1

Оптимизационные экономико-математические модели

В условиях рыночных отношений, когда сырьевые ресурсы ограничены, возникает вопрос оптимизации прибыли, себестоимости и экономии ресурсов. Оптимизационные модели разного характера часто сводятся к задачам линейного программирования.

Экономико-математическая модель оптимизации содержит одну целевую функцию – математическое выражение цели, и систему ограничений, определяющих пределы изменения исследуемых характеристик объектов, процессов или явлений.

Постановка задачи. Предприятие производит 2 вида продукции: глиняные горшки и сувениры. Прибыль от реализации единицы продукции составляет 3 и 2 грн. соответственно. Производство горшков и сувениров требует работы в гончарном цехе, а затем их роспись. Работники гончарного цеха тратят 2 часа на производство горшка и 1 час – на производство сувениров. Роспись продукции занимает по 1 часу рабочего времени. В гончарном цехе работают 4 работника, рабочий день каждого составляет 5 часов, росписью готовой продукции занимаются также 4 работника, но их рабочий день составляет 4 часа. Ежемесячно предприятие продает не более 80 горшков и 200 сувениров.

Предприятие хотело бы максимизировать свой еженедельный доход.

Решение.

1. Определим переменные принятия решений: сколько горшков и сувениров производить еженедельно. x_1- количество горшков, производимых еженедельно, x_2- количество сувениров, производимых еженедельно.

2. Определим целевую функцию через переменные принятия решений, коэффициенты целевой функции представляют собой вклад каждого вида продукции в общую прибыль предприятия: $F = 3x_1 + 2x_2 \Rightarrow \max$.

3. Введем ограничения на общие затраты времени и спрос в терминах переменных принятия решений x_1 и x_2. Рассчитаем сколько часов рабочего времени может быть использовано в гончарном цехе каждую неделю всеми работниками: 4 работника$\times$4 часа$\times$5 рабочих дней. Аналогично рассчитайте для второго цеха. С учетом имеющегося ограничения на количество часов работы гончарного цеха: $2x_1 + 1x_2 \le 100$ и росписи $1x_1 + 1x_2 \le 80$. Чтобы ограничение имело смысл необходимо, чтобы каждая его составляющая имела одну и ту же единицу измерения. Ежемесячно предприятие продает не более 80 горшков и 200 сувениров, значит, считая, что в месяце 4 недели, еженедельно предприятие продает не более 20 горшков и 50 сувениров. В связи с ограниченным спросом на продукцию введем следующие ограничения: $x_1 \le 20$ и $x_2 \le 50$.

4. Для завершения формулировки модели линейного программирования необходимо ответить на вопрос: должны ли переменные принятия решений быть

неотрицательными или они могут принять как положительные, а также и отрицательные значения. В нашей задаче $x_{1,2} \geq 0$.

Математическая модель будет выглядеть следующим образом:

$F = 3x_1 + 2x_2 \Rightarrow \max$

$2x_1 + 1x_2 \leq 100$

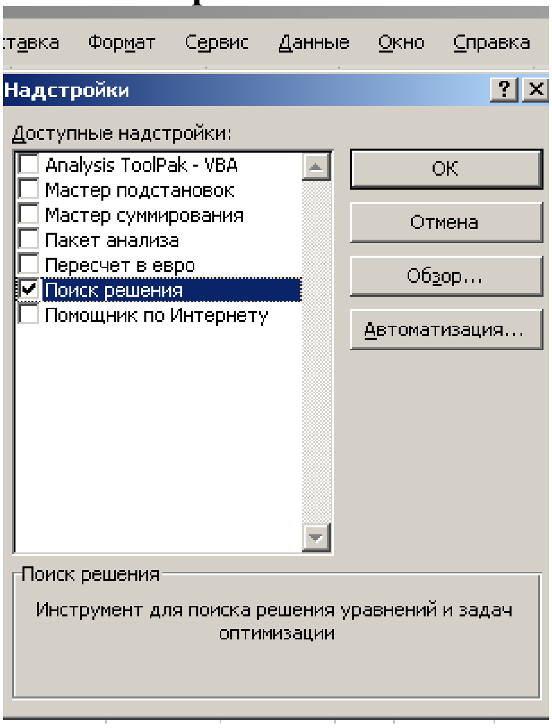
$1x_1 + 1x_2 \leq 80$

$x_1 \leq 20$

$x_2 \leq 50$

$x_{1,2} \geq 0$

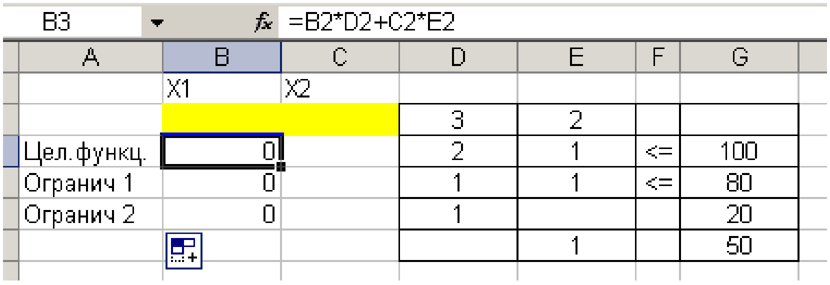
Для решения данной задачи будем использовать оптимизационные инструменты, встроенные в ППП Excel, вызвать которые можно с помощью меню строки: **Сервис – Надстройки – Поиск решения**:



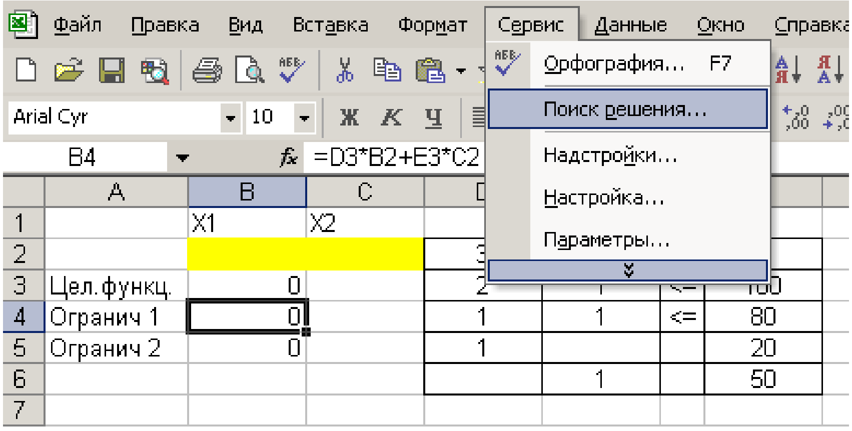
Введем исходные данные, необходимые для решения задачи. В ячейках, где должны быть рассчитаны целевая функция и ограничения введем следующие формулы:

Целевая функция	**B2*D2+C2*E2**
Ограничение 1	**B2*D3+C2*E3**
Ограничение 2	**B2*D4+C2*E4**

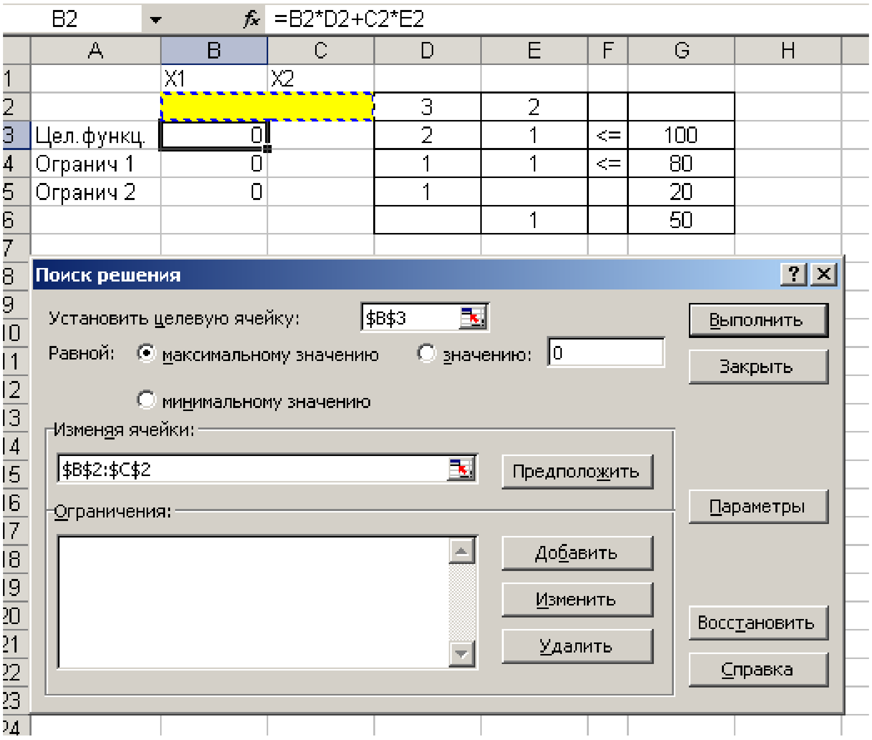
Как можно заметить, ячейки B2 и C2 (выделенные желтым цветом) при вводе исходного условия остаются пустыми, в ячейках целевой функции и ограничений появляются нули:



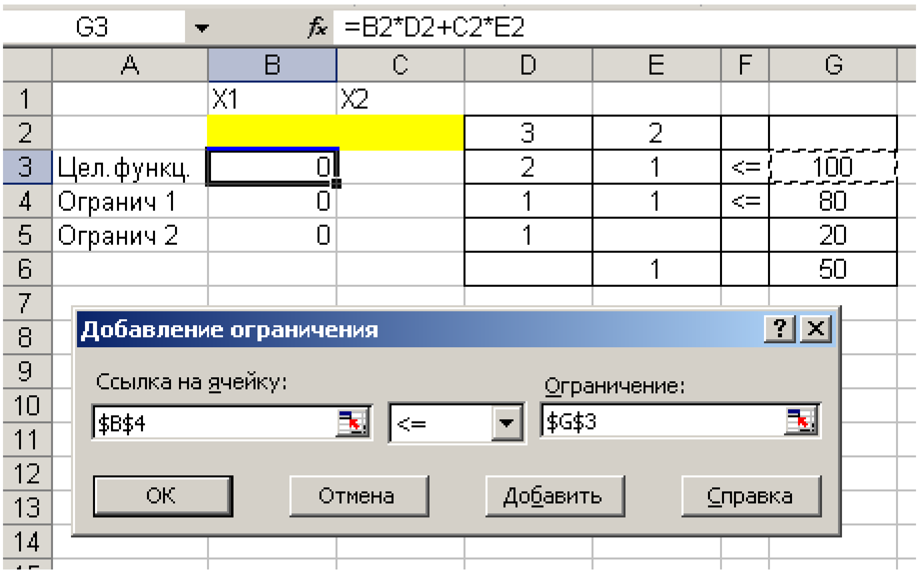
Для решения задачи вызовем диалоговое окно **Поиск решения**:



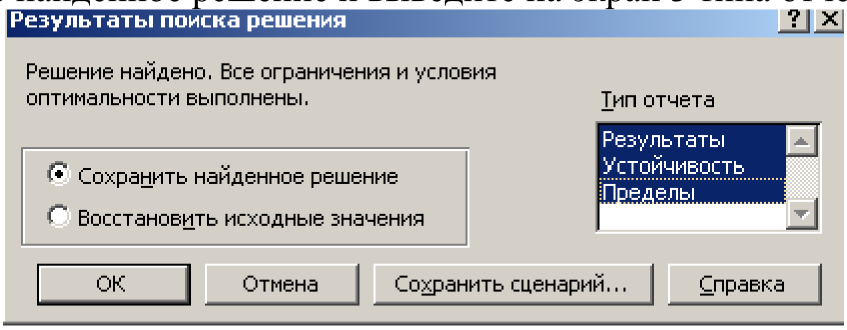
Далее в качестве целевой ячейки установим ту ячейку, в которую мы вводили значение целевой функции, в строке **Изменяя ячейки** введем переменные принятия решений x_1 и x_2, которые содержаться в целевой ячейке и ограничениях:



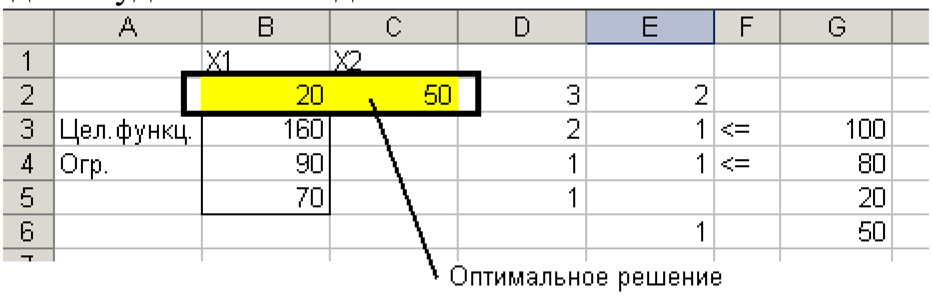
Далее введем ограничения. Каждое новое ограничение вводится с помощью кнопки **Добавить**, когда все ограничения введены – нажмите кнопку **ОК**:



Сохраните найденное решение и выведите на экран 3 типа отчетов:



Решение задачи будет иметь вид:



В отчете по результатам приведены сведения о целевой функции, значениях искомых переменных и результаты оптимального решения для ограничений. Для ограничений в столбце формула приведены зависимости, которые были введены в диалоговое окно Поиск решения; в столбце Значение приведены величины использованного ресурса; в столбце Разница показано количество неиспользованного ресурса. Если ресурс используется полностью, то в столбце Статус указывается «связанное», при неполном использовании ресурса в этом столбце указывается «не связан». Для переменных показывается разность между значением переменных в найденном оптимальном решении и заданным для них граничным условием:

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$B$3	Цел.функц. X1	0	160

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$B$2	X1	0	20
$C$2	X2	0	50

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$G$3	<=	100	$G$3<=$G$3	связанное	0
$B$5	Огранич 2 X1	70	$B$5<=$G$4	не связан.	10
$B$2	X1	20	$B$2<=$G$5	связанное	0
$C$2	X2	50	$C$2<=$G$6	связанное	0

В отчете по устойчивости дан анализ по переменным и ограничениям. Нормированный градиент показывает, насколько изменяется целевая функция при принудительном включении единицы этой переменной в оптимальное решение:

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. градиент
$B$2	X1	20	3
$C$2	X2	50	2

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Лагранжа Множитель
$G$3	<=	100	0
$B$5	Огранич 2 X1	70	0

В отчете по пределам показано, в каких пределах может изменяться выпуск продукции, вошедшей в оптимальное решение, при сохранении структуры оптимального решения:

Ячейка	Целевое Имя	Значение
$B$3	Цел.функц. X1	160

Ячейка	Изменяемое Имя	Значение	Нижний предел	Целевой результат	Верхний предел	Целевой результат
$B$2	X1	20	#Н/Д	#Н/Д	20	160
$C$2	X2	50	#Н/Д	#Н/Д	50	160

Экономическая интерпретация результатов решения задачи линейного программирования. Из полученных результатов видно, что оптимальным будет следующее количество продаж: 20 штук глиняных горшков и 50 штук сувениров еженедельно. При таком уровне продаж еженедельный доход будет составлять 160 грн. При этом предприятие не будет продавать своих изделий меньше, чем их требует рынок. Ресурс по количеству часов работы гончарного цеха используется полностью, а в цехе, где производится роспись готовой продукции, остается 10 часов неиспользованного времени. Таким образом, все ресурсы кроме количества часов работы над росписью будут использованы полностью. При принудительном включении в оптимальное решение единицы продукции глиняные горшки и сувениры целевая функция изменится на 3 и 2 единицы (грн.) соответственно. Структура оптимального решения сохраняется в случае, если выпуск продукции не будет ниже предложенного оптимального значения.

Задания к лабораторной работе № 1.

В гранцах предложнных заданий разработайте экономико-математическую модель и сделайте экономическую интерпретацию результатов.

Задача 1. Экономическая система, состоящая из *n* технологических способов производства, выпускает *m* видов продукции и использует *r* видов ресурсов. Коэффициенты затрат («-») и выпуска («+») при единичной интенсивности, а также объемы ресурсов заданы в табл. 1.1-1.3.

Найти оптимальный план производства продукции. Дать полный экономический анализ полученных результатов.

Таблица 1.1

Показатели	Технологические способы				Объем ресурсов
	1	2	3	4	
Ресурсы:					
1	-1	-8	-11	-5	-3800
2	-5	-3	-8	-7	-4600
Продукция:					
A	1	1	-0,1	-0,2	
B	-	-	1	1	

Соотношение выпускаемой продукции *A:B* в конечной продукции составляет 3:1.

Таблица 1.2

Показатели	Технологические способы			Объем ресурсов
	1	2	3	
Ресурсы:				
1	-1	-2	-1	-4000
2	-2	-2	-5	-6000
Продукция:				
A	-2	-2	1	
B	1	1	-	

C	-1	-2	-3		

Соотношение выпускаемой продукции *A:B:C* в конечной продукции составляет 2:1:3.

Таблица 1.3

Показатели	Технологические способы				Объем ресурсов
	1	2	3	4	
Ресурсы:					
1	-1	-8	-11	-5	-3800
2	-5	-3	-8	-7	-10000
Продукция:					
A	1	1	-0,3	-	
B	-0,3	-0,4	1	1	

Соотношение выпускаемой продукции *A:B* в конечной продукции составляет 2:1.

Задача 2. Предприятие с m видами основного оборудования может выпустить n видов. Затраты времени на изготовление единицы изделия, фонд времени по группам оборудования и прибыль в расчете на единицу изделия указаны в табл. 2.1.

Установить оптимальный план выпуска продукции, обеспечивающий прибыль для предприятия.

Сформулировать (формализовать) математически условия задачи, двойственной по отношению к исходной, раскрыть экономический смысл и проанализировать двойственные оценки.

Таблица 2.1

Номер варианта	Группа оборудования	Затраты времени на обработку изделий			Фонд времени
		1	2	3	
1	I	2	3	1	500
	II	1	3	2	250
	III	3	1	2	200
	Прибыль на единицу изделия	3	3	4	
2	I	4	2	1	200
	II	1	3	2	160
	III	2	2	4	160
	Прибыль на единицу изделия	5	4	6	
3	I	4	3	9	180
	II	12	2	6	420
	III	5	10	4	360
	Прибыль на единицу	0,3	0,3	0,5	

	изделия				
4	I	4	2	1	800
	II	3	6	4	900
	III	1	3	6	420
	Прибыль на единицу изделия	0,5	0,3	0,4	
5	I	2	2	2	5000
	II	3	1	3	300
	III	0	1	5	700
	Прибыль на единицу изделия	0,6	0,7	0,5	

Задача 3. Предприятие располагает *m* видами ресурсов в заданных количествах, которые могут быть использованы в производстве *n* видов продукции. Известны нормы расхода *i*-го вида ресурсов на производство *j*-й продукции, а также показатель, характеризующий эффективность выпуска *j*-го изделия (табл. 3.1).

Определить план выпуска изделия, при котором обеспечивается спрос в заданных размерах, а суммарный показатель эффективности принимает наибольшее (наименьшее) значение.

Таблица 3.1

Номер варианта	Вид ресурсов	Вид изделия			Объем ресурсов
		A	B	C	
1	1	2	4	2	6400
	2	6	4	5	2000
	3	2	1	7	1800
	Прибыль на единицу изделия	4	3	2	
Изделий	А должно быть	произведено не менее 150 ед.			
2	1	10	8	4	980
	2	6	4	9	450
	3	8	16	7	350
	Прибыль на единицу изделия	8	11	6	
Изделий	А должно быть	произведено не менее 20; В -			не более 15.
3	1	4	2	3	2000
	2	6	1	4	4000
	Прибыль на единицу изделия	3	5	6	
Изделий	А должно быть не	менее 80; В - 40; С - не менее			120.

Задача 4. Предприятие, принимающее меры к организации производства трех новых видов изделий, имеет ограниченную сумму собственных средств на капиталовложения (К), но может увеличить объемы этих вложений за счет использования банковского кредита, сумма которого ограниченна (I). Естественно, что привлечение заемных средств окажется экономически оправданным только в том случае, если новое производство будет прибыльным с учетом выплачиваемых процентов.

Определить объемы производства изделий каждого вида, обеспечивающие получение максимума прибыли, если известно, что капиталовложения на единицу производства изделий первого, второго и третьего видов соответственно составляют a_1, a_2, a_3; прибыль от реализации единицы изделия каждого вида равна c_1, c_2, c_3, минимально допустимый объем производства изделия первого вида равен A_1, второго - A_2, третьего - не ограничен (табл. 4.1).

Таблица 4.1

Варианты исходных данных для задачи 3.17

Номер варианта	K, тыс. руб.	I, тыс. руб.	h, %	a1, тыс. руб.	a2, тыс. руб.	a3, тыс. руб.	c1, тыс. руб.	c2, руб.	c3, руб.	A1, шт.	A2,шт.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1000	400	3	2	1,5	3	3	4	2,5	200	120
2	600	300	2	4	3	4,5	6	4	5	50	10
3	2000	500	3	6	3	8	10	5	12	10	20
4	1200	600	7	1,5	3	2,2	15	10	8	40	10
5	3000	1000	6	2,1	5	3,5	8	10	4	100	50
6	800	100	4	1,8	2	3,5	4	2	6	20	30
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
7	4000	1000	6	2	4	3	1,5	3	2	200	40
8	1200	600	5	3	4	2	1	1,2	3	20	10
9	800	700	4	2	3	2	6	4	5	20	10
10	1400	700	5	4	3	6	2	2	1,5	30	120
11	2000	100	2	3	1	4	8	6	4	500	100
12	800	400	3	2,2	2,8	2,1	4	3	6	50	40
13	750	350	2	3	2,8	4	3	2	4	20	10
14	110	100	4	1,2	1,8	2	3	3,5	4	15	30
15	800	200	1	0,7	1,2	0,5	2,2	3	2,8	40	20
16	1000	1000	7	2	3	1	4	6	5	100	500
17	900	200	3	2,1	2,8	2,5	3	6	2	30	100
18	6000	2000	6	4	2	6	8	3	5	1100	500
19	1500	500	10	2	3	2	6	4	5	20	10
20	1800	500	12	4	2	3	1,2	3	2	20	20
21	3200	1000	13	2	1,5	3	3	4	2,5	200	120
22	3400	1000	12	4	3	4,5	6	4	5	50	10
23	4200	1000	13	6	3	8	10	5	12	10	20

24	4300	1000	13	1,5	3	2,2	15	10	8	40	10
25	4500	1000	12	2,2	5	3,5	8	10	4	100	50
26	3800	1000	12	1,8	2	3,5	4	2	6	20	30
27	2800	1500	15	2	4	3	1,5	3	2	200	40
28	2500	1500	14	3	4	2	1	1,2	3	20	60
29	2100	2000	15	1,9	3	2,7	2	3	4	40	20
30	1800	2000	15	1,6	2	3	3	2,8	2	60	30

Задача 5. Экономико-математическая модель оптимизации производственного плана предприятия

Постановка задачи. Пусть предприятие производит i видов продукции x_i, от реализации которой получает прибыль R_i. Для производства единицы вида продукции используются j видов ресурсов, при том, что норма потребления ресурсов составляет b_{ij}. Объем выделенных ресурсов не может быть больше B_j. Производственные мощности предприятия позволяют производить ежемесячно не более 8 единиц продукции x_1 и 10 единиц продукции x_2. Постройте экономико-математическую модель максимизации доходов предприятия.

Методические рекомендации. Математическая модель данной задачи будет выглядеть следующим образом:

$$F = \sum_{i=1}^{j} R_i X_i \Rightarrow \max$$

$$\Omega: \sum_{i=1}^{j} b_j x_i \le B_j \qquad i = \overline{1,2}, \quad j = \overline{1,3}$$

$$x_1 \le 8, \; x_2 \le 10$$

$$x_i \ge 0$$

Варианты.

Переменная	**Вариант 1**	**Вариант 2**	**Вариант 3**	**Вариант 4**	**Вариант 5**
R_1	**2**	**2,3**	**4**	**2**	**3**
R_2	**1**	**1,8**	**6**	**2**	**2**
b_{11}	**3**	**3**	**4**	**4**	**3**
b_{12}	**1**	**1**	**2**	**1**	**1**
b_{21}	**2**	**2,3**	**3**	**2**	**4**
b_{22}	**2**	**3,4**	**5**	**3**	**3**
B_1	**45**	**25**	**30**	**25**	**30**
B_2	**60**	**45**	**52**	**47**	**56**

Дать экономическую интерпретацию результатов решения задачи.

МОДУЛЬ 2

Моделирование спроса и предложения

Методические указания для лабораторных занятий.

ПЛАН

2.1. Функции спроса.
2.2. Функции предложения.
2.3. Система однопериодных структурных уравнений спроса и предложения.
2.4. Рекурсивные системы спроса и предложения.

Моделирование спроса и предложения может осуществляться с помощью построения отдельных функций спроса и предложения или системы однопериодных структурных уравнений.

2.1. Функции спроса.

Спрос на *i-ое* благо является функцией от цен и дохода:

$$q_i = f(P_1, P_2, \ldots, P_n, M), \tag{1}$$

где q_i – спрос на продукт i;
$P_1, P_2, \ldots, P_n$ – цены на продукты в положении рыночного равновесия;
M – доход потребителей.

Пропорциональное изменение цен и доходов не изменяет спрос, т.е. для любого достаточного числа P выполняется зависимость:

$$q_i = f(P_1/P; P_2/P; \ldots; P_n/P; M/P) = f(P_1, P_2, \ldots, P_n, M), \tag{2}$$

где P – индекс цен.

Коэффициентом эластичности функции (1) называется величина, полученная в результате деления относительного прироста функции на относительный прирост аргумента. Можно вычислять эластичность по ценам и доходам.

$$E_{ij} = \frac{\partial q_i}{\partial P_j} : \frac{q_i}{P_j} = \frac{\partial q_i}{\partial P_j} \cdot \frac{P_j}{q_i}; \qquad i,j = 1,2,\ldots,n \qquad . \tag{3}$$

$$E_{iM} = \frac{\partial q_i}{\partial M} : \frac{q_i}{M} = \frac{\partial q_i}{\partial M} \cdot \frac{M}{q_i}; \qquad i = 1,2,\ldots,n. \tag{4}$$

Величины E_{ij} показывают, на сколько процентов изменится спрос на *i-ый* продукт, если при других неизменных условиях цена на *j-ый* продукт изменится на 1%. При $i=j$ величины E_{ij} называются коэффициентами эластичности по ценам, если $i \neq j$ – перекрестными коэффициентами эластичности.

Эластичность блага, по отношению к собственной цене, является отрицательной величиной ($E_{ii}<0$), т.е. когда цена на нее увеличивается, то спрос на благо уменьшается. Если $E_{ij}<0,$ то считают, что продукты i и j взаимодополняют друг друга. При $E_{ij}>0$ продукты i и j взаимозаменяемые; если $E_{ij}=0$, то продукты i и j независимые.

Между эластичностью по ценам и доходу существует соотношение

$$\sum_{j=1}^{n} E_{ij} + E_{im} = 0 \tag{5}$$

Наиболее распространены на практике два типа функций спроса:

линейная $$q_i = \alpha + \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2 + \ldots + \beta_n P_n + CM, \tag{6}$$

и показательная или линейно-логарифмическая

$$q_i = \alpha P_1^{\beta_1} P_2^{\beta_2} \ldots P_n^{\beta_n} M^C \text{, т.е.}$$

$$\log q_i = \log\alpha + \beta_1 \log P_1 + \beta_2 \log P_2 + \ldots + \beta_n \log P_n + C \log M. \tag{7}$$

В формулах (6), (7) параметры α, β и C являются константами.

Пример 1. Рассмотрим спрос на масло как функцию от цены и дохода потребителей по данным наблюдений за 18 лет.

Таблица 1

Выходные данные примера 1.

Год	Количество потребления масла на душу населения (кг)	Цена потребителя за 1 кг (условная денежная единица), пересчитанная с учетом индекса цен	Доход на душу населения (условная денежная единица), пересчитанный с учетом индекса цен
1	5,46	3,53	978
2	5,73	3,64	1091
3	5,58	3,75	1121
4	5,87	3,71	1171
5	5,12	3,74	1201
…	…	…	…
18	5,80	3,92	1332

Пусть эта функция линейно-логарифмическая (7). Обозначим в уравнении регрессии (7):

Y – логарифм от количества потребления масла;
X_1 – логарифм от цены;
X_2 – логарифм от дохода;
b_1 – эластичность по цене;
b_2 – эластичность по доходу;
u – случайная переменная.

$$Y = a_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + u. \tag{8}$$

Параметры этой зависимости оцениваем методом наименьших квадратов. Воспользуемся упрощенной записью системы нормальных уравнений, которая использует простые и смешанные моменты второго порядка относительно 2-х переменных X_j и Y:

$$\begin{cases} m_{Y1} = b_1 m_{11} + b_2 m_{12}, \\ m_{Y2} = b_1 m_{12} + b_2 m_{22}, \end{cases} \tag{9}$$

где
$$m_{jj}=\frac{\sum_{i=1}^{N}X_{ij}^{2}}{N}=\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(X_{ij}-\overline{X}_j\right)\left(X_{ij}-\overline{X}_j\right)}{N};$$
$$m_{Yj}=\frac{\sum_{i=1}^{N}X_{ij}Y_i}{N}=\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(X_{ij}-\overline{X}_i\right)\left(Y_i-\overline{Y}\right)}{N}.$$

Вычисленные значения моментов m_{jj} и m_{Yj} равны:

m_{YY}=0,00152; m_{Y1}=0,00062; m_{Y2}=0,00257;

m_{11}=0,00113; m_{12}=0,00323;

m_{22}=0,00996.

Подставим полученные значения в систему (9):
$$\begin{cases}0{,}00113\,b_1+0{,}00323\,b_2=0{,}00062;\\ 0{,}00323\,b_1+0{,}00996\,b_2=0{,}00257.\end{cases}$$

Решение системы найдем методом обратной матрицы. Для упрощения расчетов умножим все коэффициенты на 100.

Матрица системы
$$A=\begin{pmatrix}0{,}113 & 0{,}323\\ 0{,}323 & 0{,}996\end{pmatrix}.$$

Обратная матрица
$$A^{-1}=\begin{pmatrix}121{,}18982 & -39{,}30166\\ -39{,}30165 & 13{,}74948\end{pmatrix}.$$

Отсюда
$$\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}121{,}18982 & -39{,}30166\\ -39{,}30165 & 13{,}74948\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0{,}062\\ 0{,}257\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2{,}58681\\ 1{,}09693\end{pmatrix}.$$

Постоянный коэффициент a_0 рассчитываем при условии, что уравнение регрессии должно пройти через среднее арифметическое всех переменных:
$$\overline{Y}=a_0+b_1\overline{X}_1+b_2\overline{X}_2.$$

0,76013 = a_0 – (2,58681) · (0,56974) + (1,09693) · (3,05840);

a_0 = -1,12091.

Уравнение регрессии имеет такой вид:
$$Y = -1{,}12901 - 2{,}58681X_1 + 1{,}09693X_2\,.$$

Этот результат имеет такой смысл: если допущения статистического анализа выполняются, то на каждый процент повышения цены на масло, при всех других неизменных условиях, спрос на масло снизится на 2,6%. Если при тех же условиях существующий доход повысится на 1%, то спрос на масло повысится на 1,1%.

Рассчитаем коэффициент детерминации:
$$R^2=\frac{b_1m_{Y1}+b_2m_{Y2}}{m_{YY}}=\frac{(-2{,}58681)(0{,}00062)+(1{,}09693)(0{,}00257)}{0{,}00152}=0{,}80263.$$

Следовательно 80% дисперсии зависимой переменной Y можно объяснить колебаниями переменных X_1 и X_2.

Для проверки нулевой гипотезы, что ни одна из независимых переменных X_1 и X_2 не связана линейно с зависимой переменной Y, воспользуемся F критерием.

$$F = \frac{R^2(N-K)}{(1-R^2)(K-1)} = \frac{0,80263(18-3)}{(1-0,80263)(3-1)} = 30,5 .$$

Табличное значение F, которое отвечает $K\text{-}1=2$ и $N\text{-}K=5$ степеням свободы и уровню табл. существенности 0,95, равно 3,68, т.е. значительно меньше эмпирического. Нулевую гипотезу можно отвергнуть.

Для определения надежности коэффициентов регрессии рассчитаем t – статистики по формуле:

$$t_j = b_j \big/ S\sqrt{C_{ii}} ,$$

где S - стандартная погрешность оценки уравнения:

$$S = \sqrt{\frac{m_{YY} - b_1 m_{Y1} - b_2 m_{Y2}}{N-3}} = \sqrt{\frac{0,00152 + 2,5868 \cdot 0,00062 - 1,0969 \cdot 0,0026}{15}} = 0,01007;$$

C_{ii} – диагональные коэффициенты обратной матрицы A^{-1}, которая была рассчитана выше.

Для проверки b_i вычисляем:

$$t_1 = b_1 \big/ S\sqrt{C_{11}} = -2,58681 \big/ \left(0,01007 \cdot \sqrt{121,18982}\right) = -2,33 ,$$

$$t_2 = b_2 \big/ S\sqrt{C_{22}} = 1,09693 \big/ \left(0,01007 \cdot \sqrt{13,74948}\right) = 2,938 .$$

Величины t_1 и t_2 имеют распределение Стьюдента с $N\text{-}K=18\text{-}3=15$ степенями свободы при уровне значимости 0,95. Их эмпирические значения превышают табличные (2,131), т.е. оценки b_1 и b_2 значимые. Рассчитаем интервальные оценки для b_1 и b_2 :

$$b_1 \pm t_{табл.} \cdot S\sqrt{C_{11}} = -2,58681 \pm 3,182 \cdot 0,01007 \cdot \sqrt{121,18982} ;$$

доверительный интервал для b_1 составляет:

(-6,11441; 0,940079).

Для b_2

$$b_2 \pm t \cdot S\sqrt{C_{22}} = 1,0969 \pm 3,182 \cdot 0,01007 \cdot \sqrt{13,74948} .$$

Отсюда доверительный интервал для b_2 (+2,28512; -0,09126).

Введем теперь тенденцию перемены во времени по форме показательной зависимости (X_3 - время); уравнение регрессии будет:

$$Y = 0,12825 – 2,25498X_1 + 0,61624X_2 + 0,00912X_3.$$

Этот результат следует понимать так: если при других неизменных условиях (особенно при постоянной прибыли) цена масла повысится на 1%,то спрос на масло уменьшится почти на 2,25%. Если при тех же допущениях (особенно неизменных ценах) повысится на 1%прибыль, то спрос на масло повысится приблизительно на 0,6%.

Коэффициент в уравнении регрессии при X_3 (0,00912) показывает тенденцию. Уравнение регрессии можно потенцианировать

$$Y' = 10^{0,12825} X_1'^{-2,25498} X_2'^{0,61624} \cdot 10^{0,00912 \cdot X_3} = 1,34354 \cdot X_1'^{-2,25498} X_2'^{0,61624} \cdot 1,02122^{X_3}.$$

где Y', X'_1, X'_2 – антилогарифмы Y, X_1, X_2.

Тенденция отвечает ежегодному увеличению спроса на масло приблизительно на 2%.

Статистическая проверка показывает, что коэффициент множественной регрессии и индивидуальные коэффициенты регрессии значимы при уровне значимости 0,95.

2.2. Функции предложения.

Функции предложения выводятся в статической теории так же, как и функции спроса. Эластичность предложения по отношению к цене соответствующего блага будет, как правило, положительной.

Вблизи средней арифметической эти функции могут быть аппроксимированы с помощью линейных зависимостей:

$$q_i = \alpha + \beta_1 P_1/\rho + \beta_2 P_2/\rho + \ldots + \beta_n P_n/\rho \quad , \tag{10}$$

где q_i – предложение товара;

$P_1 \div P_n$ – цены товаров;

ρ - индекс цен;

α, β_i – постоянные коэффициенты, которые должны быть оценены.

Близко к геометрическим средним мы можем представить функцию предложения блага так:

$$q_i = \alpha P_1^{\beta_1} P_2^{\beta_2} \ldots P_n^{\beta_n} \tag{11}$$

В этой формуле β_i являются эластичностью предложения блага i в зависимости от цены блага i .

Между эластичностями существует соотношение:

$$\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n = 0. \tag{12}$$

Пример 2. Рассмотрим функцию предложения свинины от цены на нее. Статистические данные представлены в табл.2. Поскольку большинство сельскохозяйственных товаров имеют неизменный период производства, то можно допустить, что их предложение зависит не от цены в момент предложения, а от цены, которая существовала до начала производственного процесса.

Пусть Y_t будет логарифмом фактического количества свинины на душу населения в году t; $X_{1,t-1}$ – логарифм потребительской цены на свинину в предыдущем году, пересчитанной по индексу цен; X_{2t} – номер года.

Оценим параметры функции предложения свинины как регрессию количества потребления по цене предыдущего года с тенденциею или без нее.

Уравнение регрессии имеет вид:

$$Y = 0,49533 + 0,78110\,X_{1,t-1} + 0,06435\,X_{2t}.$$

Это уравнение следует понимать так: если при неизменных других условиях цена на свинину повысится на 1%, то в следующем году предложение свинины повысится приблизительно на 0,78. Тенденция предложения отвечает ежегодному повышению почти на 16% (антилогарифм 0,06435≈1,16).

Коэффициент множественной корреляции и коэффициент регрессии времени статистически значимы на уровне существенности 0,95. Доверительный интервал тенденции показывает, что на этом же уровне существенности годовое увеличение предложения свинины находится приблизительно между 10 и 23%.

Коэффициент автокорреляции остатков уравнения регрессии незначительный.

Теперь исключим тенденцию времени и рассчитаем простую регрессию логарифма цены в предыдущем году.

Уравнение регрессии будет:

$$Y_t = 0{,}80865 + 0{,}74171 X_{1,t-1}.$$

Эти уравнения следует рассматривать так: подустим, что при других неизменных условиях за год цена на свинину повысится на 1%, тогда, вероятно, в будущем году повысится и предложение свинины почти на 0,74%.

Таблица 2

Выходные данные примера 2.

Год	Количество свинины, которое приходится на душу населения (кг)	Цена прошлого года за 1кг свинины, пересчитанная по индексу цен
1	9,22	3,31
2	10,00	3,68
3	19,19	5,49
4	19,25	4,87
5	22,48	3,54
6	23,38	3,54
7	23,85	3,78
8	26,04	3,85

Таблица 3

Y_t	$X_{1,t-1}$	X_{2t}
0,96473	0,51983	1
1,00000	0,56585	2
1,28307	0,73957	3
1,28443	0,68753	4
1,35180	0,54900	5
1,36884	0,59770	6
1,37749	0,57749	7
1,41564	0,58546	8

Коэффициенты корреляции и регрессии статистически незначимы на уровне существенности 0,95.

Коэффициент автокорреляции остатков полученного уравнения регрессии на этот раз статистически значимый на уровне существенности 0,95. Поэтому возможно, что остатки автокоррелированные.

Выполним разностное преобразование. Уравнение регрессии будет:

$$\Delta Y_t = 0{,}05808 + 0{,}67565 \Delta X_{1,t-1}.$$

Это уравнение следует понимать так: допустим, что при других равных условиях в этом году цена на свинину повысится на 1%. Тогда можно ожидать, что предложение свинины в следующем году увеличится почти на 0,68%.

И коэффициент корреляции, и коэффициент регрессии статистически незначимы на уровне существенности 0,95.

Коэффициент автокорреляции остатков на этот раз статистически незначимый. Это свидетельствует о том, что путем разностного преобразования удалось исключить автокорреляцию остатков.

2.3. Система однопериодных структурных уравнений спроса и предложения имеет вид:

спрос $$q_d = f(P, Z_d) + U_d, \qquad \frac{\partial f}{\partial P} < 0; \qquad (13)$$

предложение $$q_S = \varphi(P, Z_S) + U_S, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial P} > 0; \qquad (14)$$

условие рыночного равновесия $$q_d = q_S, \qquad (15)$$

где q_d – количество спроса на благо;

q_S – количество предложения блага;

P – рыночная цена блага;

Z_d, Z_S – экзогенные переменные (нестабильность прибыли, погоды, тренда и т.д.);

U_d, U_S – случайные переменные (ошибки спецификации структурных уравнений, отборочного обследования, неточность измерений).

Пример 3. Исследовать по данным сельскохозяйственной статистики функции спроса и предложения на мясо.

Введем обозначения:

q – равновесное количество потребления мяса;

P – равновесная цена мяса;

Z_d – прибыль на душу населения;

Z_S – затраты на переработку мяса;

U_d, U_S – случайные переменные (погрешности в уравнениях), которые отвечают всем допущениям статистического анализа.

Построим модель, которая состоит из двух уравнений:

спрос $$b_{11}q + b_{12}P + C_{11}Z_d = U_d; \qquad (16)$$

предложение $$b_{21}q + b_{22}P + C_{22}Z_S = U_S. \qquad (17)$$

Функция спроса (16) на количество мяса (q) имеет линейную зависимость от цены (P) и затрат (Z_d). В условиях рыночного равновесия предложенное количество мяса равняется количеству, которое потребляется $q_d = q_S = q$.

Для выяснения возможности идентификации уравнений системы (16)–(17), прежде чем оценивать параметры, следует воспользоваться таким упрощенным правилом: для того, чтоб структурное уравнение было точно идентифицировано, количество переменных (экзогенных и эндогенных) отсутствующих в этом уравнении, должно равняться количеству эндогенных переменных в системе минус единица.

Наша модель включает две эндогенные переменные (q, P) и две экзогенные переменные (Z_d и Z_S). Правилу идентификации отвечают оба уравнения системы.

При точной идентификации уравнений оценки параметров могут быть определены непрямым методом наименьших квадратов. Этот метод применяется в три этапа: 1) составление приведенной формы уравнений; 2) непосредственная оценка этих уравнений; 3) обратный переход от полученных оценок к оценкам структурных параметров.

Найдем линейные регрессии эндогенных переменных q и P относительно всех экзогенных переменных и оценим их МНК. Получим приведенные формы уравнений:

$$q = 0{,}0566668\,Z_d - 0{,}2923865\,Z_S, \tag{18}$$

$$P = 0{,}0912396\,Z_d + 0{,}205493\,Z_S. \tag{19}$$

Чтоб получить уравнение спроса (16), необходимо в уравнении (18) исключить переменную Z_S, т.к. она отсутствует в структурном уравнении спроса (16). Кроме того, вычислим постоянный коэффициент этого уравнения при условии, что линия регрессии должна пройти через средние значения всех переменных $\overline{q} = a_0 + (-1{,}4231)\overline{P} + (0{,}1865)\overline{Z}_d$. Окончательно получим оценки для уравнения спроса (16).

$$q = -1{,}4230872\,P + 0{,}1865084\,Z_d + 205{,}1708. \tag{20}$$

С помощью этого уравнения можно вычислить эластичности для средних арифметических этих переменных. Эластичность спроса на мясо в зависимости от цены будет – 0,791, а эластичность от прибыли будет 0,556. Напомним, что эластичность для линейной регрессии вычисляется по формуле

$$E_i = b_i \frac{\overline{X}_i}{\overline{Y}}.$$

Теперь рассмотрим уравнение (17) предложения мяса. Чтобы получить его оценку, необходимо исключить переменную Z_d из уравнения (19) в системе приведенных уравнений (18)-(19). Если дополнительно вычислим постоянный коэффициент регрессии при условии, что уравнение пройдет через все средние арифметические, окончательно получим:

$$q = 0{,}6210768\,P - 0{,}4199919\,Z_S + 145{,}9780\,. \tag{21}$$

Это структурное уравнение отвечает функции предложения. Снова вычислим эластичности для средних арифметических заданных переменных: эластичность предложения мяса в зависимости от цены будет 0,345, а эластичность от затрат – 0,223.

2.4. Рекурсивные системы.

Особенным случаем однопериодных систем уравнений являются рекурсивные системы. Они позволяют применить МНК к оценке отдельных уравнений системы именно тогда, когда динамическая система представлена в форме однозначной причинной цепи соотношений. Важнейшими допущениями построения рекурсивных систем является их линейность, учет только погрешностей уравнений (погрешности переменных в систему не вносятся). Эти погрешности или отклонения должны быть случайными величинами с нулевым средним значением, постоянным рассеянием и независимыми между собой. Они нормально распределены, не имеют автокорреляции, и корреляция рядов тоже отсутствует.

Пример 4. Известным примером рекурсивных систем является спрос и предложением сельскохозяйственных продуктов, производство которых требует определенного времени. Система имеет вид:

$$Y_{1t} = a_{10} + b_{12}L_{1t} + U_{1t}; \quad (22)$$

$$Y_{2t} = a_{20} + b_{21}Y_{1t} + b_{22}L_{2t} + U_{2t}; \quad (23)$$

Y_{1t} – количество продукта в момент t;

Y_{2t} – цена продукта в момент t;

L_{1t} – цена продукта в момент t;

L_{2t} – любая заранее определенная переменная, например экзогенная переменная прибыли населения в момент t;

U_{1t}, U_{2t} – случайные переменные.

Уравнение (22) – это функция предложения. Оно не должно включать Y_{2t} – цену продукта в тот же момент. На самом деле, количество предложенного сельскохозяйственного продукта зависит не от текущей цены, а, возможно, от $Y_{2,t-1}$ – цены предыдущего года, когда началось производство этого продукта. L_{1t} – предопределенная переменная.

Второе уравнение (23) – уравнение спроса. Здесь цена в году t (или Y_{2t}) зависит от количества продукта в том же году Y_{1t}. Матрица коэффициентов однопериодных эндогенных переменных Y_{1t} и Y_{2t} – треугольная:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ b_{21} & -1 \end{bmatrix}.$$

Пример 5. Рассмотрим частично динамическую модель, которая состоит из уравнения предложения (пример 2) и уравнения спроса на свинину (пример 6). Если обозначить для года t логарифм количества символом Y_{1t}, а символом Y_{2t} – логарифм цены свинины в t-ом году, то система будет состоять из двух уравнений:

$$Y_{1t} = a_{10} + b_{12}L_{1t} + U_{1t}; \quad (24)$$

$$Y_{2t} = a_{20} + b_{21}Y_{1t} + U_{2t}. \quad (25)$$

Первое уравнение (24) – это уравнение предложения, поскольку для производства свинины необходимо некоторое время, то количество Y_{1t} (эндогенная переменная), предложенное на рынок в году t, зависит не от цены этого года, а от цены предыдущего года L_{1t}.

L_{1t} – предопределенная переменная. Случайная переменная U_{1t} представляет погрешности в этом уравнении и заменяет те переменные, которые должны были бы войти в него, но которыми пренебрегли: показатели затрат, технологические перемены, болезни животных и т.д.

Второе уравнение (25) – это уравнение спроса на свинину. Здесь достигнутая на рынке цена Y_{2t} в году t зависит от предложенного в этом же году количества свинины Y_{1t}. Y_{1t} и Y_{2t} являются эндогенными переменными.

Случайная переменная U_{2t} представляет погрешности в уравнении спроса и заменяет такие не включенные в уравнение переменные, как: погода, цены конкурирующих и заменяющих продуктов, прибыль и т.д.

Система (24)-(25) - рекурсивная и (если пренебречь стохастическими переменными) отображает однозначные причинные зависимости: от цены в этом году посредством уравнения предложения (24) к количеству в следующем году; с помощью уравнения спроса (24); от количества в этом году к соответствующей цене; от этой цены посредством уравнения предложения (24) снова к количеству в следующем году и т.д.

Теперь покажем, что уравнения (24) и (25) идентифицированные. Уравнение (24) не включает одну переменную (Y_{1t}), т.е., по правилу идентификации, на единицу меньше, чем количество эндогенных переменных. Поэтому уравнение (24) точно идентифицировано. Аналогично, точно идентифицировано и уравнение (25).

Если теперь допустить, что случайные переменные U_{1t} и U_{2t} нормально распределены, имеют средние значения, равные нулю, и неизвестные рассеяния σ_U^2 без автокорреляции и корреляции рядов и, кроме того, друг от друга не зависят, то можно использовать МНК для оценки уравнений (24) и (25).

Вычисление уравнения предложения (24) было сделано в примере 2 по данным таблицы 4. Уравнение регрессии имело такой вид:

$$Y_{1t} = 0{,}80865 + 0{,}74171 L_{1t}.$$

Коэффициент корреляции R=0,31257, который свидетельствует о слабой связи между Y_{1t} и L_{1t}.

Эмпирическое значение t–статистики равняется 0,806, что ниже табличного значения ($t_{\text{табл.}}$ = 2,447), взятого для уровня существенности 0,95 и N-K=6 степеней свободы. Это свидетельствует о незначимости полученной оценки коэффициента регрессии b_{12}.

Для вычисления функции спроса возьмем данные таблицы 4 из задачи 1. По методу наименьших квадратов:

$$b_{21} = \frac{m_{Y1Y2}}{m_{Y1Y1}} = \frac{-0{,}03134}{0{,}21407} = -0{,}14640;$$

$$a_{20} = m_{Y2} - b_{21} m_{Y1} = 0{,}61129 - (-0{,}14640) \cdot 1{,}25575 = 0{,}79513.$$

Уравнение регрессии имеет такой окончательный вид:

$$Y_{2t} = 0{,}79513 - 0{,}14640 Y_{1t}.$$

Проверка t–статистики свидетельствует о незначимости коэффициента регрессии ($t_{\text{табл.}} > t$) для уровня существенности 0,95 и 6 степеней свободы.

Коэффициент регрессии b_{21} представляет эластичность цены. Чтобы вычислить эластичность спроса, найдем обратное значение b_{21}:

$$b_{21} = \frac{1}{-0{,}14640} = -6{,}83060.$$

Задания к лабораторной работе № 2.

Задача 1.

Исследовать спрос на свинину за восемь лет по наблюдениям, приведенным в таблицах 4, 5.

Таблица 4

Год	Количество свинины на душу населения	Потребительская цена, пересчитанная с учетом индекса цен	Доход на душу населения, пересчитанный с учетом индекса цен
1	9,22	3,68	1133
2	10,00	5,49	1222
3	19,19	4,87	1354
4	19,25	3,54	1389
5	22,48	3,96	1342
6	23,38	3,78	1377
7	23.85	3,85	1491
8	26,04	3,87	1684

Таблица 5

Y – логарифм количества	X_1 – логарифм цены	X_2 – логарифм прибыли	X_3 - время
0,86473	0,56585	3,05423	1
1,00000	0,73957	3,08707	2
1,28307	0,68753	3,13162	3
1,28443	0,54900	3,14270	4
1,35180	0,59770	3,12775	5
1,.36884	0,57749	3,13893	6
1,37749	0,58546	3,17348	7
1,41564	0,58771	3,22634	8

Задача 2.

По данным задачи 1 найти зависимость спроса на свинину только от цены и прибыли, не учитывая фактор времени.

Задача 3.

Для попытки устранения автокорреляции решить задачу 2 путем переменных по их первым разницам:

$\Delta X_{it} = X_{i,t+1} - X_{it}$.

Уравнение регрессии при этом преобразовании будет иметь вид:

$\Delta Y_t = a_0 + a_1 \Delta X_{1t} + a_2 \Delta X_{2t}$.

Задача 4.

По данным задачи 1 проследить зависимость спроса на свинину:

а) только от цены и тенденции времени;

б) только от цены.

Задача 5.

Определить перекрестные эластичности спроса не свинину относительно цены на говядину по данным задачи 1 и таким дополнительным наблюдениям:

Таблица 6

Данные для оценки зависимости спроса на свинину от цены на говядину

Год	1	2	3	4	5	6	7	8
Цена потребителя на говядину за 1кг, пересчитанная с учетом индекса цен	2,44	2,55	2,56	2,87	2,87	2,75	3,.00	3,40
X_4 – логарифм цены на говядину	0,38739	0,40654	0,40824	0,45788	0,45788	0,43933	0,47712	0,53148

Задача 6.

1. Исходя из данных примера 2 и задачи 1 постройте систему однопериодных структурных уравнений, определите идентифицированность каждого уравнения.
2. Выведите из структурной системы уравнение приведенной формы.
3. Дайте определение рекурсивности. Объясните, как это свойство связано с проблемой идентификации.

Задача 7.

Исходя из данных таблицы 7, (допустив, что некоторые переменные являются экзогенными) оценить неоткорректированные по индексу цен кривые спроса на деньги для Австралии, Канады, Франции. Ряды статистических данных характеризуют соответственно:

M – предложение денег включает наличные деньги и вклады небанковского частного сектора;

r_1 – текущая среднегодовая процентная прибыль от времени покупки до времени погашения государственных облигаций (со сроком погашения 12 лет и больше): такая прибыль определяется из условий, которые складываются на ведущих рынках денег той или иной страны.

r_2 – процентная ставка по краткосрочным государственным обязательствам (по векселям).

Y – валовой внутренний продукт в текущих рыночных ценах.

Единица измерения: Австралия – миллион фунтов стерлингов; Франция – миллиард франков; Канада – миллион канадских долларов.

Таблица 7

Данные для оценки уравнения спроса на деньги

Год	Австралия				Канада				Франция			
	M	r_1	r_2	*Y*	*M*	r_1	r_2	*Y*	*M*	r_1	r_2	*Y*
1938	190	3,76	3,38	922	1131	3,09	0,59	5233				
1939	203	3,92	3,84	1035	1370	3,16	0,71	5707				
1945	647	3,25	2,47	1516	3514	2,93	0,36	11850				
1946	703	3,24	1,90	1642	3996	2,61	0,38	12026	1349	3,17	1,30	3048
1947	737	3,17	2,12	2036	3943	2,57	0,41	13768	1676	3,91	1,57	4015
1948	844	3,14	2,25	2291	4335	2,96	0,41	15613	2165	4,62	2,09	6698
1949	1000	3,12	1,99	2724	4422	2,83	0,48	16462	2704	4,78	2,26	8283
1950	1254	3,14	1,95	3633	4330	2,78	0,55	18167	3129	6,52	2,43	9650
1951	1422	3,53	2,01	3853	4375	3,26	0,80	21230	3695	6,54	2,70	11910
1952	1374	4,34	2,49	4219	4658	3,59	1,07	23759	4188	5,60	3,79	14210
1953	1538	4,48	3,07	4557	4558	3,68	1,69	24724	4658	5,41	4,04	14600
1954	1582	4,46	3,34	4902	4920	3,14	1,44	24644	5298	5,38	3,59	15520
1955	1620	4,52	3,79	5313	5248	3,08	1,62	27149	5969	5,21	3,16	16870
1956	1603	5,03	4,71	5753	5186	3,61	2,92	30071	6585	5,28	3,19	18270
1957	1677	5,02	4,57	5829	5392	4,17	3,76	32403	7137	5,92	3,12	21150
1958	1633	4,97	4,29	6234	6080	4,22	2,04	33398	7573	5,68	3,54	24070
1959	1762	4,91	3,98	6868	5890	4,86	4,75	35472	8392	5,27	3,57	26090
1960	1774	4,97	4,39	7208	6190	5,06	3,32	26808	9579	5,15	3,64	28590
1961	1724	5,27	4,99	7313	6960	5,03	2,82	38060	11063	5,07	3,45	31960
1962	1760	4,92	4,.28	7868	7190	5,03	4,00	41054	13070	5,03	3,40	35350

МОДУЛЬ 3.

Применение регрессионного анализа в ходе принятия решения

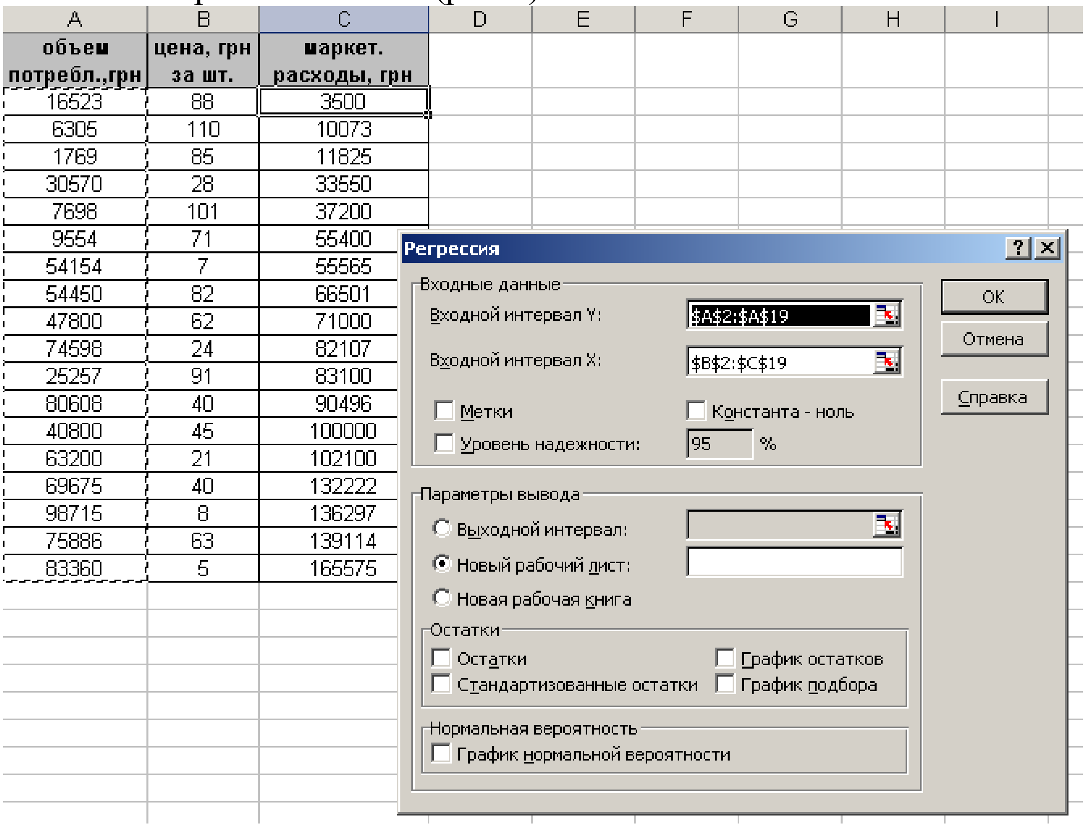
Проблема изучения взаимосвязей экономических показателей является одной из важнейших проблем экономического анализа. Так, в рыночной экономике нельзя непосредственно регулировать темп инфляции, но на него можно воздействовать средствами бюджетно-налоговой и кредитно-денежной политики. Поэтому, в частности, должна быть изучена зависимость между предложением денег и уровнем цен.

Изучение зависимостей экономических переменных начнем со случая, если неизвестно, какая из переменных является независимой, а какая зависимой. В этом случае переменные равноправны, и имеет смысл говорить о статистической взаимосвязи корреляционного типа. Другая ситуация возникает, если исследуемые переменные не равноправны, одна из них рассматривается как объясняющая (или независимая), а другая как объясняемая (или зависящая от первой). Если это так, то изменение одной из переменных ведет к изменению другой. Это тот случай, когда должно быть оценено уравнение регрессии. Уравнение регрессии – это формула статистической связи между переменными. Формула статистической связи двух переменных называется парной регрессией, зависимость от нескольких переменных – множественной регрессией.

Постановка задачи. Пусть предприятие рассматривает возможность увеличения сметы на рекламу конкретной продукции, с помощью чего рассчитывает добиться увеличения объемов продаж. В рамках поставленной задачи руководство предприятия решило изучить связь между сметой на рекламу предприятия для каждого вида продукции и показателем объема продаж в единицах данной продукции. Кроме того, руководству предприятия хотелось бы исследовать последствия снижения цена на единицу продукции. Используя методы регрессионного анализа, оцените влияние повышения расходов на рекламу и изменение цен на объемы продаж в единицах продукции.

Методические указания.

ППП Excel предлагает пользователям встроенный инструмент **Регрессия**, который позволяет проводить полный регрессионный анализ. Чтобы воспользоваться этим инструментом, необходимо активизировать **Пакет анализа** (команда **Сервис** – **Надстройки**). Далее из меню **Сервис** вызвать диалоговое окно **Анализ данных** и выбрать инструмент анализа **Регрессия**. В диалоговое окно **Регрессия** ввести в поле **Входной интервал Y** диапазон со значениями зависимых переменных, в поле **Входной интервал X -** диапазон со значениями независимых переменных. В поле **Уровень надежности** введите значение 95% и результаты представьте в новом рабочем листе (рис 1).



объем потребл.,грн	цена, грн за шт.	маркет. расходы, грн
16523	88	3500
6305	110	10073
1769	85	11825
30570	28	33550
7698	101	37200
9554	71	55400
54154	7	55565
54450	82	66501
47800	62	71000
74598	24	82107
25257	91	83100
80608	40	90496
40800	45	100000
63200	21	102100
69675	40	132222
98715	8	136297
75886	63	139114
83360	5	165575

Рис.1 – Диалоговое окно Регрессия

Результаты, которые вы получите с использованием инструмента **Регрессия**, представлены на рис. 2.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	ВЫВОД ИТОГОВ								
2									
3	*Регрессионная статистика*								
4	Множественный R	0,898076207							
5	R-квадрат	0,806540874							
6	Нормированный R-квадр	0,780746324							
7	Стандартная ошибка	14348,6222							
8	Наблюдения	18							
9									
10	Дисперсионный анализ								
11		*df*	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*			
12	Регрессия	2	12875046967	6437523484	31,26787915	4,46087E-06			
13	Остаток	15	3088244387	205882959,1					
14	Итого	17	15963291354						
15									
16		*Коэффициенты*	*Станд.ошибка*	*t-статистика*	*P-Значение*	*Нижние 95%*	*Верхние 95%*	*Нижние 95,0%*	*Верхние 95,0%*
17	Y-пересечение	36779,49257	13165,54282	2,793617632	0,013634136	8717,785046	64841,20009	8717,785046	64841,20009
18	Переменная X 1	-358,1412987	129,6571733	-2,762217389	0,014524676	-634,4991918	-81,78340569	-634,4991918	-81,78340569
19	Переменная X 2	0,382841497	0,093439712	4,097203328	0,000951639	0,183679344	0,582003651	0,183679344	0,582003651

Рис. 2 – Результаты обработки данных инструментом Регрессия

Проанализируем полученные результаты.

R-квадрат (R^2 – коэффициент детерминации) выражает долю дисперсии в объеме продаж в единицах продукции, связанную с дисперсией в расходах на рекламу в денежном выражении и продажной цены.

Значение R^2 означает, что приблизительно 80% меры изменчивости объемов продаж связан с мерой изменчивости расходов на рекламу и ценой.

Коэффициент детерминации R^2 используется для анализа общего качества оцененной линейной регрессии и характеризует долю вариации (разброса) зависимой переменной, в качестве меры разброса зависимой переменной используется ее дисперсия.

Множественный R представляет собой квадратный корень из дисперсии R^2. Это значение является коэффициентом корреляции и выражает корреляцию между объемом продаж и полученной комбинацией предсказуемых переменных.

Нормированный R-квадрат учитывает количество результатов наблюдений и предсказуемых переменных. При проведении множественного регрессионного анализа (если по сравнению с количеством предсказуемых переменных число результатов незначительно) R^2 имеет тенденцию отклоняться в сторону повышения. Нормированный обеспечивает информацией о том, какое значение мы могли бы получить в другом наборе данных, который был бы намного больше, чем анализируемый в данном случае. Если бы рассматриваемый пример был основан на 100 результатах наблюдений, то нормированный R^2 имел бы очень незначительное отличие от фактического R^2.

Стандартная ошибка — это мера ошибки предсказанного значения зависимой переменной для отдельного значения независимой переменной.

Третий раздел представляет детальную информацию о членах уравнения регрессии – отрезке на оси ординат (**Y-пересечение**), коэффициентах (**переменных**) и стандартных погрешностях. Уравнение регрессии будет иметь вид: $y = 36779{,}49 - 358{,}14 \cdot x_1 + 0{,}38 \cdot x_2$.

Этот результат имеет следующий экономический смысл: если цена увеличиться на одну денежную единицу, то объемы продаж уменьшаться на 358 штук, при всех других неизменных условиях. Если расходы на маркетинг увеличатся на одну денежную единицу, то объемы продаж увеличатся на 0,4 штуки при всех других неизменных условиях. То есть для продажи дополнительных 4 единиц продукции затраты на маркетинг следует увеличить на 5 денежных единиц.

Формально значимость оцененного коэффициента регрессии может быть проверена с помощью анализа его отношения к своему стандартному отклонению. Эта величина в случае выполнения исходных предпосылок модели имеет **t-распределение Стьюдента** с определенным числом степеней свободы (степень свободы представляет собой количество наблюдений минус число членов уравнения) и называется **t-статистикой**.

Для t-статистики проверяется нулевая гипотеза, то есть гипотеза о равенстве ее нулю. Очевидно, что если умножить нуль на число значений связанной с ним предсказуемой переменной, как это делается в уравнении регрессии, то необходимо будет прибавить нуль к прогнозируемому значению переменной-критерия, что делает совершенно бесполезной предсказываемую переменную.

ППП Excel возвращает значение параметра t для отрезка и для каждого коэффициента регрессии и показывает долю каждого члена уравнения в его стандартной погрешности. Положительный знак t-статистики свидетельствует о наличии положительной связи между переменной и критерием, т.е. чем выше цена на продукцию, тем ниже объемы продаж.

Распределение Фишера – двухпараметрическое распределение неотрицательной случайной величины, являющейся в частном случае, квадратом случайной величины, распределенной по Стьюденту.

И, наконец, выводятся значения верхнего и нижнего пределов 95-процентного уровня надежности, как для отрезка, так и для каждого коэффициента.

Задания к лабораторной работе № 3.

Множественный регрессионный анализ

Построить линейную регрессионную модель, описывающую зависимость оценочной цены складского помещения (y) от общей площади (x_1) и времени эксплуатации помещения (x_2).

1. Найти оценки параметров методом 1МНК.
2. Найти ковариационную матрицу.
3. Вычислить стандартные ошибки оценок параметров.
4. Найти точечный и интервальный прогноз математического ожидания и индивидуального значения зависимой переменной для прогнозного периода с вектором

$$x = \begin{pmatrix} 170000 \\ 2600 \\ 13 \end{pmatrix}$$

5. Найти множественный коэффициент корреляции и коэффициент детерминации.
6. Проверить значимость эконометрической модели и коэффициента корреляции.

Уровень значимости принять $\alpha = 0.05$.

Исходные данные приведены в таблице на рис.

№	Цена y	Площадь x_1	Период x_2
1	142000	2310	20
2	144000	2333	12
3	151000	2356	33
4	150000	2379	43
5	139000	2402	53
6	169000	2425	23
7	126000	2448	99
8	142900	2471	34
9	163000	2494	23
10	169000	2517	55

Условие / Решение1 / Решение 2 / ДопЛист1

Готово

Рис. Условие задачи

1. *Нахождение оценок параметров модели методом 1МНК.*

Линейная регрессионная модель имеет вид:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + u,$$

где u – случайный член.

В результате применения метода наименьших квадратов находятся оценки коэффициентов модели $\hat{a}_0,\ \hat{a}_1,\ \hat{a}_2$. По этим оценкам и по значениям объясняющих переменных x_1, x_2 строятся модельные значения объясняемой переменной:

$$\hat{y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_1 + \hat{a}_2 x_2,$$

где $\hat{a}_0,\ \hat{a}_1,\ \hat{a}_2$ – оценки неизвестных параметров a_0, a_1, a_2.

Оператор оценивания параметров модели по 1МНК имеет вид:

$$\hat{A} = (X^T\ X)^{-1} X^T\ Y,$$

где $\hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix}$.

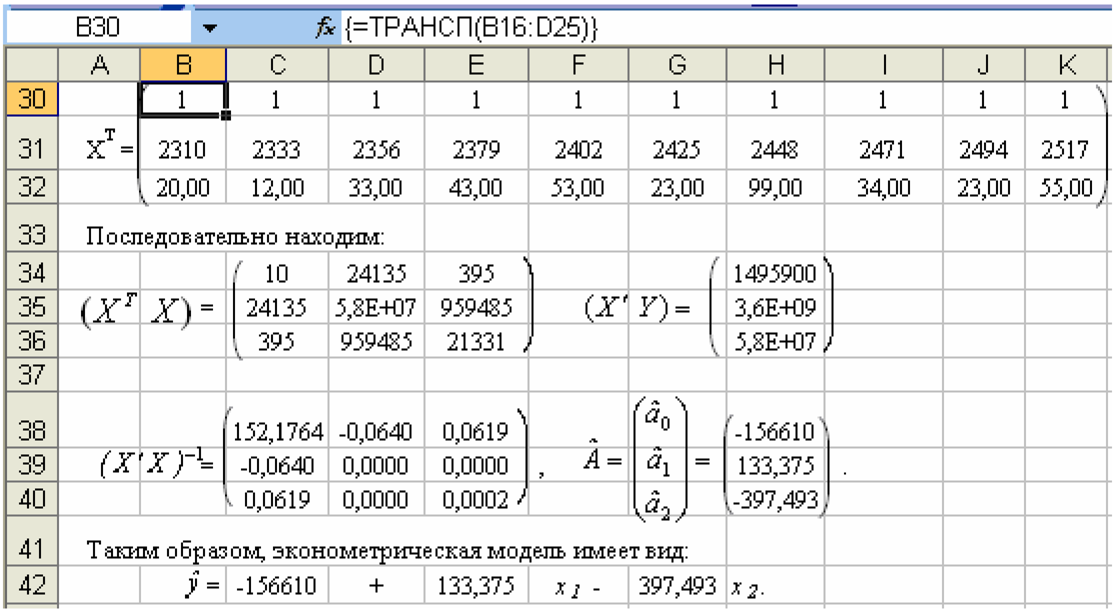
Определим в MS Excel матрицы X и Y на листе с именем «Решение1», как показано на рис.

D21 f_x =Условие!E27

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2310 & 20 \\ 1 & 2333 & 12 \\ 1 & 2356 & 33 \\ 1 & 2379 & 43 \\ 1 & 2402 & 53 \\ 1 & 2425 & 23 \\ 1 & 2448 & 99 \\ 1 & 2471 & 34 \\ 1 & 2494 & 23 \\ 1 & 2517 & 55 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 142000 \\ 144000 \\ 151000 \\ 150000 \\ 139000 \\ 169000 \\ 126000 \\ 142900 \\ 163000 \\ 169000 \end{pmatrix}$$

Рис.

Последовательно высчитываем $(X^T\ X)^{-1} X^T\ Y$ (рис.)



B30 | f_x {=ТРАНСП(B16:D25)}

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
30		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
31	$X^T =$	2310	2333	2356	2379	2402	2425	2448	2471	2494	2517
32		20,00	12,00	33,00	43,00	53,00	23,00	99,00	34,00	23,00	55,00
33	Последовательно находим:										
34			10	24135	395			1495900			
35	$(X^T\ X) =$		24135	5,8E+07	959485		$(X'\ Y) =$	3,6E+09			
36			395	959485	21331			5,8E+07			
37											
38			152,1764	-0,0640	0,0619		$\hat{a}_0$	-156610			
39		$(X'X)^{-1} =$	-0,0640	0,0000	0,0000	, $\hat{A} =$	$\hat{a}_1$ =	133,375	.		
40			0,0619	0,0000	0,0002		$\hat{a}_2$	-397,493			
41	Таким образом, эконометрическая модель имеет вид:										
42		$\hat{y} =$	-156610	+	133,375	x_1 -	397,493	x_2.			

Рис.

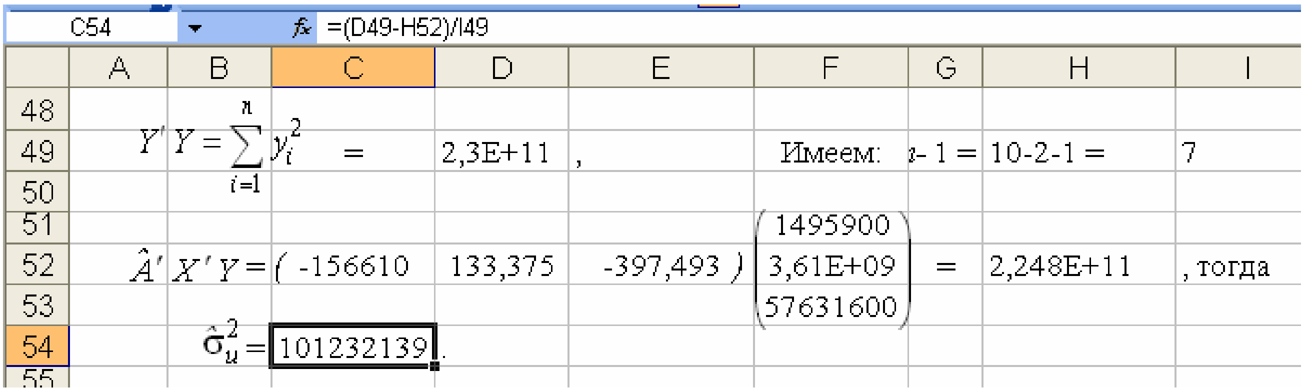
В таблице приведены формулы реализованных на рис. расчетов

Таблица

Ячейка	**Формула**
C34	**=МУМНОЖ(B30:K32;B16:D25)**
H34	**=МУМНОЖ(B30:K32;F16:F25)**
C38	**=МОБР(C34:E36)**
H38	**=МУМНОЖ(C38:E40;H34:H36)**

Определим несмещенную оценку дисперсии остатков (ячейка **C54,** рис.) – необъясненную дисперсию, отображающую меру разброса зависимой переменной вокруг линии регрессии:

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{Y^T\ Y - \hat{A}^T\ X^T\ Y}{n - m - 1}.$$



C54 | f_x =(D49-H52)/I49

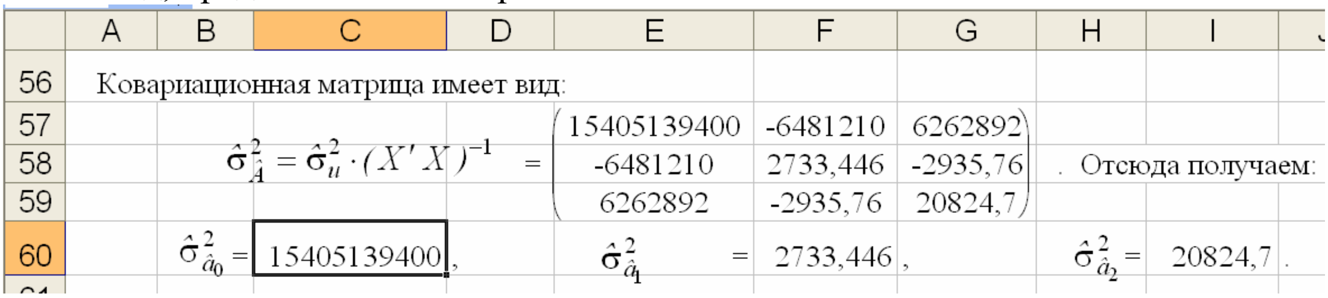
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
48									
49		$Y'Y = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$	=	2,3E+11	,	Имеем:	- 1 =	10-2-1 =	7
50									
51						1495900			
52		$\hat{A}'\ X'\ Y =$	(-156610	133,375	-397,493)	3,61E+09	=	2,248E+11	, тогда
53						57631600			
54		$\hat{\sigma}_u^2 =$	101232139 .						
55									

Рис. Определение несмещенной оценки дисперсии остатков

Тогда ковариационная матрица вектора ошибок, рассчитываемая по формуле:

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{A}} = \hat{\sigma}^2_u \cdot (X^T\ X)^{-1},$$

имеет вид, представленный на рис.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
56	Ковариационная матрица имеет вид:								
57					15405139400	-6481210	6262892		
58		$\hat{\sigma}^2_{\hat{A}} = \hat{\sigma}^2_u \cdot (X'X)^{-1}$		=	-6481210	2733,446	-2935,76	. Отсюда получаем:	
59					6262892	-2935,76	20824,7		
60		$\hat{\sigma}^2_{\hat{a}_0}$ =	15405139400	,	$\hat{\sigma}^2_{\hat{a}_1}$ =	2733,446 ,		$\hat{\sigma}^2_{\hat{a}_2}$ =	20824,7 .

Рис. Ковариационная матрица вектора ошибок

Стандартные ошибки рассчитываются по формуле

$$S_{\hat{a}_j} = \sqrt{\hat{\sigma}^2_{\hat{a}_j}}\ .$$

Получаем:

$S_{\hat{a}_0}$ =124117,442, $S_{\hat{a}_1}$ =52,282371, $S_{\hat{a}_2}$ =144,30774.

Сравним каждую ошибку с соответствующим числовым значением оценки параметра:

$\frac{S_{\hat{a}_0}}{|\hat{a}_0|}\cdot 100\%$ =79,25%, $\frac{S_{\hat{a}_1}}{|\hat{a}_1|}\cdot 100\%$ =39,20%, $\frac{S_{\hat{a}_2}}{|\hat{a}_2|}\cdot 100\%$ =36,3%.

Определение t-статистики по формуле

$$t_i = \frac{\hat{a}_i}{S_{\hat{a}_i}}.$$

Если $\left|t_{\beta_i}\right| > t_{\text{табл}}$, то коэффициент $\hat{a}_i$ считается статистически значимым.

Если $\left|t_{\beta_i}\right| \le t_{\text{табл}}$, то коэффициент $\hat{a}_i$ считается статистически незначимым. Это означает, что фактор x_i линейно не связан с зависимой переменной y, и его можно исключить из модели, и все расчеты, включая решение системы линейных уравнений, повторить снова.

Ячейка **C12** (Лист1) содержит объясненную сумму квадратов, обусловленную регрессией:

$$SS_{\text{регр}} = \sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_i - \overline{y}_i\right)^2.$$

Пусть $e_i = y_i - \hat{y}_i$ - истинного значения объясняемой переменной от модельного для i -го наблюдения. Тогда ячейка **C13** (Лист1) содержит остаточную сумму квадратов, характеризующую отклонение от регрессии:

$$SS_{\text{ост}} = \sum_{i=1}^{n} e_i^{\ 2} = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2.$$

Таким образом, метод наименьших квадратов заключается в выборе такого набора коэффициентов среди всех возможных, при котором $SS_{\text{ост}}$ является минимальным.

Если все коэффициенты модели, кроме константы $\hat{a}_0$, равны нулю, то $\hat{a}_0 = \bar{y}$ – среднему значению объясняемой переменной. Тогда общая сумма квадратов отклонений – ячейка **C14** (Лист1) равна

$$SS_{\text{итого}} = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \bar{y}_i \right)^2 .$$

Отметим, что $SS_{\text{итого}} = SS_{\text{регр}} + SS_{\text{ост}}$.

Тогда выборочное значение F, имеющее распределение Фишера, в ячейке **E12** рассчитывается, как

$$F = \frac{SS_{\text{регр}} / k}{SS_{\text{ост}} / (n-k-1)}$$

или

$$F = \frac{R^2}{(1-R^2)} \cdot \frac{n-k-1}{k},$$

применяемое для оценки значимости коэффициента детерминации R^2.

Коэффициент детерминации в ячейке **B5**, вычисляется по формуле

$$R^2 = \frac{SS_{\text{регр}}}{SS_{\text{регр}} + SS_{\text{ост}}} = 1 - \frac{SS_{\text{ост}}}{SS_{\text{регр}} + SS_{\text{ост}}} .$$

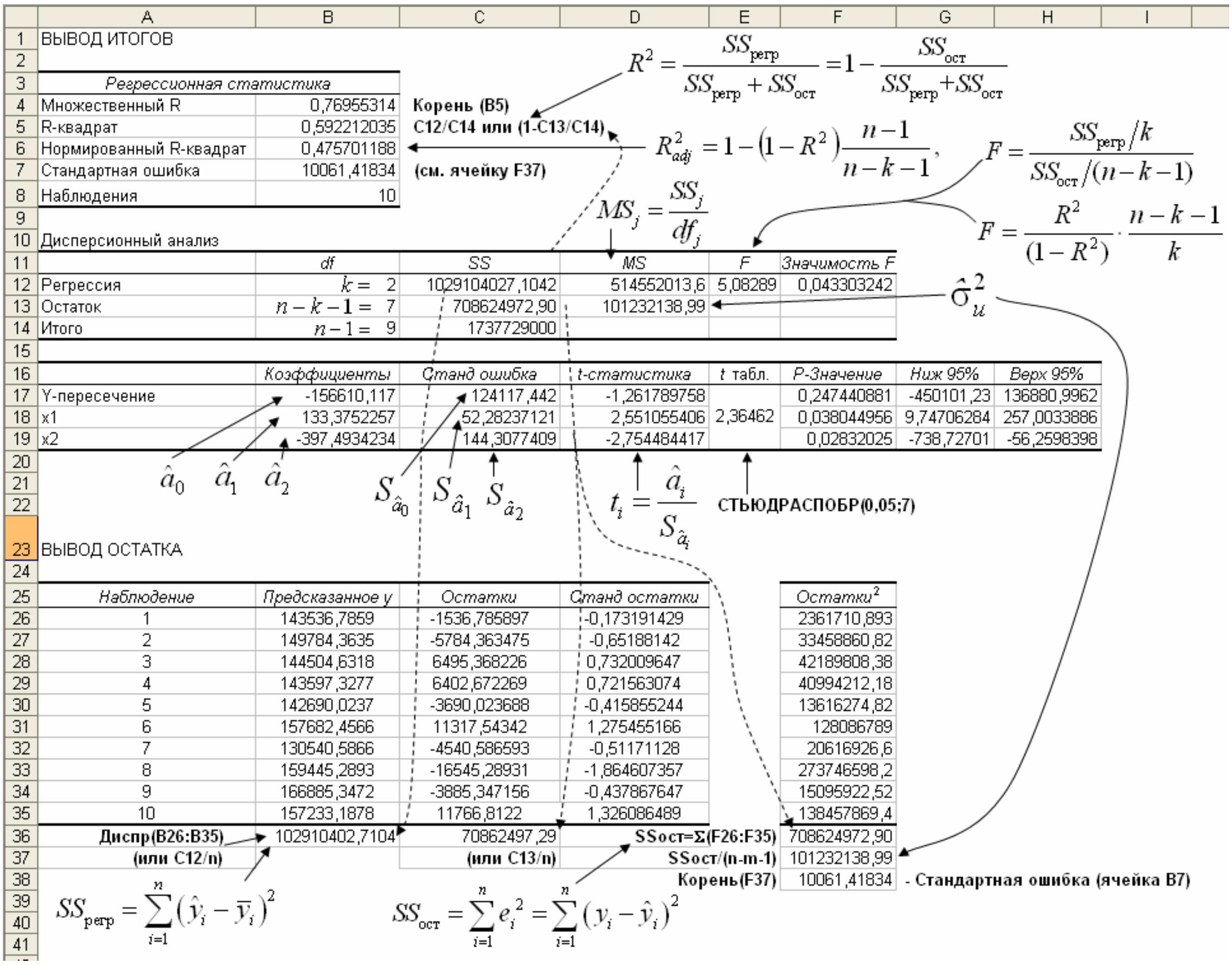
Величина R^2 показывает, какая часть (доля) вариации объясняемой переменной обусловлена вариацией объясняющей переменной ($0 \le R^2 \le 1$). Чем ближе R^2 к единице, тем лучше регрессия аппроксимирует эмпирические данные. Если $R^2 = 1$, то между x и y существует линейная функциональная зависимость. Если $R^2 = 0$, то объясняемая переменная не зависит от данного набора объясняющих переменных.

Нормированный (скорректированный, адаптированный, поправленный) коэффициент детерминации:

$$R^2_{adj} = 1 - \left(1 - R^2\right) \frac{n-1}{n-k-1},$$

в отличие от R^2 может уменьшаться при введении в модель новых объясняющих переменных, не оказывающих существенное влияние на зависимую переменную, тогда как R^2 в таких случаях увеличивается.

На рис. приведен отчет регрессионного анализа в MS Excel с указанием связей между рассчитываемыми характеристиками.



ВЫВОД ИТОГОВ

Регрессионная статистика	
Множественный R	0,76955314
R-квадрат	0,592212035
Нормированный R-квадрат	0,475701188
Стандартная ошибка	10061,41834
Наблюдения	10

Дисперсионный анализ

	df	SS	MS	F	Значимость F
Регрессия	$k=$ 2	1029104027,1042	514552013,6	5,08289	0,043303242
Остаток	$n-k-1=$ 7	708624972,90	101232138,99		
Итого	$n-1=$ 9	1737729000			

	Коэффициенты	Станд ошибка	t-статистика	t табл.	P-Значение	Ниж 95%	Верх 95%
Y-пересечение	-156610,117	124117,442	-1,261789758		0,247440881	-450101,23	136880,9962
x1	133,3752257	52,28237121	2,551055406	2,36462	0,038044956	9,74706284	257,0033886
x2	-397,4934234	144,3077409	-2,754484417		0,02832025	-738,72701	-56,2598398

ВЫВОД ОСТАТКА

Наблюдение	Предсказанное y	Остатки	Станд остатки	Остатки^2
1	143536,7859	-1536,785897	-0,173191429	2361710,893
2	149784,3635	-5784,363475	-0,65188142	33458860,82
3	144504,6318	6495,368226	0,732009647	42189808,38
4	143597,3277	6402,672269	0,721563074	40994212,18
5	142690,0237	-3690,023688	-0,415855244	13616274,82
6	157682,4566	11317,54342	1,275455166	128086789
7	130540,5866	-4540,586593	-0,51171128	20616926,6
8	159445,2893	-16545,28931	-1,864607357	273746598,2
9	166885,3472	-3885,347156	-0,437867647	15095922,52
10	157233,1878	11766,8122	1,326086489	138457869,4
Диспр(B26:B35)	102910402,7104	70862497,29	**SSост=Σ(F26:F35)**	708624972,90
(или C12/n)		**(или C13/n)**	**SSост/(n-m-1)**	101232138,99
			Корень(F37)	10061,41834

Рис. Отчет регрессионного анализа в MS Excel

Обозначения, используемые в отчете:

df – число степеней свободы связано с числом единиц совокупности n и с числом определяемых по ней констант $(k+1)$.

F и Значимость F позволяют проверить **значимость уравнения регрессии**, т.е. установить, соответствует ли математическая модель, выражающая зависимость между переменными, экспериментальным данным и достаточно ли включенных в уравнение объясняющих переменных (одной или нескольких) для описания зависимой переменной.

По эмпирическому значению статистики *F* проверяется гипотеза равенства нулю одновременно всех коэффициентов модели. Значимость *F* – теоретическая вероятность того, что при гипотезе равенства нулю одновременно всех коэффициентов модели *F*-статистика больше эмпирического значения *F*.

Уравнение регрессии значимо на уровне α, если $F > F_c$, где F_c - табличное значение *F*-критерия Фишера ($F_c = F(\alpha, k, n-k-1)$).

P-Значение – вероятность, позволяющая определить значимость коэффициента регрессии $\hat{a}_i$.

Для уровня значимости $\alpha = 0.05$***:***

Если *Р-Значение* ≥ 0.05, то коэффициент $\hat{a}_i$ незначим, следовательно, гипотеза $H_0 : \hat{a}_i = 0$ принимается.

Если *Р-Значение* < 0.05, то коэффициент β_i значим, следовательно, гипотеза $H_0 : \hat{a}_i = 0$ отвергается.

Нижние 95%, Верхние 95% – доверительный интервал для параметра $\hat{a}_i$.

Значения ячеек **D12** и **D13** могут также рассчитываться по формуле:

$$MS_j = \frac{SS_j}{df_j}.$$

Графики кривых по наблюдаемым и расчетным значений объясняемой величины y представлены на рис.

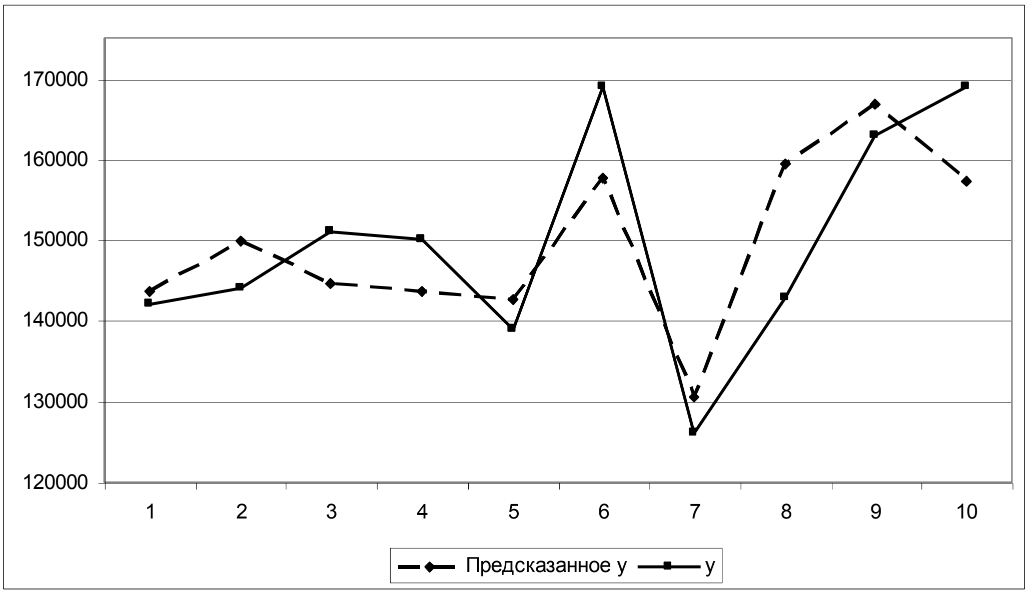


Рис. Графики кривых по наблюдаемым и расчетным значений объясняемой величины y

Проведем тест Дарбина-Уотсона для проверки наличия автокореляции первого порядка, то есть для проверки некоррелированности соседних величин e_t.

Гипотеза $H_0 : \rho = 0$(автокорреляция отсутствует).

Общая схема критерия Дарбина – Уотсона следующая:

1. По эмпирическим данным построить уравнение регрессии по МНК и определить значения отклонений $e_i = y_i - \hat{y}_i$ для каждого наблюдения $i = \overline{1, n}$. (Для этого в диалоговом окне **Регрессия** установить флажок на функцию **Остатки**).

2. Рассчитать статистику *DW*:

$$DW = \frac{\sum_{i=2}^{n} \left(e_i - e_{i-1}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}.$$

3. По таблице критических точек распределения Дарбина –Уотсона для заданного уровня значимости α, числа наблюдений n и количества объясняющих

переменных k определить два значения: d_l - нижняя граница и d_u - верхняя граница.

4. Сделать выводы по правилу:

$0 \le DW < d_l$ – существует положительная автокорреляция ($Corr(e_t, e_{t-1}) > 0$), H_0 отвергается;

$d_l \le DW < d_u$ – вывод о наличии автокорреляции не определен;

$d_u \le DW < 4 - d_u$ – автокорреляция отсутствует, H_0 принимается;

$4 - d_u \le DW < 4 - d_l$ – вывод о наличии автокорреляции не определен;

$4 - d_l \le DW \le 4$ – существует отрицательная автокорреляция ($Corr(e_i, e_{i-1}) < 0$), H_0 отвергается.

Задание к лабораторной работе 3. Постройте матрицу попарных коэффициентов корреляции, матрицу ковариации и регрессионную модель по данным в таблице, проведите полный регрессионный анализ (оцените адекватность регрессионной модели).

Таблица

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	Y
Название	Коэффициент расположения	Площадь, кв.м.	Номерной фонд (чел.)	Техническое оснащение	Приближенность к морскому побережью	инфра-структура	Цена, $/кв.м
"Ясная Поляна" (Гаспра)	0,00	176170,00	752,00	1,00	0,00	0,00	2800,00
"Украина" г. Ялта	1,00	83580,00	400,00	1,00	1,00	1,00	2000,00
"Мисхор"	2,00	32360,00	1114,00	1,00	1,00	1,00	2800,00
"Ливадия"	2,00	52500,00	346,00	1,00	1,00	1,00	2080,00
"Ай-Петри"	3,00	68700,00	762,00	0,00	0,00	1,00	2500,00

МОДУЛЬ 4

Производственные функции

План

1. Роль производственных функций в управлении.
2. Построение производственной функции.
3. Статистическая проверка производственной функции и её параметров.
4. Экономические характеристики производственной функции и её использование в управлении производством.
5. Особенности расчета и использования степенной производственной функции.

Роль производственной функции в управлении

Производственная функция является одним из наиболее распространенных методов экономико-математического анализа возможностей в сфере производства.

Результат процесса производства формируется под влиянием многих факторов. Качественный анализ позволяет в каждом конкретном случае установить, какие факторы влияют на результат производства. Для качественной оценки их влияния, измерения силы такого влияния используется производственная функция.

Одним из наиболее важных направлений использования производственной функции является анализ эффективности использования ресурсов. С помощью производственных функций можно проследить эффективность использования рабочей силы, производственных фондов, природных и других ресурсов. При этом можно выявить границы взаимозаменяемости ресурсов и наиболее рациональные их пропорции с точки зрения результатов производства.

Аппарат производственных функций используется также при обосновании оптимальных хозяйственных решений. Как модели оптимального планирования - производственные функции позволяют, прежде всего, определить максимально эффективное соотношение между ресурсами, дают наиболее целенаправленные пути их использования с учетом объемов ресурсов и границ их взаимозаменяемости.

Важную роль играют функции и как инструмент прогнозирования результатов производственной деятельности.

Эти направления использования производственных функций в хозяйственной деятельности обуславливают их роль и значение в управлении.

Студенты должны научиться правильно строить производственные функции, исследовать вероятность их параметров, анализировать результаты хозяйственной деятельности на основе экономических характеристик функции и давать рекомендации по управлению экономическими проблемами.

Построение производственной функции

Построение производственной функции связано с обработкой больших объемов экономической информации, поэтому для её практической реализации необходимо использовать ЭВМ.

Построим производственную функцию для таких данных.

Пример: По 12 предприятиям (данные условные) радиопромышленности заданы уровень производительности труда, фондоотдачи, механизации труда и квалификации работников (средний тарифный разряд). Необходимо построить производственную функцию производительности труда, найти её экономические характеристики и дать рекомендации по управлению уровнем производительности труда на основе производственной функции.

Для построения производственной функции формируется статистическая совокупность наблюдений (массив выходных данных), которую можно записать в виде матрицы n x m, где n - количество предприятий (единиц совокупности наблюдений), а m - количество показателей по каждому предприятию (табл. 1).

Таблица 1

N п/п	Производительность труда (млн.крб./чел.день)	Фондоотдача тыс.	Уровень механизации труда, %	Средний тарифный разряд
1	6449	38	11.2	2.0
2	13482	40	12.1	2.0
3	15202	44	11.9	3.1
4	18669	49	10.3	2.8
5	25332	45	14.0	2.5
6	30292	37	15.0	2.9
7	37443	43	12.0	3.0
8	44158	50	14.3	2.8
9	48044	51	14.7	3.0
10	52601	49	14.9	3.2
11	58895	52	15.3	3.4
12	58402	49	16.1	3.5

Эта совокупность наблюдений обязательно должна быть экономичной. с экономической точки зрения однородность можно обеспечить, если исследовать однотипные предприятия, которые имеют приблизительно одинаковые условия производственного процесса, а показатели в разрезе предприятий рассчитаны по одной и той же методике, за один и тот же период, имеют одинаковые единицы измерения. Все эти условия выполняются для нашего примера.

Поскольку нужно построить производственную функцию производительности труда, то этот показатель следует рассматривать в функции как результирующий. Обозначим уровень производительности труда через X_1, фондоотдачи - X_2, механизации труда - X_3, квалификации - X_4. Тогда функция в общем виде запишется так:

$X_1 = f\,(x_2, x_3, x_4)$

Аналитическая форма этой производственной функции зависит от характера взаимосвязей каждого из факторов (X_2, X_3, X_4) с производительностью труда (X_1), а также между собой. Так, производительность труда находится в прямой зависимости от уровня фондоотдачи (X_2), механизации труда (X_3) и квалификации работающих (X_4): увеличение каждого из них должно привести к росту производительности труда. При этом между факторами X_2, X_3, X_4 существуют взаимосвязи, но как будет показано ниже, они не тесные. Поэтому, здесь можно использовать наиболее простую форму зависимости - линейную:

$$X_1 = a_0+a_2 x_2+a_3x_3+a_4x_4$$

где a_0 - свободный член, $a_{j(j=2,3,4)}$ - параметры функции.

Можно также воспользоваться степенной функцией (линейно-логарифмической):

$$X_1 = a_0x_2^{a2}x_3^{a3}x_4^{a4}$$

Эти виды производственной функции производительности труда сравнительно легко могут быть построены на ЭВМ с помощью программ “REG” - “пошаговой линейной регрессии”.

Поскольку построение производственной функции осуществляется на основе использования пошаговой линейной регрессии, то рассмотрим суть этой регрессии.

После ввода в ЭВМ массива выходных данных алгоритм пошаговой регрессии предусматривает на первом этапе расчет матрицы коэффициентов парной корреляции, которые характеризуют тесноту взаимосвязей факторов (показателей) между собой и с результирующим признаком:

$$r = \begin{array}{c|cccc} & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline X_1 & 1.00 & 0.98 & -0.06 & 0.39 \\ X_2 & 0.98 & 1.00 & -0.10 & 0.32 \\ X_3 & -0.06 & -0.10 & 1.00 & -0.09 \\ X_4 & 0.38 & 0.32 & -0.09 & 1.00 \end{array}$$

Как свидетельствуют данные этой матрицы, наиболее тесная связь существует между производительностью труда и уровнем фондоотдачи (r_{X1X2}= 0.98), затем уровнем квалификации (r_{X1X4}=0.39) и, в конце, между производительностью труда и уровнем механизации труда (r_{X1X5}=-0.06).

Необходимо также обратить внимание на парные коэффициенты корреляции между факторами, включенными в производственную функцию. Они свидетельствуют о тесноте связей факторов между собой.

Если связь между факторами тесная, то можно говорить о наличии мультиколлинеарности, которая негативно влияет на оценку параметров производственной функции, т. к. математический аппарат теории корреляции и регрессии, который чаще всего используется для построения производственной функции, разработанный исходя из предположения отсутствия связей между факторами. Поэтому целесообразно проанализировать тесноту связи факторов между собой и, если она высокая, то необходимо исключить из производственной функции один из факторов, связь между которыми достаточно тесная.

Как видно из приведенной матрицы коэффициентов корреляции (r_{X2X3}=-0.10; r_{X2X4}=0.32; r_{X3X4}=-0.09), связь между факторами, включенными в производственную функцию производительности труда, не тесная.

В соответствии с алгоритмом пошаговой регрессии на первом шаге построения производственной функции $X_1=f(x_2,x_3,x_4)$ вводится в модель тот показатель, который имеет наиболее тесную связь с результирующим признаком. В данном случае это фондоотдача (X_2). На втором шаге - уровень квалификации рабочих(X_4) и, в конце, уровень механизации труда (X_3).

В результате получено три производственных функции:

$X_1=-92386.6+2767.6\ X_2$ (37)

$X_1=-114711.9+2692.0X_2+9826.0X_4$ (38)

$X_1=-117110.9+2699.3X_2+10098.3X_4+104.1X_3$ (39)

то есть на каждом шаге в модель дополнительно вводилась новая замена, которая имела наибольшую тесноту связи с результирующим признаком среди других переменных. Приведем эти производственные функции.

$X_1= f(X_2)$,

$X_1= f(X_2, X_4)$,

$X_1= f\ (X_2, X_4, X_3)$

Целесообразно обратить внимание на количественную оценку параметров a_j(j=2,3,4). Введение каждой новой переменной влияет на предыдущее значение параметра и это влияние будет тем больше, чем теснее взаимодействуют между собой переменные.

Статистическая проверка производственной функции и её параметров

Производственная функция и её параметры могут иметь погрешности, которые обусловлены особенностями моделирования. Поэтому оценим надежность производственной функции и её параметров.

Как приближенную оценку надежности производственной функции можно использовать множественный коэффициент корреляции (R), который характеризует тесноту связей всех факторов с результирующим признаком. Для первой функции R_1=0,987, для второй - R_2=0,989, для третьей - R_3=0,989. Такой уровень коэффициентов корреляции свидетельствует о достаточно тесной связи между производительностью труда и факторами, вошедшими в производственную функцию.

Коэффициент детерминации (R^2) свидетельствует о том, что приблизительно 88% колебаний производительности труда обусловлено изменениями показателей - фондоотдачи, механизации труда и квалификации работников.

Как достаточную характеристику надежности производственной функции используем критерий Фишера (F-критерий). Фактические значения для всех производственных функций следующие:

F_1=376.366 для $X_1=f(X_2)$,

F_1=223.689 для $X_1=f(X_2, X_4)$,

F_1=141.195 для $X_1=f(X_2, X_4, X_3)$

Табличные значения этого критерия для уровня доверия 1% и соответствующих степеней свободы:

$F_{1табл.}$=19.69; $F_{1табл.}$=13.81; $F_{1табл.}$=11.56

Поскольку фактические значения F - критерия намного превышают табличные, то можно сделать вывод, что производственные функции вероятностные. Для оценки вероятности каждого из параметров функций рассчитаны т. - критерии. Приведем их в табл. 2.

Таблица 2

Производственная ф-ия	Пара–метр a_2	Критерии факт. t	табл. t	Параметр a_4	Критерии факт. t	табл. t	Параметр a_3	Критерии факт. t	табл. t
1	2767.6	19.40	-	-	-	-	-	-	-
2	2692.0	19.39	2.71	9826.04	1.68	4.30	-	-	-
3	2699.3	18.86	2.71	10098.32	1.67	4.30	104.08	0.71	3.18

Как видно из данных табл.2 для параметра a_2 во всех производственных функциях $t_{факт.}>t_{табл.}$, поэтому его значение вероятностно. Для параметров a_4 и a_3 $t_{факт.}<t_{табл.}$, поэтому их значения невероятностны. Исследование вероятности параметров очень важно, так как только на основе достоверных параметров можно сделать экономические выводы относительно эффективности того или иного ресурса.

Проанализируем также остатки, которые характеризуют отклонения между фактическими и расчетными величинами производительности труда по предприятиям на основе производственной функции (39).

Таблица 3

№Предприятия	Фактический уровень ПП/ /	Рассчитанный уровень ПП/ /	Отклонения /абс/	Отклонения /в %/
1	6449	8317.87	-1868.87	28.9
2	13482	11323.95	2158.05	16.0
3	15202	13927.82	1274.18	8.38
4	18669	20530.28	-1861.28	9.96
5	25332	26257.68	-925.68	3.65
6	30292	32644.50	-2352.50	7.76
7	37443	38817.93	-1374.93	3.67
8	44158	39440.49	4717.51	10.68
9	48044	47408.67	635.33	1.32
10	52601	52053.75	547.25	1.04
11	58892	55889.09	-3005.91	5.00
12	58402	62356.89	-3954.89	6.77

Как свидетельствуют данные табл.3, отклонения между фактическими и расчетными уровнями производительности труда находятся в границах от 1.04% до 28.95. При этом следует отметить, что по десяти предприятиям отклонения колеблются приблизительно от 1% до 10%, а по двум (первому и второму) они составляют соответственно 28,9% и 16,0%. Эти отклонения обусловлены тем, что уровень производительности труда на двух предприятиях существенно отличается от её уровня на других десяти (он значительно ниже).

Размер отклонений (до 10%) свидетельствует о том, что производственная функция в целом достаточно эффективно отображает процесс формирования производительности труда от факторов.

Экономические характеристики производственной функции и её использование в управлении производством.

Чтобы показать методику использования производственной функции в анализе использования ресурсов, будем базироваться на функции (2).

X_1=-114711.9+2692.06 X_2+9826.04 X_4

Эта функция вероятна в целом и имеет лишь один параметр a_4 недостоверным. На данном этапе проигнорируем этот факт и рассмотрим методы расчета системы экономических характеристик, на основании которых можно делать выводы о степени эффективности факторов, включенных в производственную функцию. Но следует помнить, что когда производственная функция используется в управлении производством, то необходимо, чтобы все параметры были достоверными.

1. Средняя эффективность показателей:

$$m_j = \frac{x_1}{x_j} = \frac{\overline{x}_{1p}}{\overline{x}_j}; m_2 = \frac{\overline{x}_{1p}}{\overline{x}_2} = \frac{34080{,}74}{45{,}67} = 746{,}2$$

$$\overline{x}_{1p} = a_0 + a_2\overline{x}_2 + a_4\overline{x}_4; m_4 = \frac{\overline{x}_{1p}}{x_4} = \frac{34080{,}74}{2{,}65} = 12863$$

Рассчитанные показатели свидетельствуют о том, что при увеличении фондоотдачи на единицу при неизменных остальных факторах, производительность труда в среднем может возрасти на 746.2 единиц, а повышение среднего тарифного разряда работников на единицу, при неизменных остальных условиях будет способствовать увеличению производительности труда в среднем на 12863 единиц.

2. Предельная эффективность показателей:

$$\acute{y}_j = \frac{\partial x_{1p}}{\partial x_j}; \quad э_2 = \frac{\partial x_{1p}}{\partial x_2} = 2692{,}06; \quad э_4 = \frac{\partial x_{1p}}{\partial x_4} = 9826{,}04$$

На основании предельной эффективности показателей можно сделать вывод, что прирост производительности труда на единицу прироста фондоотдачи составляет 2692 единиц, а на единицу прироста уровня квалификации 9826 единиц.

3. Коэффициенты эластичности:

$$\text{E}x_j = \frac{\partial x_{1p}}{\partial x_j} : \frac{\overline{x}_1}{\overline{x}_j} = \frac{\partial x_{1p}}{x_1} : \frac{\partial x_j}{x_j};$$

$$\text{E}x_2 = \frac{\partial x_{1p}}{\partial x_2} : \frac{\overline{x}_{1p}}{\overline{x}_2} = \frac{2692{,}06}{746{,}2} = 3{,}6(\%)$$

$$\text{E}x_4 = \frac{\partial x_{1p}}{\partial x_4} : \frac{\overline{x}_{1p}}{x_4} = \frac{9826{,}04}{12863} = 0{,}76(\%)$$

Коэффициенты эластичности свидетельствуют о том, что при увеличении фондоотдачи на 1%, производительность труда возрастет на 3.6%, а при повышении квалификации работников на 1% её уровень поднимется на 0.76%.

4. Норма заменяемости показателей:

$$h_{ij} = -\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial x_i / \partial x_2}{\partial x_1 / \partial x_4} = -\frac{2692{,}06}{9826{,}04} = -0.27$$

Эта характеристика показывает, что относительно уровня производительности труда фондоотдача и квалификация работников могут быть взаимозаменяемыми. При этом речь идет об относительной замене, то есть для того, чтобы производительность труда не изменилась, уменьшение уровня фондоотдачи должно компенсироваться повышением уровня квалификации.

Данное соотношение равняется 1:0.27. А это значит, что при уменьшении фондоотдачи на единицу, чтобы не понизить уровень производительности труда, необходимо повысить средний тарифный разряд на 0.27.

5. Мера эффективности использования ресурсов:

$$\gamma_2 = \frac{\partial x_1}{\partial x_2} : x_2 = \frac{2692{,}06}{45{,}6} = 58{,}9;$$

$$\gamma_j = \frac{\partial x_1}{\partial x_2} : x_j;$$

$$\gamma_4 = \frac{\partial x_1}{\partial x_4} : x_4 = \frac{9826{,}04}{2{,}65} = 3708.$$

Эти показатели свидетельствуют о том, что предельный прирост производительности труда равняется 58.9 единицам на единицу фондоотдачи и 3708 единиц на один тарифный разряд.

Приведенные выше экономические характеристики взаимосвязи производительности труда с показателями фондоотдачи и квалификации работников, полученные на основании производственной функции, могут быть положены в основу регулирования уровня производительности и обозначения направлений её роста. Например в период t производительность труда должна возрасти на 5%. За счет каких изменений в производстве можно достичь этого роста?

Базируясь на рассчитанных коэффициентах эластичности и нормы взаимозаменяемости показателей, можно определить такие пути:

1) увеличить эффективность использования оборудования (фондоотдачу) на 1.4% при достигнутом уровне квалификации;

2) повысить уровень квалификации работников (средний тарифный разряд) на 6.7.% при достигнутом уровне эффективности использования оборудования;

3) увеличить эффективность использования оборудования и повысить уровень квалификации работников, использовав при этом норму заменяемости показателей 1:0.27. Это значит, что возможны разные комбинации уровня фондоотдачи и квалификации работников для достижения запланированного роста производительности труда.

Особенности расчета и использования экономических характеристик степенной производственной функции

Выше мы рассмотрели методы построения линейной функции и использования её характеристик в экономическом анализе и управлении. но наряду с линейными функциями очень распространены в экономико-математическом моделировании зависимостей степенной производственной функции. Построение этой функции практически не отличается от построения линейной функции, т.к. она реализуется как линейно-логарифмическая. Отсюда возникает необходимость прологарифмировать выходные данные для её расчета, а в конце на основу потенцирования обозначить все параметры.

Рассмотрим производственную функцию, которая рассчитана для группы свиней весом 34-75 фунтов американским ученым Ходи.

Эта производственная функция характеризует зависимость между приростом свиней, количеством скормленной кукурузы и количеством соевых жмыхов (все величины выражены в фунтах). Аналитически эта зависимость имеет вид:

$$y = 1{,}445 x_1^{0{,}547} x_2^{0{,}289}$$

где y - прирост свиней;

x_1 - количество кукурузы;

x_2 - количество соевых жмыхов.

Уравнения средней эффективности кормов имеют следующий вид:

$$\mu_1 = \frac{y}{x_1} = 1{,}445 x_1^{-0{,}453} x_2^{0{,}289};$$

$$\mu_2 = \frac{y}{x_2} = 1{,}445 x_1^{0{,}547} x_2^{-0{,}711}$$

Эти уравнения показывают, что средняя эффективность кормов зависит, прежде всего, от количества кормов. Анализируя уравнения средней эффективности кормов, можно сделать вывод, что с повышением одного вида корма, при неизменном уровне другого, средняя эффективность падает.

Это утверждение справедливо и для предельной эффективности кормов.

$$\acute{y}_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1} = 1{,}445 \cdot 0{,}547 x_1^{-0{,}453} x_2^{0{,}289}$$

$$\acute{y}_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2} = 1{,}445 \cdot 0{,}283 x_1^{0{,}547} x_2^{-0{,}711}$$

Поскольку a_1=0,547<1 a_2=0,289<1, то предельная эффективность намного ниже средней и будет уменьшатся при увеличении затрат кормов.

Здесь необходимо обратить внимание, что в отличие от линейной функции, где предельная эффективность затрат является величиной постоянной для всех наблюдений и равняется параметрам функции a_j, для степенной функции предельная эффективность является переменной величиной и зависит от объема затрат x_j.

Коэффициенты эластичности для данной производственной функции.

Ex_1=0,547; Ex_2=0,289.

На основе этих коэффициентов можно сделать вывод, что при увеличении кукурузы для кормления свиней на 1%, вес животных увеличится на 0.547%, а при увеличении соевых жмыхов для кормления свиней на 1%, их вес увеличится на 0.289%.

Суммарная эластичность $A=Ex_1+Ex_2=0,836<1$. Таким образом увеличение обоих кормов на 1% даст возможность повысить вес животных на 0.836%. Коэффициент взаимозаменяемости для данной производственной функции рассчитывается так:

$$h_2 = -\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = -\frac{0,547x_2}{0,289x_1} = -0,557$$

Для свиней весом от 34 до 75 фунтов 1 фунт соевых жмыхов заменяет 12.5 фунта кукурузы, когда рацион включает 1 фунтов соевых жмыхов и 337 фунтов кукурузы. При 75 фунтах соевых жмыхов в рационе и 137 фунтах кукурузы 1 фунт соевых жмыхов заменяет 1 фунт кукурузы. Предельные нормы взаимозаменяемости показывают какое количество кукурузы может быть заменено 1 фунтом соевых жмыхов при каждом заданном рационе. Если норма взаимозаменяемости кормов уменьшается, то необходимо менять рацион при изменении цен кукурузы и соевых жмыхов для того, чтобы получить заданный прирост при минимальных затратах кормов. Последние будут минимальными, если норма взаимозаменяемости будет равняться соотношению цен. Таким образом, для определения суточного рациона для животных с минимальными затратами необходимо, чтобы для каждой весовой группы соотношение между группами кормов в рационе соответствовало соотношению цен этих кормов.

Рассмотренные выше экономические характеристики производственной функции свидетельствуют о широких возможностях использования производственных функций в анализе и планировании производства. Но при этом необходимо особое внимание обращать на методику построения производственной функции, опираться на оценку вероятности её параметров. Нарушение методологических принципов построения производственной функции приводит к негодности её использования.

Лабораторная работа № 4.

Задача 1. Эконометрическая модель, характеризующая связь между темпом снижения себестоимости продукции и показателями по использованию трудовых ресурсов имеет вид:

$$\mathrm{T_c} = 1.02\mathrm{T}_{n}^{0.438} \cdot \mathrm{T}_{з}^{-0.287} \cdot \mathrm{K}^{0.163}$$

где T_c- индекс снижения себестоимости продукции

T_n- индекс изменения производительности труда в расчете на одного работающего

$T_з$- индекс изменения средней заработной платы одного работающего

К- удельный вес заработной платы в затратах на производство продукции в базовом периоде.

Используя приведенную модель, рассчитать ожидаемую величину себестоимости, если в плановом периоде предусмотрен рост производительности труда на 7%, средней заработной платы - на 4%, а удельный вес заработной платы на производство в базовом периоде составляла 30%.

Задача 2. По данным группы предприятий рассчитана производственная функция производительности труда:

$y=14371,25-0,5659x_1-1413,705x_2+0,00003646x_1^2+0,1168x_1x_2-0,05486x_1x_3 0,05232x_4+73,1516x_2x_3+5,20x_4^2$

где y - производительность труда, крб.

x_1- стоимость основных производственных фондов, тыс.крб.

x_2- коэффициент машинооснащенности труда,

x_3- коэффициент электрооснащенности труда

x_4- удельный вес новой продукции в общем количестве товарной продукции предприятия, %

Необходимо:

1. Проанализировать производственную функцию.

2. Найти экономические характеристики этой функции.

Задача 3. На основании данных о работе предприятий дорожного гидромашиностроения за 3 года построены производственные функции производительности труда.

$$y=-8377+5511x_1+409x_2+82x_3+78x_4-295x_5-769x_6+10x_7 \quad (40)$$

$$y=200H-7397/x_1-23991/x_2-125879/x_3-207/x_4+0.69/x_5+19374/x_6-5718/x_7 \quad (41)$$

$$y=7.4\, x_1^{0.93}\, x_2^{0.86}\, x_3^{0.04}\, x_4^{0.05}\, x_5^{-0.05}\, x_6^{0.01}\, x_7^{0.02} \quad (42)$$

$$y= 3382+1080x_1^2+1.92\, x_2^2+0.78\, x_3^2+2.90\, x_4^2-48\, x_5^2+189\, x_6^2+0.60\, x_7^2 \quad (43)$$

где y- производительность труда, крб.

x_1- фондоотдача, тыс. крб.

x_2- фондооснащенность труда, крб.

x_3- удельный вес технически оснащенных норм выработки, %

x_4- удельный вес фактического фонда времени в календарном, %;

x_5- удельный вес прогулов, %;

x_6- средний тарифный разряд работников;

x_7- удельный вес внутрисменных простоев в фактическом фонде времени, %.

Необходимо:

1. Оценить достоверность каждой производственной функции, если коэффициент корреляции для каждой из них равен: R_1=0,92; R_2=0,72; R_3=0,98; R_4=0,87, критерий Фишера: F_1=33,7; F_2=6,8; F_3=145; F_4=19,8.

2. Определить , какая из функций является наиболее адекватной для изучения условий формирования производительности труда.

Задача 4. Используя производственные функции, приведенные в задании 3, рассчитать предельную эффективность факторов, коэффициенты эластичности, общую эластичность для каждой функции и дать им сравнительный анализ.

Задача 5. В институте экономики и организации промышленного производства СВАН была рассчитана динамическая эконометрическая модель себестоимости цемента, которая учитывала распределенные лаги запозданий влияния факторов:

$Y_t=1220-0{,}0064x_{1(t-3)}-0{,}022x_{2(t-6)}-0{,}45x_{3(t-3)}$

где Y_t- себестоимость цемента в период t

x_1- средняя марка цемента

x_2- стоимость основных производственных фондов

x_3- тонкость помола шлака.

Это основное уравнение модели дополнено системой уравнений

$X_1(t)=674{,}78-25{,}378x_4-0{,}1510x_{3,(t-3)}$

$X_2(t)=1{,}356-0{,}822x_4+0{,}8770x_{3,(t-6)}$

$X_3(t)=2{,}78+0{,}2209x_4+0{,}0025x_{1,(t-3)}+0{,}002x_{2,(t-6)}+0{,}4826x_{3,(t-3)}$,

где x_4- часовая производительность цементных заводов.

Необходимо дать анализ этой динамической эконометрической модели на основании рассчитанных экономических характеристик.

Лабораторная работа № 5

Задача 1

На основании данных таб. 4-6 в разрезе цехов основного производства машиностроительного завода необходимо:

1. Проследить однородность выходной совокупности наблюдений и выбрать показатели для построения производственной функции производительности труда.
2. Построить производственную функцию.
3. Дать оценку вероятности производственной функции и её параметров.
4. Найти экономические характеристики взаимосвязи и сделать выводы по управлению уровнем производительности труда на основании производственной функции.

Задача 2

На основании данных задачи №1 необходимо:

1. Проследить однородность выходной совокупности наблюдений и выбрать показатели для построения производственной функции заработной платы.

3. Дать оценку вероятности производственной функции и её параметров.

4. Найти экономические характеристики взаимосвязи и сделать выводы по управлению уровнем заработной платы на основании производственной функции.

Задача 3

На основании данных задачи №1 необходимо:

1. Отобрать показатели для построения производственной функции нормы прибыли.
2. Построить производственную функцию.

3. Рассчитать экономические характеристики производственной функции и сделать выводы на основе количественных характеристик связи.

Задача 4

По 10 промышленным предприятиям приведены данные, которые характеризуют объем продукции, среднегодовую величину промышленно-производственных фондов и количество работающих (табл. 7, 8). Пользуясь этими данными необходимо:

1. Определить аналитическую форму зависимости объема производства от величины фондов и числа работающих.
2. Построить производственную функцию.
3. Дать оценку вероятности производственной функции и её параметров.
4. Определить экономические характеристики взаимосвязи и сделать выводы о эффективности использования затрат производственных ресурсов.

Задача 5

По десяти совхозам приведены данные о урожайности зерновых, количестве внесенных удобрений на 1га, и затраты труда на 1га (таб. 9,10). Пользуясь этими данными необходимо:

1. Определить аналитическую форму зависимости урожайности от внесенных удобрений и затрат труда на 1га.
2. Построить производственную функцию на ЭВМ.
3. Дать оценку вероятности производственной функции и её параметров.
4. Определить экономические характеристики взаимосвязи по производственной функции и сделать выводы о эффективности использования удобрений и труда.

Вариант 1

Таблица 4

Номер цеха	Производительность труда (млн. крб./чел. день	Фондоемкость продукции (крб.)	Коэффициент занятости рабочей силы(%)	Удельный вес прогулов (%)	Выполнение нормы выработки (%)	Размер премии к з/п (коэф.)	Среднемесячная зарплата (тыс. крб.)	Процент продукции сданной без доработок	Средний тарифный разряд
1	255,0	0,41	9,7	0,45	130,1	0,34	4,5	96,4	4,0
2	222,0	0,32	15,1	0,44	127,4	0,23	4,8	98,9	4,0
3	230,1	0,30	13,2	0,92	150,6	1,26	3,9	92,4	3,8
4	245,4	0,21	8,6	0,87	148,7	0,26	5,6	94,2	3,5
5	182,8	0,17	22,8	1,02	139,3	0,74	4,0	96,8	4,2
6	278,5	0,16	11,8	0,62	140,6	0,46	5,3	94,2	4,6
7	246,0	0,26	16,6	0,38	151,8	0,44	4,7	98,2	5,2
8	195,3	0,50	14,0	1,92	187,6	0,55	4,5	51,8	4,3
9	172,8	0,30	14,2	1,12	119,4	0,65	4,4	95,0	3,9
10	108,0	0,27	7,1	0,72	126,2	0,47	4,6	98,8	4,5
11	97,5	0,11	12,2	0,80	121,5	0,63	4,3	94,1	3,5

12	111,3	0,19	9,8	0,93	130,6	0,56	3,7	95,2	3,8
13	223,9	0,52	16,8	0,27	119,8	1,10	5,3	94,3	4,3
14	274,0	0,40	17,3	0,50	126,0	0,80	6,0	97,5	4,8
15	215,0	0,29	14,8	0,62	130,6	1,01	6,1	51,2	4,2

Вариант 2 Таблица 5

Номер цеха	Производительность труда (млн. крб./чел.день	Фондоемкость продукции (крб.)	Коэффициент занятости рабочей силы(%)	Удельный вес прогулов (%)	Выполнение нормы выработки (%)	Размер премии к з/п (коэф.)	Среднемесячная зарплата (тыс. крб.)	Процент продукции сданной без доработок	Средний тарифный разряд
1	248,1	0,53	9,4	1,00	131,9	0,45	4,2	90,6	4,7
2	253,2	0,60	8,7	0,80	145,3	0,43	4,6	98,4	4,9
3	260,0	0,63	8,3	0,95	138,0	0,37	5,2	93,2	5,2
4	262,0	0,70	8,0	0,96	140,1	0,51	4,8	90,9	5,4
5	215,8	0,71	8,6	0,88	135,0	0,60	3,6	91,3	4,0
6	200,0	0,45	16,8	1,01	128,0	0,40	3,5	88,1	3,8
7	278,0	0,72	10,4	1,12	153,0	0,63	4,1	70,6	4,7
8	195,3	0,48	15,5	0,96	123,5	0,36	3,9	82,3	2,9
9	202,6	0,49	20,4	0,78	111,0	0,38	4,0	92,4	4,0
10	189,7	0,50	17,8	0,82	121,0	0,43	3,5	95,3	3,7
11	197,3	0,51	15,8	1,16	128,3	0,47	4,5	98,0	3,5
12	248,3	0,71	9,6	1,09	146,2	0,53	4,9	87,1	4,5
13	255,6	0,72	19,8	1,21	138,5	0,60	5,3	90,3	4,6
14	270,1	0,78	12,3	1,35	153,6	0,71	5,2	96,9	4,1
15	261,3	0,70	11,1	1,15	147,3	0,62	5,6	93,2	4,7

Вариант 3 Таблица 6

Номер цеха	Производительность труда (млн. крб./чел. день	Фондоемкость продукции (крб.)	Коэффициент занятости рабочей силы(%)	Удельный вес прогулов (%)	Выполнение нормы выработки (%)	Размер премии к з/п (коэф.)	Среднемесячная зарплата (тыс. крб.)	Процент продукции сданной без доработок	Средний тарифный разряд
1	250,0	0,51	9,2	1,11	130,8	0,44	3,8	95,4	4,8
2	225,3	0,48	10,1	0,90	141,6	0,38	4,2	98,7	4,3
3	186,9	0,38	16,2	0,83	125,4	0,33	6,3	96,4	3,5
4	228,5	0,56	10,1	0,95	127,3	0,51	9,4	93,0	4,9
5	226,1	0,50	8,6	0,86	136,4	0,60	6,8	92,1	4,0
6	189,0	0,37	15,4	1,15	131,4	0,40	5,4	98,5	3,8
7	191,3	0,31	11,6	0,98	128,3	0,55	4,3	90,0	3,5

8	228,5	0,43	10,5	1,6	135,4	0,38	4,8	88,3	4,2
9	171,5	0,42	18,8	1,23	136,6	0,28	5,6	87,4	4,1
10	274,5	0,62	14,3	0,72	151,5	0,60	5,5	91,5	5,1
11	269,3	0,59	8,8	0,46	150,1	0,90	4,7	93,4	4,8
12	270,5	0,70	7,6	0,56	146,3	0,92	4,9	95,3	4,9
13	236,0	0,39	9,4	0,50	136,6	0,76	5,4	88,4	4,1
14	250,4	0,46	10,6	0,62	138,3	0,70	6,2	90,3	3,9
15	241,1	0,50	11,2	0,73	141,1	0,63	5,7	92,6	4,3

Вариант 1 Таблица 7

Предприятия	Объем продукции (млн.крб.)	Среднегодовая стоимость пром.-производственных фондов (млн.крб.)	Количество работающих (тыс. чел.)
1	530	153	2,5
2	548	160	2,8
3	629	170	2,3
4	630	179	3,0
5	615	187	3,1
6	625	184	2,8
7	650	202	2,3
8	648	219	2,4
9	655	229	2,5
10	729	248	2,6

Вариант 2 Таблица 8

Предприятия	Объем продукции (млн.крб.)	Среднегодовая стоимость пром.-производственных фондов (млн.крб.)	Количество работающих (тыс. чел.)
1	750	260	2,8
2	645	193	3,2
3	649	202	3,6
4	710	242	3,8
5	725	265	2,9
6	649	204	3,3
7	638	201	2,8
8	497	184	3,1
9	538	197	3,6
10	650	215	3,7

Вариант 1 Таблица 9

Номер совхоза	Урожайность ц/га	Количество минеральных удобрений на 1 га (ц)	Затраты труда на 1 га (чел. дней)
1	18,3	92	3,0

2	22,0	121	3,1
3	19,4	146	2,9
4	24,7	175	3,2
5	16,4	183	2,8
6	21,9	197	3,3
7	18,9	208	2,5
8	17,0	247	2,2
9	19,3	271	2,7
10	24,4	285	3,2

Вариант 2 Таблица 10

Номер совхоза	Урожайность ц/га	Количество минеральных удобрений на 1 га (ц)	Затраты труда на 1 га (чел. дней)
1	2	3	4
1	22,3	330	3,1
2	18,2	343	2,8
3	25,4	396	3,5
4	23,4	412	3,7
5	28,9	426	4,0
6	27,3	440	3,8
7	24,5	458	3,3
8	28,1	464	3,9
9	27,5	424	3,9
10	29,3	395	4,0

Лабораторная работа № 6.

1. Построить две производственные функции по динамическим рядам (за 20лет), которые характеризуют экономические показатели производственной системы (см. таб. 11).

2. Определить значимость функций и выбрать одну функцию для следующего анализа.

3. Провести анализ производственной функции.

Экономические показатели функционирования производственной системы

Таблица 11

Год	Производство валового продукта на 1-го работающего, крб.	Товарная продукция, тыс. крб.	Удельный вес работников в общей численности работающих, %	Уровень механизации вспомогательных работ	Коэффициент обновления оборудования, %	Уровень электровооруженности	Прибыль, млн. крб.	Уровень рентабельности, %	Оптовая цена реализации продукции, млн. крб.	Уровень себестоимости на единицу продукции,коп./крб.
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
1.	6449	11621	67,57	35,9	12	2,72	1,976	38,5	10,671	77,1
2.	6423	13482	69,12	37,5	12	2,59	2,780	39,7	12,567	79,6
3.	6327	15202	69,32	39,7	7,9	2,41	3,404	11,3	14,200	95,2
4.	6866	18669	69,25	41,1	10	2,56	1,246	19,4	14,516	89,2
5.	7887	153332	69,39	43,2	29	2,37	2,629	22,3	18,345	85,8
6.	8528	30392	68,63	44,8	12	2,75	6,023	36,6	31,198	80,7
7.	9270	37443	70,38	46,9	12	2,8	8,563	45,7	38,058	79,4
8.	10161	44158	70,08	47,6	10,5	2,69	10,352	49,3	43,830	76,4
9.	10729	48044	69,27	49,4	20	2,9	11,738	50,1	47,830	76,2
10.	11545	52601	69,72	51,8	15	2,77	11,882	45,6	44,054	75,0
11.	11548	58895	70,41	54,9	10	2,64	13,411	47,0	51,242	72,9
12.	11689	58402	71,03	56,55	6	2,6	15,395	54,9	56,400	72,3
13.	11692	58410	70,2	56,7	5	2,6	15,5	53,8	56,4	72,5
14.	11695	58440	71,1	57,8	6,6	2,7	15,58	54,1	56,6	72,8
15.	11701	58504	72,3	58,9	6,4	2,8	15,7	54,5	56,8	73,1
16.	11705	58511	72,5	60,2	6,7	2,8	15,9	54,6	57,1	73,3
17.	11711	58517	72,55	61,3	6,9	2,9	15,95	54,65	57,2	73,5
18.	11715	58521	72,61	61,6	7,1	3,0	15,97	54,8	57,3	73,6
19.	11718	58526	72,63	61,8	7,3	3,1	16,1	54,9	57,5	73,7
20.	11720	58600	74,0	63,0	7,5	3,2	16,5	55,4	57,8	75,0

4. ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Самостоятельная работа студентов при изучении дисциплины предусматривает:

• систематическое посещение лекций, практических занятий и проведения конспекта лекций:

• систематическое изучение лекционного материала и содержания учебной литературы, *которая* рекомендуется этой программой;

• подготовку к практическим занятиям:

• своевременное выполнение домашних заданий.

За самостоятельной работой студентов осуществляется систематический контроль в виде защиты домашних заданий, какие студенты должны выполнить по каждой теме курса, который изучается. Качество усвоения студентами текущего учебного материала лектор контролирует путем выполнения и защиты студентами отдельных разделов индивидуального задания, которое обобщает материал.

5. ИНДИВИДУАЛЬНАЯ РАБОТА СТУДЕНТОВ

Индивидуальное практическое задание — одна из основных форм самостоятельной работы студентов. Цель индивидуальных практических заданий заключается в закреплении и углублении теоретических и практических знаний, полученных студентами в процессе изучения дисциплины, развития навыков самостоятельной проработки законодательных, нормативных актов, специальной литературы и статистических материалов, обобщения собранной информации и обоснования сделанных выводов, а также письменного изложения полученных результатов.

Выполнение индивидуального практического задания дает возможность студенту научиться самостоятельно работать с разными информационными источниками, обобщать материалы периодической литературы, глубже изучать основные методологические средства моделирования в системе принятия управленческих решений .

Подготовка индивидуального практического задания включает такие этапы: выбор темы, подбор законодательных актов, специальных литературных источников и фактического статистического материала на базах практики или по месту работы студента; консультация с преподавателем; передача выполненного практического задания преподавателю для оценивания.

Результаты выполнения индивидуального практического задания оформляются в виде письменной работы, которая должна содержать:

— титульный лист;
— содержание;
— текстовую часть;
— список использованной литературы;
— подпись студента.

Результаты расчетов с соответствующими объяснениями следует оформить в таблицах (графики, диаграммы, рисунки). До индивидуального задания добавляются копии финансовой отчетности за —3 годы.

Рекомендации и выводы должны быть конкретными и логично обоснованные и подтвержденные цифровым материалом, предложения относительно повышения эффективности системы принятия управленческих решений по данным моделирования

Экономическую литературу и законодательные акты к теме индивидуального практического задания студент подбирает самостоятельно, используя библиотечный каталог. Для подготовки индивидуального практического задания студент должен использовать специальную литературу, которая касается темы, периодические издания (журналы, газеты, научные статьи). Консультацию по вопросам подбора литературы студент может получить у преподавателя или у работника библиотеки.

Индивидуальное практическое задание выполняется каждым студентом отдельно с использованием практических данных баз практики или места работы.

ВАРИАНТЫ ИДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ (2 семестр)

ЗАДАНИЕ 1.

Даны коэффициенты прямых затрат (матрица А) и конечное потребление (У) для трехотраслевой экономики.

Требуется определить:

1. коэффициенты полных затрат;
2. вектор валового выпуска;
3. межотраслевые поставки продукции;
4. заполнить схему межотраслевого баланса вида:

Производящие отрасли	**Потребляющие отрасли**			**Конечный продукт**	**Валовой продукт**
	1	**2**	**3**		
1					
2					
3					
Условно чистая продукция					
Валовой продукт					

Ответить на вопросы:

1. Как цели производства и распределения, свойственные обществу, выражаются в межотраслевых балансах?

2. Пусть отрасль 1 – производство гвоздей и шурупов, отрасль 2 – машиностроение, отрасль 3 – производство мебели, отрасль 4 – строительство. Дайте экономическую интерпретацию распределения всей годовая продукция отрасли 1, запишите 1-ю строку МОБ.

3. Пусть отрасль 2 – машиностроение, отрасль 8 – металлургия, отрасль 9 – производство пластмасс, отрасль 10 – деревообрабатывающая промышленность, отрасль 11 – электронная промышленность. Покажите структуру затрат на производство продукции машиностроения (прямые материальные затраты и условно-чистая продукция) в текущем году, запишите 2-й столбец МОБ.

4. Ответить на индивидуальный вопрос.

Вариант 1

$$A=\begin{pmatrix}0{,}05 & 0{,}1 & 0\\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0\\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}15\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}250\\ 250\\ 120\end{pmatrix}$$

Дать понятие межотраслевого баланса, его связь с валовым национальным продуктом.

Вариант 2

$$A=\begin{pmatrix}0{,}02 & 0{,}15 & 0\\ 0 & 0{,}25 & 0\\ 0{,}15 & 0{,}1 & 0{,}5\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}300\\ 350\\ 150\end{pmatrix}$$

Определить суть метода “затраты–выпуск”

Вариант 3

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0{,}1 & 0\\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2\\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}15\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}200\\ 200\\ 150\end{pmatrix}$$

Дать понятие коэффициентов прямых затрат

Вариант 4

$$A=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}17 & 0\\ 0 & 0{,}25 & 0{,}3\\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}15\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}100\\ 120\\ 320\end{pmatrix}$$

Дать понятие линейной зависимости между затратами на производство и выпуском продукции; формулы их исчисления.

Вариант 5

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}15 \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} 265 \\ 400 \\ 230 \end{pmatrix}$$

Дать понятие матрицы коэффициентов прямых затрат

Вариант 6

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}15 & 0{,}1 & 0{,}15 \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} 120 \\ 80 \\ 120 \end{pmatrix}$$

Дать понятие коэффициентов полных затрат: определение затрат на производство данного продукта косвенно через другие продукты (косвенные затраты).

Вариант 7

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}15 & 0{,}1 & 0{,}15 \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} 125 \\ 160 \\ 185 \end{pmatrix}$$

Дать понятие: матрица коэффициентов полных затрат и определить формулы исчисления.

Вариант 8

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}15 & 0{,}2 \\ 0{,}25 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}15 \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} 150 \\ 250 \\ 180 \end{pmatrix}$$

Дать понятие: чистая отрасль.

Вариант 9

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}08 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}21 & 0{,}13 & 0{,}09 \\ 0{,}11 & 0{,}14 & 0{,}15 \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} 187 \\ 168 \\ 234 \end{pmatrix}$$

Основные предпосылки экономико-математической модели статического межотраслевого баланса

Вариант 10

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}15 \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} 120 \\ 200 \\ 180 \end{pmatrix}$$

Определить отличия динамических межотраслевых балансов от статических.

Вариант 11

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}02 & 0{,}15 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}1 \\ 0{,}15 & 0{,}1 & 0{,}15 \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} 220 \\ 230 \\ 128 \end{pmatrix}$$

Дать понятие межотраслевого баланса, его связь с валовым национальным продуктом.

Вариант 12

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0{,}1 & 0{,}2\\ 0{,}2 & 0{,}05 & 0{,}05\\ 0{,}15 & 0{,}15 & 0{,}5\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}188\\ 225\\ 170\end{pmatrix}$$

Определить суть метода “затраты–выпуск”

Вариант 13

$$A=\begin{pmatrix}0{,}03 & 0{,}1 & 0{,}05\\ 0{,}15 & 0 & 0{,}2\\ 0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}15\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}420\\ 300\\ 250\end{pmatrix}$$

Дать понятие коэффициентов прямых затрат

Вариант 14

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0{,}11 & 0{,}1\\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0\\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}15\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}128\\ 155\\ 220\end{pmatrix}$$

Дать понятие линейной зависимости между затратами на производство и выпуском продукции; формулы их исчисления.

Вариант 15

$$A=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0 & 0{,}15\\ 0{,}05 & 0{,}2 & 0{,}05\\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}220\\ 300\\ 350\end{pmatrix}$$

Дать понятие матрицы коэффициентов прямых затрат

Вариант 16

$$A=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}04\\ 0{,}2 & 0{,}21 & 0{,}15\\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}145\\ 180\\ 190\end{pmatrix}$$

Дать понятие коэффициентов полных затрат: определение затрат на производство данного продукта косвенно через другие продукты (косвенные затраты).

Вариант 17

$$A=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}2\\ 0{,}06 & 0{,}18 & 0{,}05\\ 0 & 0{,}16 & 0{,}1\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}159\\ 170\\ 185\end{pmatrix}$$

Дать понятие: матрица коэффициентов полных затрат и определить формулы исчисления.

Вариант 18

$$A=\begin{pmatrix}0{,}08 & 0{,}1 & 0{,}02\\ 0{,}2 & 0{,}02 & 0{,}1\\ 0{,}1 & 0 & 0{,}1\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}180\\ 100\\ 280\end{pmatrix}$$

Дать понятие: чистая отрасль.

Вариант 19

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0{,}15 & 0\\ 0{,}21 & 0{,}1 & 0{,}05\\ 0 & 0{,}1 & 0{,}15\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}180\\ 160\\ 240\end{pmatrix}$$

Основные предпосылки экономико-математической модели статического межотраслевого баланса

Вариант 20

$$A=\begin{pmatrix}0{,}15 & 0 & 0{,}06\\ 0 & 0{,}08 & 0{,}1\\ 0{,}15 & 0{,}1 & 0{,}1\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}145\\ 159\\ 109\end{pmatrix}$$

Определить отличия динамических межотраслевых балансов от статических.

ЗАДАНИЕ 2. Производная, эластичность, суммарная функция

Вычислите производную (предельную функцию), эластичность, суммарную функцию (интеграл) для функции N(x)=100/x. В данном примере можно интерпретировать x как цену товара, а N(x) - как спрос, предельную функцию - как прирост спроса при росте цены на 1 рубль (здесь отрицательный), а эластичность показывает, на сколько процентов изменится спрос при росте цены на 1%. Суммарную функцию здесь можно интерпретировать как сумму продаж за x дней при ежедневном росте цен на 1 рубль.

Задайте диапазон x 10…30, вычислите N(x), производную dN/dx = (B7-B6)/(A7-A6) - в данном случае. Эластичность E=(ΔN/N)/(Δx /x), в качестве N и x возьмем их средние значения, тогда E=C6/(B6+B7)*(A6+A7). Суммарная функция формируется добавлением первого значения спроса к начальному значению (здесь 0): =E7+E6, а затем - добавлением следующих значений спроса к предыдущим значениям суммы (копирование формулы вниз). При правильном вычислении интеграла следует брать средние значения N по двум соседним точкам и домножать их на Δx.

	A	B	C	D	E
5	Цена x	N	dN/dx	ластичность	Сумм.функция
6	10	10	-0,90909	-1	0
7	11	9,090909	-0,75758	-1	10
8	12	8,333333	-0,64103	-1	19,09090909
9	13	7,692308	-0,54945	-1	27,42424242
10	14	7,142857	-0,47619	-1	35,11655012

11	15	6,666667	-0,41667	-1	42,25940726
12	16	6,25	-0,36765	-1	48,92607393
13	17	5,882353	-0,3268	-1	55,17607393
14	18	5,555556	-0,2924	-1	61,05842687
15	19	5,263158	-0,26316	-1	66,61398242
16	20	5	-0,2381	-1	71,87714032
17	21	4,761905	-0,21645	-1	76,87714032
18	22	4,545455	-0,19763	-1	81,63904508
19	23	4,347826	-0,18116	-1	86,18449962
20	24	4,166667	-0,16667	-1	90,53232571
21	25	4	-0,15385	-1	94,69899238
22	26	3,846154	-0,14245	-1	98,69899238
23	27	3,703704	-0,13228	-1	102,5451462
24	28	3,571429	-0,12315	-1	106,2488499
25	29	3,448276	-0,11494	-1	109,8202785
26	30	3,333333	-3,33333		113,2685544

Постройте графики N(x), dN/dx, эластичности и суммарной функции.

ЗАДАНИЕ 3. Математическое программирование. Планирование закупок

Основная цель планирования любой деятельности - получение максимального результата (прибыли, объема производства и т.п.) при имеющихся ограничениях. Разработке оптимальных программ-планов посвящен раздел математики под названием “***математическое программирование***”, в частном случае - “***линейное программирование***”. Стандартная формулировка задачи математического программирования: ***изменяя значения*** аргументов, требуется найти минимум или максимум зависящей от них ***целевой функции***, наиболее полно характеризующей эффективность производства или закупок, при наложенных ***ограничениях***-равенствах и ограничениях-неравенствах. Допустимое решение, отвечающее этим условиям, называется оптимальным планом. Его может не существовать, если наложенные ограничения противоречивы, а иногда может существовать множество решений. В задачах линейного программирования целевая функция и функции в ограничениях - линейные.

Для решения задач линейного программирования используются различные методы (Ньютона, наискорейшего спуска, симплекс-метод), общий принцип которых таков: выбирается неоптимальный опорный план (аналогично приблизительным значениям X, Y, Z в Лаб. №2) и его параметры варьируются с целью последовательного улучшения плана, то есть оптимизации целевой функции при соблюдении всех ограничений, с использованием сервиса *Поиск решения*, что дает возможность решать оптимизационные задачи, не вникая в сложную математику.

Предлагаемое упражнение является предельно упрощенным вариантом реальной задачи по составлению рациона для животных, которую можно сформулировать следующим образом: заданы нормы потребления различных компонент - жиров, белков и т.д. (в экономической интерпретации - ***благ***) и их содержания в различных видах кормов, а также цены кормов. Требуется составить план закупки кормов, обеспечивающий минимальную стоимость рациона при потреблении благ не меньше норм. Для решения задачи требуется внести в таблицы Excel нормы, содержания компонент в кормах, цены кормов, а также опорный план - произвольные значения масс закупаемых кормов. Содержания компонент домножаем на массы кормов и суммируем по компонентам, получая их суммарные количества (сколько всего съедено жиров, белков и т.д.), которые в ограничениях Поиска решения устанавливаются больше или равными нормам. Домножаем цены кормов на их количества, суммируем произведения и получаем стоимость закупки - целевую функцию, для которой в *Поиске решения* задаем минимизацию. Изменяемые ячейки - массы закупаемых кормов, на них накладывается глобальное ограничение - требование неотрицательности. Все числа в данном примере - условные.

Составьте рацион для коровы из 4 видов кормов, содержащих 4 компонента (жиры, белки, углеводы, витамины), имеющий минимальную стоимость:

- составьте таблицу по приведенному образцу; рацион (количество кормов) задайте произвольно;
- перемножьте содержание компонент в кормах и их цены на количество соответствующих кормов (используйте копирование формулы);
- просуммируйте результаты умножения по столбикам (результаты – сколько всего компонент будет съедено и сколько это стоит);
- вызовите *Сервис – Поиск решения*;
- задайте *Целевую ячейку* с суммарной стоимостью (здесь F18), цель – *Минимальное значение,*
- *Изменяя ячейки* с количеством кормов (здесь G8:G11),
- *Ограничения Добавить :* суммарное потребление компонент должно быть не меньше норм (здесь B16:E16 ≥ B6:E6) и количество кормов не может быть отрицательным (здесь G8:G11 ≥ 0);
- ознакомьтесь с *Параметрами* и нажмите *Выполнить*.

	A	B	C	D	E	F	G
5		**жиры**	**белки**	**углеводы**	**витамины**	**цена**	**количество**
6	**нормы**	40	70	1200	150		
7	**Корма**						
8	**Сено**	5	3	100	10	5	1
9	**Овес**	22	12	120	20	10	1
10	**Ячмень**	33	17	88	30	15	1
11	**Силос**	55	23	100	80	25	1
12							
13	**Сено**	=B8*$G8	3	100	10	5	
14	**Овес**	22	12	120	20	10	
15	**Ячмень**	33	17	88	30	15	

16	**Силос**	55	23	100	80	25	
17							
18	**Сумма**	=Σ(B13:B16)	55	408	140	55	Целевая

Применим данную технологию для изучения функции потребительского предпочтения, называемой также функцией Р.Стоуна

$$U(x)=\mathbf{\Pi}(x_i - a_i)^\wedge \alpha_i$$

где a_i - минимально необходимое количество i - го блага, которое приобретается в любом случае (в данном случае - нормы),

$\boldsymbol{\alpha_i}$ характеризует степень важности блага.

Применительно к данной задаче функция Стоуна характеризует качество молока, и мы можем минимизировать стоимость рациона при заданном качестве молока или максимизировать качество при заданной стоимости. Для этого зададим α_i и вычислим функцию Стоуна, которую используем в качестве дополнительного ограничения. Целесообразно в выражение в скобках добавить очень малое число, например 10^{-7}, чтобы избежать отрицательных чисел, которые могут возникнуть из-за погрешности расчетов при вычитании равных величин.

	жиры	белки	углеводы	витамины		
α_i	0,3	0,3	0,15	0,25		Качество
$(\Sigma_i$ -норма $_i)^\wedge\alpha_i$	4,761711	3,265933	2,245139	2,864089		100

Здесь приведены числа после решения задачи минимизации стоимости рациона при соблюдении норм и обеспечении качества 100.

Без изменения таблиц можно решить другую задачу - максимизировать функцию Стоуна, объявив ее целевой ячейкой, при заданной стоимости рациона, которая становится ограничением.

ЗАДАНИЕ 4. Планирование перевозок

Составьте оптимальный план перевозок бетонных блоков с трех заводов на четыре стройки. Считаем, что за один рейс машина перевозит один бетонный блок. Задайте мощности заводов, потребности строек и расстояния между заводами и стройками. Холостые пробеги, состояние дорог и прочие факторы не учитываются, что не влияет на общие принципы постановки задачи и ее решения. Последовательность решения задачи:
Создайте таблицы:

- расстояния между заводами и стройками,
- потребности строек (строка),
- мощности заводов (столбец)
- первоначальный план перевозок - количество рейсов с i-го завода на j-ю стройку:

Ячейка	C	D	E	F	I	J
3	**Р а с с т о я н и я км**					
4		Стройка1	Стройка2	Стройка 3	Стройка 4	**Планы заводов**
5	Завод 1	6	9	2	11	900
6	Завод 2	12	3	6	7	200
7	Завод 3	8	14	15	9	300
8	**Потребности строек**	100	300	600	400	Σ (D8:I8)=Σ(J5:J7)
9	**План перевозок (число рейсов с заводов на стройки)**					**Вывезено с заводов**
10	Завод 1	1	1	1	1	=СУММА(D9:I9)
11	Завод 2	1	1	1	1	=СУММА(D10:I10)
12	Завод 3	1	1	1	1	=СУММА(D11:I11)
13	**Завезено на стройки**	Σ(D10:D12)	Σ(E10:E12)	Σ(F10:F12)	Σ(I10:I12)	**Целевая: Суммарный пробег всех машин**
14		**Число рейсов * расстояния**				
15	Завод 1	=D10*D5				
16	Завод 2	Скопируйте формулу на всю таблицу				
17	Завод 3					=СУММА(D14:I16)

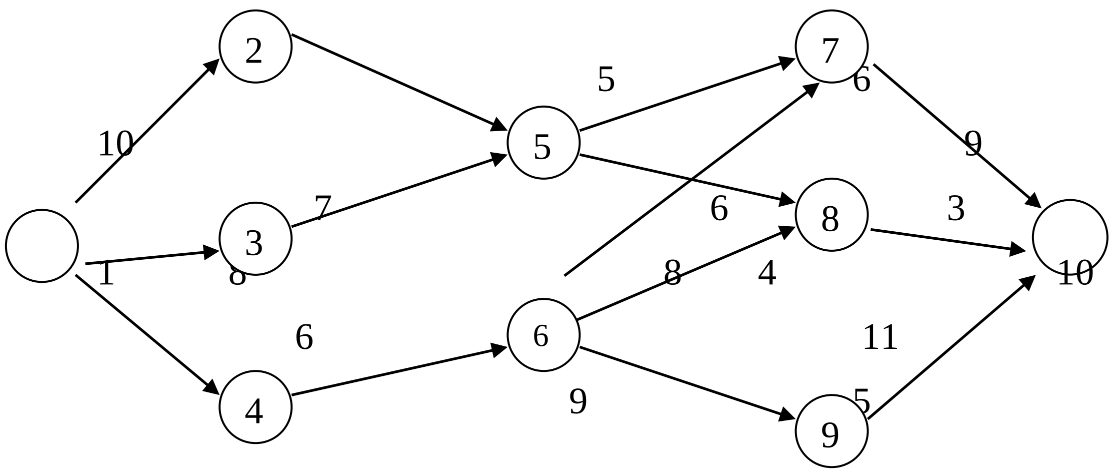
Суммарная потребность всех строек должна совпадать с суммарной мощностью всех заводов.

- Запустите *Сервис - Поиск решения* и заполните окна появившейся экранной формы. Целевая ячейка в данном случае - J17, в которой находится суммарный пробег машин со всех заводов на все стройки, и значение в которой надо сделать минимальным (или заданным, если надо "нагнать" план по километражу). Изменять можно ячейки D10 - I12 (план перевозок) при условии равенства мощностей заводов и потребностей строек, то есть ячеек J10 - J12 и D13 - I13 значениям, заданным в J5 - J7 и D8 - I8. Кроме того, следует задать условие, что количества рейсов - величины положительные и целые. Запустите выполнение программы (*Выполнить*).

ЗАДАНИЕ 5. Выбор оптимального пути в транспортной сети

Транспортная сеть состоит из n узлов (будем называть их также пунктами или городами), некоторые из которых соединены магистралями. Стоимость проезда по каждой из таких магистралей известна и отмечена на схеме. Найти оптимальный маршрут проезда из 1-го пункта в n-ый. В данном примере целевая функция - суммарная стоимость проезда - нелинейная, а область допустимых решений является дискретным множеством - набором единиц и нулей, означающих проезд из одного города в другой или отказ от проезда.

Пусть сеть состоит из 10 узлов, соединённых магистралями согласно схеме:



Стоимость проезда из пункта i в пункт k равна R_{ik} , и элементы этой матрицы приведены на схеме.

Требуется найти оптимальный маршрут из 1-ого пункта в 10-ый.

Внесите стоимости проезда (расстояния) R_{ik} в таблицу Excel и задайте опорный план поездки X_{ik}, который в данном случае представляет из себя матрицу из единиц и нулей, соответствующих перемещению или не перемещению из одного пункта в другой. В отличие от предыдущего примера, здесь не задаются стоимости проезда (расстояния) между пунктами, дорога между которыми проходит через промежуточный пункт, и используется только часть матрицы выше главной диагонали, что позволяет резко сократить количество изменяемых ячеек, т.е. упростить и ускорить решение задачи. Для удобства настройки *Поиска решения* создайте дополнительную таблицу *План поездки Xik в компактном виде*, из которой копируются значения в зависимые от нее ячейки таблицы *План поездки Xik*. В ячейки таблицы *План поездки Xik* внесите формулы, связывающие ее с таблицей *План поездки Xik в компактном виде*. Просуммируйте строки и столбцы таблицы *План поездки Xik* ; ненулевое значение в сумме по строке означает выезд из соответствующего пункта (из п.1 - обязательно); ненулевое значение в сумме по столбцу означает приезд в соответствующий пункт (в п.10 - обязательно). Приезд в какой-либо пункт, кроме п.10, требует обязательного выезда из него, т.е. соответствия сумм по столбцам суммам по строкам. Перемножьте таблицу стоимостей на *План поездки Xik* и вычислите целевую функцию как сумму по таблице произведений Rik * Xik (аналогично Лаб. №4).

Запустите *Поиск решения* и установите Целевую ячейку

Сумма Rik * Xik, Изменяя ячейки - *План поездки Xik в компактном виде*, Ограничения: *План поездки Xik в компактном виде* ≤ 1, ≥ 0, целые; суммы по строкам таблицы *План поездки* (выезд), начиная со второй (с п.2) должны равняться суммам по столбцам (приезд), исключая последнее значение (п.10). Суммы по первой строке (выезд из п.1) и последнему столбцу (приезд в п.10) должны равняться 1. Установите флажок *Показывать результаты итераций* в меню *Параметры* и запустите *Выполнить*.

Стоимость проезда (расстояния) Rik

куда

откуда	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	10	8	6						
2				5					
3				7					
4					9				
5						6	6		
6						8	4	5	
7									9
8									3
9									11

План поездки Xik в компактном виде

	B	C	D	E	F	G	H	I	J
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1
17				1		1	1	1	1

План поездки Xik

куда

суммы по строкам:

откуда	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**выезд**
1	=B16	=C16	=D16							**3**
2				=E16						**1**
3				=E17						**1**
4					=F16					**1**
5						=G16	=H16			**2**
6						=G17	=H17	=I16		**3**
7									=I17	**1**
8									=J16	**1**
9									=J17	**1**

Приезд: суммы по столбцам

1	**1**	**1**	**2**	**1**	**2**	**2**	**1**	**3**

	Rik * Xik					Целевая:	Sum Rik * Xik	=	**97**
1	10	8	6	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	5	0	0	0	0	0
3	0	0	0	7	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	9	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	6	6	0	0
6	0	0	0	0	0	8	4	5	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	9
8	0	0	0	0	0	0	0	0	3
9	0	0	0	0	0	0	0	0	11

В результате выполнения программы получаем:

План поездки Xik

откуда	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**выезд**
1	0	0	**1**							1
2				0						0
3				0						0
4					**1**					1
5						0	0			0
6						0	**1**	0		1
7									0	0
8									**1**	1
9									0	0

Приезд: суммы по столбцам

0	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**

Оптимальный план поездки: пункты 1 => 4 => 6 => 8 => 10.

Приезд в город становится обязательным, если введено дополнительное ограничение - равенство 1 суммы по соответствующему столбцу таблицы *План поездки*. Если необходимо сделать обязательным приезд в один из группы городов - вычислите сумму по ячейкам приезда в эти города и введите ограничение: равенство этой суммы единице.

ЗАДАНИЕ 6. Оптимальное распределение ресурсов между отраслями на N лет

При вложениях X1 и X2 отрасли дают прибыль $0{,}6*X_1$ и $0{,}5*X_2$, кроме того они дают средства для реинвестирования с перераспределением в конце каждого года, равные $0{,}7*X_1$ и $0{,}8*X_2$. Сумма инвестиций за первый год равна 10000 у.е. Требуется составить план вложений средств на 5 лет с целью получения максимальной суммарной прибыли. Заполните таблицу с произвольным опорным планом:

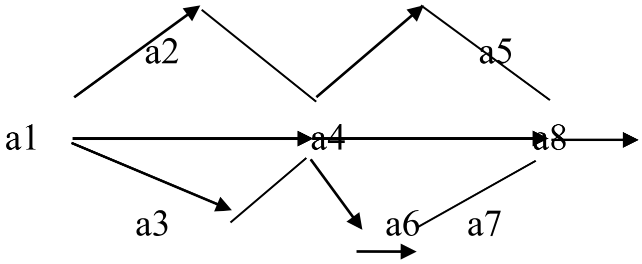
	B	C	D	E	F	G	H	I	J
2	Год	Вложено				Прибыль		Возврат	
3		1	2	Всего	Возврат	1	2	1	2
4	1	2	2	=C4+D4	10000	=0,6*C4	=0,5*D4	=0,7*C4	=0,8*D4
5	2	2	2	4	=I4+J4	1,2	1	1,4	1,6
6	3	2	2	4	3	1,2	1	1,4	1,6
7	4	2	2	4	3	1,2	1	1,4	1,6
8	5	2	2	4	3	1,2	1	1,4	1,6
9									
10		Опорный	план		Целевая: сумм.прибыль Σ(G4:H8)				
11						11			

Запустите *Поиск решения* с суммарной прибылью в качестве целевой ячейки, которую надо максимизировать, изменяя план вложений (здесь C4:D8), при ограничениях: вложения ≥ 0, вложения в обе отрасли за первый год равны 10000, в последующие годы - возврату за предыдущий год (E4:E8=F4:F8). Ниже представлены результаты расчетов.

	B	C	D	E	F	G	H	I	J
2	Год	Вложено				Прибыль		Возврат	
3		1	2	Всего	Возврат	1	2	1	2
4	1	0	10000	10000	10000	0	5000	0	8000
5	2	0	8000	8000	8000	0	4000	0	6400
6	3	0	6400	6400	6400	0	3200	0	5120
7	4	5120	0	5120	5120	3072	0	3584	0
8	5	3584	0	3584	3584	2150,4	0	2508,8	0
9									
10					Целевая: сумм.прибыль				
11						17422,4			

ЗАДАНИЕ 7. Оптимизация сетевого графика плана комплекса работ

Задача ***сетевого планирования*** - построение рационального плана проведения сложного комплекса работ, состоящего из отдельных элементарных взаимно обусловленных работ, т.е. выполнение некоторых работ нельзя начать раньше, чем будут завершены другие, опорные работы. При составлении сетевого графика используется структурная таблица комплекса работ, содержащая перечень элементарных работ комплекса, перечень работ, на которые опираются элементарные работы и время выполнения каждой работы. Метод сетевого планирования позволяет на основе этой информации указать сроки начала каждой работы комплекса, вычислить время, необходимое для выполнения всего комплекса работ, выявить работы, его определяющие - ***критические***, а также провести оптимизацию плана путем перераспределения средств и, соответственно, сроков выполнения работ.



Оптимизация плана комплекса работ может быть проведена после нахождения критических работ и резервов, содержащихся в некритических работах. Далее рассмотрены два варианта сокращения критического пути: с вложением дополнительных средств в критические работы и с перераспределением средств между критическими и некритическими работами без изменения их суммы. Предполагается, что время i- й работы t_i' изменяется по закону t_i нов $= t_i * (1-b_i * x_i)$ в зависимости от дополнительных вложений (или изъятий) $x_i \le c_i$. В первом варианте минимизируется целевая функция - сумма дополнительных вложений в критические работы, при ограничениях: $t_{крит} = 40$, все $0 \le x_i \le c_i$. Во втором варианте минимизируемая целевая функция $t_{крит}$ при ограничениях $-c_i \le x_i \le c_i$ и $\Sigma x_i = 0$. Обратите внимание на то, что в обоих вариантах не организована проверка на превращение некритических путей в критические. При реальном планировании это надо учитывать.

						Вариант 1			Вариант 2		
Работа	Опорные работы	t	Sum t	b	c	x	t нов		x	t нов	-c
a1		20		0,2	2	0	20		2	12	-2
a2		10		0,1	3	0	10		-3	13	-3
a3		8		0,2	1	0	8		-1	9,6	-1
a4	a1,a2	20	40	0,3	2	1,666667	9,999999		2	8	-2
a5	a1,a2,a3	10	30	0,4	1	0	10		-1	14	-1
a6	a1,a2,a3	5	25	0,1	2	0	5		-2	6	-2
a7	a6	5	30	0,3	4	0	5		-2	8	-4
a8	a4,a5,a7	10	50	0,1	5	0	10		5	5	-5
					Целевая Σx_i	1,666667		Σx_i			0
					Критич.путь a1+a4+a8	40		Критич.путь			25

ЗАДАНИЕ 8. Оптимизация вложения средств в N предприятий

В данном примере показано применение функции *Поиск решения* при нелинейной зависимости результатов от инвестиций и дискретном множестве значений аргументов (здесь - инвестиций), т.е. аргументы могут принимать значения из ограниченного набора. Обычно такие задачи решаются с помощью функций и уравнений Беллмана.

Требуется оптимизировать вложение ограниченных ресурсов в N предприятий с целью получения максимальной прибыли. Прибыль, получаемая каждым предприятием, зависит от вложенных ресурсов нелинейно, и эта зависимость задается таблично, т.е. величины вложений представляют собой дискретное множество. В данном примере требуется разделить 5 млн. руб. между 4 предприятиями. Прибыль f_{ik} k -го предприятия в зависимости от вложения x_i задается таблично. План a_{ik} должен представлять собой матрицу единиц и нулей, при этом 1 означает вложение x_i в k-е предприятие. Задайте опорный план a_{ik}, состоящий из одинаковых чисел, например единиц. Сформируйте целевую функцию - сумму $f_{ik}*a_{ik}$. Сформируйте таблицу произведений x_i*a_{ik}, сумма которых равна суммарным затратам. (Не забудьте поставить символ $ перед номером столбца X). Вызовите *Поиск решения* и задайте целевую ячейку Sum($f_{ik}*a_{ik}$) и ограничения: все a_{ik} целые и $0 \le a_{ik} \le 1$, все $\Sigma_k a_{ik} \le 1$, Sum(x_i*a_{ik}) =5.

x	f1	f2	f3	f4					
1	8	6	3	4					
2	10	9	4	6					
3	11	11	7	8					
4	12	13	11	13					
5	18	15	18	16					
	Опорный план a_{ik}				Ограничения	x_i* a_{ik}	- инвестиции		
1	1	1	1	1		1	1	1	1
2	1	1	1	1	≥0	2	2	2	2
3	1	1	1	1	≤1	3	3	3	3
4	1	1	1	1	Цел.	4	4	4	4
5	1	1	1	1		5	5	5	5
$\Sigma_k a_{ik}$	5	5	5	5	≤1				
	f_{ik} * a_{ik}						Sum(x_i*a_{ik})	60	
1	8	6	3	4			Ограничение	=5	
2	10	9	4	6					
3	11	11	7	8			Целевая		
4	12	13	11	13			Sum($f_{ik}*a_{ik}$)	203	
5	18	15	18	16					

В результате выполнения *Поиска решения* должны получиться результаты:

x	f1	f2	f3	f4					
1	8	6	3	4					
2	10	9	4	6					
3	11	11	7	8					
4	12	13	11	13					
5	18	15	18	16					
	план a_{ik}				Ограничения	x_i* a_{ik}	- инвестиции		
1	1	0	1	1		1	0	1	1
2	0	1	0	0	≥0	0	2	0	0
3	0	0	0	0	≤1	0	0	0	0
4	0	0	0	0	Цел.	0	0	0	0
5	0	0	0	0		0	0	0	0
Σ_k a_{ik}	1	1	1	1	≤1				
	f_{ik} * a_{ik}	доходы					Sum(x_i*a_{ik})	5	
1	8	0	3	4			Ограничение	=5	
2	0	9	0	0					
3	0	0	0	0			Целевая		
4	0	0	0	0			Sum(f_{ik}*a_{ik})	24	доход
5	0	0	0	0					

Надо вкладывать по 1 млн.р. в предприятия №1, 2, 4 и 2 млн.р. в №3.

На этом примере можно изучать особенности нелинейного программирования, в частности - зависимость решения от опорного плана. Используя найденное решение в качестве опорного плана, измените f_{43} на большое число, например 500 (вложить 4 млн.р. в предприятие 3 и получить прибыль 500, т.е. сделать это вложение очевидно выгодным). Но после запуска *Поиска решения* вы увидите старое решение, т.е. компьютер не может преодолеть какую-то "горку" в пространстве решений. Только после замены опорного плана на матрицу одинаковых чисел компьютер выдает правильное решение.

ЗАДАНИЕ 9. Задача выбора стратегии обновления оборудования

Важной экономической проблемой является своевременное обновление оборудования: станков, автомобилей, компьютеров и др. Старение оборудования включает физический и моральный износ, в результате чего растут затраты на ремонт и обслуживание, снижается производительность труда и ликвидная стоимость. Задача состоит в определении оптимальных сроков замены старого оборудования. Критерием оптимальности являются либо доход от эксплуатации оборудования (задача максимизации), либо суммарные затраты на эксплуатацию (задача минимизации) в течение планируемого периода. Рассмотрим пример:

Новое оборудование стоит p_0=4000 р., его ликвидная стоимость убывает по закону $p = p_0 * 2^{-t}$, где t - возраст в годах, затраты на годовую эксплуатацию $r(t) = 600*(t+1)$. Через сколько лет надо заменять оборудование, т.е. продавать старое и покупать новое? В данном примере целевая функция нелинейная, а оборудование можно заменять только в конце года, т.е. область допустимых решений является дискретным множеством.

В таблице план замены оборудования представлен в виде единиц и нулей, что означает замену оборудования в конце года или продолжение эксплуатации. Стоимость эксплуатации за первый год равна 600, ликвидная стоимость (Цена) 4000/2 = 2000. В последующие годы, начиная со второго, стоимость эксплуатации вычисляем по формуле =ЕСЛИ(G5<0,1;600;600+B5), Цена =ЕСЛИ(G5<0,1;C5/2;2000). Стоимость продажи (Продажа) равна Цене или нулю в зависимости от Плана. Покупка = 4000*План, Покупка последнего года равна нулю. Целевую ячейку формируют затраты на эксплуатацию и покупку, а также доходы от продаж: $\Sigma\, r(t) + \Sigma\, p_0(t) - \Sigma\, p(t)$. Ограничения на План: $0 \le$ План ≤ 1, целые.

	A	B	C	D	E	F	G
	Год	Эксплуат.	Цена		Продажа	Покупка	План
5	1	600	2000		2000	4000	1
6	2	600	2000		0	0	0
7	3	1200	1000		1000	4000	1
8	4	600	2000		0	0	0
9	5	1200	1000		1000	4000	1
10	6	600	2000		0	0	0
11	7	1200	1000		1000	4000	1
12	8	600	2000		0	0	0
13	9	1200	1000		1000	4000	1
14	10	600	2000		2000	0	1
15						$\Sigma p_0(t)$=	
16	Σ r(t)=	8400		Σ p(t)=	8000	20000	
17							
18			Сумм.	затраты	24400		

После выполнения *Поиска решения* получаем

	A	B	C	D	E	F	G
	Год	Эксплуат.	Цена		Продажа	Покупка	План
5	1	600	2000		0	0	0
6	2	1200	1000		0	0	0
7	3	1800	500		500	4000	1
8	4	600	2000		0	0	0
9	5	1200	1000		1000	4000	1
10	6	600	2000		0	0	0
11	7	1200	1000		1000	4000	1
12	8	600	2000		0	0	0
13	9	1200	1000		0	0	0
14	10	1800	500		500	0	1
15						$\Sigma p_0(t)=$	
16	Σ r(t)=	10800		Σ p(t)=	3000	12000	
17							
18			Сумм.	затраты	19800		

Задача является нелинейной, и ее успешное решение зависит от опорного плана. Попробуйте ее решить, используя различные опорные планы.

5. ЛИТЕРАТУРА

1. Введение в экономическую кибернетику - М.: Прогресс, 1968. - 208 с.
2. Кобринский Н.Е. Введение в экономическую кибернетику - М: Экономика, 1975.-284 с.
3. Кобринскнй H.F. и :др. Экономическая кибернетика - М : Экономика, 1982. - 407 с.
4. Мэнеску М. Экономическая кибернетика - М.: Экономика, 1986. - 318 с.
5. Математика и кибернетика в экономике. Словарь - справочник .- М. Экономика, 1975. - 700 с.
6. Терехов Л.Л. Кибернетика для экономистов - М.: Финансы и статистика 1983 .- 191 с.
7. Экономическая кибернетика: Сборник задач / Е.Б. Бухарова, Н.Г Шишацкий, В.П. Зуев - Красноярск: Издательство Красноярского гос университета, 1988 - 84 с.
8. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем. М.: Финансы и статистика, 2005.
9. Семенов Г.В. Лекции по экономической кибернетике .- Изд-во Казанского унив-та, 1990.- 105 с.
10. Алдохин И.П, Экономическая кибернетика в управлении производством .- Харьков, ВШ, 1981.-150с.
11. Алдохин И.П., Кулиш С.А. Экономическая кибернетика .- Харьков: ХГУ. 1983 .-222 с.
12. Аллен Р. Математическая экономия/Пер. с англ. Под ред. Вайнштейна А. - М.: Издательство иностранной литературы, 1963. - 598 с.
13. Ланкастер К. Математическая экономика - М.: Советское радио, 1972. – 286 с.
14. Математическая экономика на персональном компьютере /М.Кубонива и др. - М.: Финансы и статистика, 1991. - 304 с.
15. Утеуш Э.В., Утеуш З.В. Введение в кибернетическое моделирование.- М.:

Энергия, 1971.- 184 с.

16. Шрейдер Ю.А., Шаров А.А. Системы и модели М. Радио и связь 1982 .- 152 с.
17. Хакен Г. Информация и самоорганизация. Макроскопический подход к сложным системам. - М.: Мир, 1991. - 180 с.
18. Петраков И.Я. Кибернетические проблемы управления экономикой м., Наука, 1974.-161 с
19. Управление экономикой: Основные понятия и категории: (Словарь - справочник).- Белоусов Р.А. и др.- М.: Экономика, 1986. - 302 с.
20. Сытник В.Ф. и др. Математические модели в планировании и управлении предприятиями .- К. ВШ, 1985. - 214 с.
21. Экономико-математическое моделирование. Под редакцией Дрогобыцкого И.Н. М.: Экзамен, 2004, 2006.
22. Экономико-математические модели в организации и планировании промышленных предприятий .- Л. ЛГУ 1982. - 335 с.
23. Таха, Хэмди А. Введение в исследование операций, 6-е изд.: Пер. с англ. - М.: Издательский дом «Вильяме», 2001. - 912 с.