Волков С.В.
Донецкий национальный технический университет
Красноармейский индустриальный институт

МОДИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ ФУРЬЕ

Пусть функция $f(x)$ из множества суммируемых на периоде функций, и ряд

$$S(f,x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx\right) \tag{1}$$

где $a_k(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos kt dt$, $b_k(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin kt dt$,

является рядом Фурье этой функции.

При помощи бесконечных числовых матриц $\Lambda_1=\left\{\lambda_{k,1}^{(n)}\right\},\Lambda_2=\left\{\lambda_{k,2}^{(n)}\right\}$ таких, что $\forall n\in\mathrm{N}$ $\lambda_{0,i}^{n}=1$, $k\geq n$, $\lambda_{k,i}^{n}=0$, $i=1,2$ каждой функции $f(x)$ на основании ряда (1) поставим в соответствие последовательность тригонометрических полиномов $U_n(f;x;\Lambda_{1,2})$ вида

$$U_n(f;x,\Lambda_{1,2})=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\lambda_{k,1}^{(n)}a_k(f)\cos kx+\lambda_{k,2}^{(n)}b_k(f)\sin kx\right). \tag{2}$$

Процесс преобразования ряда (1) в ряд (2) называют суммированием ряда Фурье. Нетрудно проверить, что метод преобразования (1) в (2) является линейным. В силу этого методы построения полиномов (2) называются линейными методами суммирования рядов Фурье. Метод можно считать заданным, если заданы его матрицы $\Lambda_1=\left\{\lambda_{k,1}^{(n)}\right\},\Lambda_2=\left\{\lambda_{k,2}^{(n)}\right\}$.

Известны многие линейные методы, которые могут, в частности, быть получены из (2). Поведение полиномов (2) при $\Lambda_1=\Lambda_2=\left\{\lambda_k^{(n)}\right\}$ изучено.

Так, в случае:

$\lambda_k^{(n)}=1$, (2) есть частичные суммы Фурье

$S_n(f,x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx\right)$;

$\lambda_k^{(n)}=1-\frac{k}{n},k=1,\dots,n-1$, (2) есть суммы Фейера $\sigma_n(f,x)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}S_k(f,x)$;

$\lambda_k^{(n)}=\begin{cases}1, & k=0,1,\dots,n-p\\ 1-\dfrac{k-n+p}{p}, & k=n-p+1,\dots,n-1\end{cases}$, (2) является суммами Валле-Пуссена

$V_{n,p}(f,x)=\frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1}S_{k,1}(f,x)$;

$\lambda_k^{(n)}=\cos\frac{k\pi}{2n},k=0,1,\dots,n-1$, (2) задают суммы Рогозинского;

$\lambda_k^{(n)}=1-(\frac{k}{n})^s, s>0,k=0,1,\dots,n-1$, (2) будут суммами Зигмунда.

Все перечисленные выше методы суммирования (1) входят в группу классических методов.

Развитие идеи общих методов построения суммирующих полиномов привело к так называемым „у-эн-фи-эф" методам, которые соответствуют (2) при $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \left\{ \lambda_n^{\varphi, F}\left(\frac{k}{n}\right) \right\}$, где $\lambda_n^{\varphi, F}(x)$ – последовательность непрерывных функций задаваемых соотношением:

$$\lambda_n^{\varphi, F}(x) = 1 - \frac{\varphi_n(nx)}{\varphi_n(n)} F_n(x). \tag{3}$$

При соответствующих подборах последовательностей $\varphi_n(x)$, и $F_n(x)$ „у-эн-фи-эф" методы будут задавать вышеперечисленные классические методы суммирования.

Автором изучен вопрос равномерной сходимости полиномов $U_n(f;x;\Lambda_{1,2})$ при $\Lambda_1 \neq \Lambda_2$.

Для равномерной сходимости полиномов (2) на пространстве C, пространстве непрерывных на всей оси 2π – периодических функций $f(t)$ с нормой $\|f\|_C = \max_t |f(t)|$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_{k,i}^{(n)} = 1, \quad i = 1, 2, \tag{4}$$

и

$$L_n(\Lambda_{1,2}) = O(1), \quad n \to \infty, \tag{5}$$

где $L_n(\Lambda_{1,2}) = \sup_{\|f\| \le 1} \|U_n(f;x;\Lambda_{1,2})\|_C$ – константы Лебега данного метода.

В теории приближения наибольший интерес представляет поведение отклонения $\|f(x) - U_n(f;x;\Lambda_{1,2})\|_C$. Задача нахождения скорости стремления к нулю этой разности невероятно сложная и зависит от метода построения приближающих полиномов и структурных свойств приближаемой функции. Однако, никакой метод не может обеспечить скорости стремления к нулю более высокой, чем некоторая величина, определяемая свойствами самой функции. Для метода (2) определить эту величину можно из полученного автором соотношения

$$\frac{\sqrt{\left[\left(1 - \lambda_{k,1}^{(n)}\right) a_k(f)\right]^2 + \left[\left(1 - \lambda_{k,2}^{(n)}\right) b_k(f)\right]^2}}{2} \le \|f(x) - U_n(f;x;\Lambda_{1,2})\|_C. \tag{6}$$

В рамках единого обобщенного подхода к методам суммирования рядов Фурье рассмотрено новый метод (2). Определены необходимые и достаточные условия (4) и (5) равномерной сходимости на пространстве C последовательности полиномов (2). Получено неравенство (6) для оценки снизу отклонения тригонометрических полиномов, построенных на основе нового метода, от функции, что их задает.

Автор занимается исследованием величины $\sup\limits_{f \in C_\infty^{\bar\psi}} \left\| f(x) - U_n\left(f; x; \Lambda_{1,2}\right) \right\|$, где $C_\infty^{\bar\psi}$ –класс функций из C, имеющих ограниченную $\bar\psi$ производную, и в качестве определяющих метод матриц $\Lambda_1 \neq \Lambda_2$ рассматриваются матрицы, элементы которых, представимы в виде (3).

Литература:

1. Степанец А.И. Классификация и приближение периодических функций. – Киев, Наука, 1987. – 268 с.

2. Рукасов В.И. Новиков О.А. Приближение непрерывных периодических функций тригонометрическими полиномами/ Учебное пособие для студ. физ. мат. специальностей пед. институтов и университетов. – Славянск, 1995. – 80 с.