Волков С.В. Мальцева В.Д.

Красноармейский индустриальный институт

К ОБОБЩЕНИЮ ПОНЯТИЯ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ В ОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

Невозможно переоценить роль определенного интеграла в научно–исследовательской деятельности инженера теоретика, экономиста и др. Решение огромного количества прикладных задач стало возможным благодаря именно теории дифференциального и интегрального исчислений. Однако, сложившиеся стереотипы по отношению к понятиям интеграла, дифференциала и другим математическим понятиям в некотором роде ограничивают нас.

Так, например, находя площадь криволинейного сектора, что ограничен линией $\rho=\rho(\varphi)$ и лучами φ_1,φ_2, мы разбиваем его на элементарные части и говорим о круговом секторе, дифференциал площади которого $dS=\frac{1}{2}\rho^2(\varphi)d\varphi$. Тогда площадь всей фигуры $S=\frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2(\varphi)d\varphi$, что соответствует устоявшемуся представлению о дифференциале и интеграле. Однако, можно говорить не о круговом секторе, а о треугольнике, дифференциал площади которого $dS=\frac{1}{2}\rho^2(\varphi)\sin(d\varphi)$. Тогда площадь всей фигуры $S=\frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2(\varphi)\sin(d\varphi)$. Подынтегральное выражение второго интеграла не соответствует сложившимся стереотипам и кажется казусом. У студентов возникает недоумение: как верные рассуждения привели к интегралу, структура которого не позволяет применить к нему известные им правила интегрирования?

Логично рассмотреть возможность нахождения таких интегралов, общий вид которых представим

$$\int\limits_a^b f(x)V(dx), \tag{1}$$

и установить, представляется ли возможность их вычисления, какова их связь с обычными интегралами Римана $\int\limits_a^b f(x)dx$. Понятно, что все эти ответы в какой-то мере будут зависеть от функции $V(x)$, ее поведения и структурных свойств.

Для начала введем понятие V–интегралов, интегралов вида (1).

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана некоторая непрерывная функция $f(x)$ и в окрестности нуля задана некоторая непрерывная функция $V(x)$.

Возьмем произвольное T-разбиение данного отрезка $T: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_n = b$. Длину частичного интервала обозначим Δx_k, $k = \overline{0, n-1}$, возьмем внутри каждого частичного интервала точку c_k, $k = \overline{0, n-1}$ и составим сумму

$$I_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k) V(\Delta x_k). \tag{2}$$

Определенным V– интегралом функции $f(x)$ в пределах от a до b будем называть предел, к которому стремится сумма (2) при стремлении к нулю длины наибольшего частичного интервала, т.е.

$$\int_a^b f(x) V(dx) = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k) V(\Delta x_k), \tag{3}$$

где $\lambda = \max_k (\Delta x_k)$, $k = \overline{0, n-1}$.

В результате изучения поведения пределов (3) получены условия существования интеграла (1), и установлена его связь с соответствующим интегралом Римана: для существования предела (3) необходимо и достаточно непрерывности функции $f(x)$ на $[a,b]$, и чтобы функция $V(x)$ была дифференцируемой в окрестности нуля и при $x = 0$ равнялась нулю. При этом имеет место равенство

$$\int_a^b f(x) V(dx) = V'(0) \int_a^b f(x) dx, \tag{4}$$

которое устанавливает прямую связь между V–интегралами и интегралами Римана.

Равенство (4) позволяет расширить область применения теории интегрального и дифференциального исчислений. Появляется возможность вычисления новых видов интегралов.

Например:

1. $\frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi) \sin(d\varphi) = \frac{1}{2} (\sin x)'\Big|_{x=0} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi) d\varphi$,

2. $\int_a^b (dx)^2 = (x^2)'\Big|_{x=0} \int_a^b dx = 0$, 3. $\int_a^b \ln(1+2dx) = (\ln(1+2x))'\Big|_{x=0} \int_a^b dx = 2(b-a)$,

4. $\int_a^b \sqrt{1+2dx} = (\sqrt{1+2x})'\Big|_{x=0} \int_a^b dx = b-a$, 5. $\int_a^b \sqrt{dx} = (\sqrt{x})'\Big|_{x=0} \int_a^b dx = \infty$.