Голуб М., ГС-09а,
фак-т "Технології і організації виробництва" КІ ДонНТУ
керівник: Волков С. В., ст. викладач
кафедри "Природничих наук" КІ ДонНТУ

МОДИФІКАЦІЯ ПІДІНТЕГРАЛЬНОГО ВИРАЗУ

Вступ. Неможливо переоцінити роль визначеного інтегралу в науково-дослідницькій роботі інженера-теоретика. Розв'язання великої кількості прикладних задач стало можливим завдяки саме теорії диференціального та інтегрального числення. Але, складені стереотипи по відношенню до понять інтегралу та диференціалу в деякому сенсі обмежують нас.

Постановка задачі. Нехай потрібно знайти площу криволінійного сектора (рис. 1), тобто плоскої фігури, що обмежена неперервною лінією $\rho=\rho(\varphi)$ і двома променями $\varphi=\varphi_1,\varphi_2$, де $\rho,\varphi-$ полярні координати.

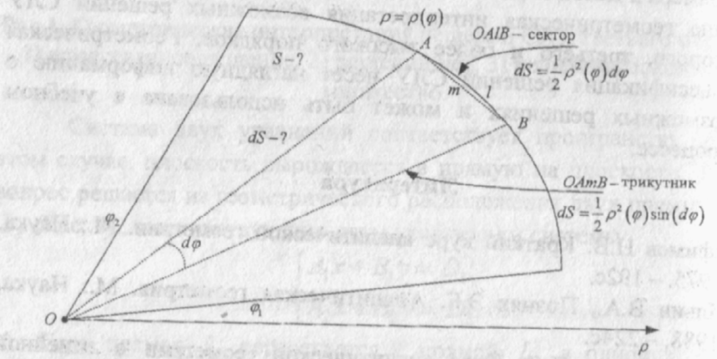

Рис. 1. Криволінійний сектор

Для розв'язання сформульованої задачі можна використати I – метод інтегральних сум, II – метод диференціалу. Як відомо, при реалізації і першого і другого методу у якості частин криволінійного сектора розглядають кругові сектора.

Диференціал dS є головною частиною приросту ΔS при $d\varphi\to0$ і рівний площі кругового сектора $OAlB$ радіуса ρ і центральним кутом $d\varphi$. Тому $dS=0{,}5\cdot\rho^2(\varphi)d\varphi$. Інтегруючи останню рівність отримаємо площу всієї фігури $S=\frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2(\varphi)\,d\varphi$, що відповідає представленню (стереотипу) про диференціал і інтеграл.

Якщо, допустити, що частинами криволінійного сектора є рівнобедрені трикутники, то $dS=0{,}5\cdot\rho^2(\varphi)\sin(d\varphi)$, а площа всієї фігури $S=\frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2(\varphi)\sin(d\varphi)$. Підінтегральний вираз не відповідає представленню (стереотипу) про диференціал, а сам інтеграл здається казусом. У студентів виникає непорозуміння: як вірні міркування призвели до інтегралу, структура якого не дозволяє застосувати до нього відомі правила інтегрування?

Логічно ввести до розгляду інтеграли, загальний вид яких:

$$\int\limits_a^b f(x)V(dx) \tag{1}$$

Відволікаючись від будь-яких сенсів означення визначеного $V-$ інтегралу можна повторити дослівно, як означення звичайного визначеного інтегралу з різницею у способі побудови інтегральних ($V-$ інтегральних) сум.

Означення. Визначеним $V-$ інтегралом називається границя, до якої прямує $n-$а $V-$ інтегральна сума при прямуванні до нуля довжини найбільшого частинного інтервалу.

Пропускаючи дії по побудові [illegible] введення позначень (вони класичні) маємо:

$$\lim_{\lambda\to0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)V(\Delta x_k)=\int\limits_a^b f(x)V(dx)$$

де $\lambda=\max\limits_k(\Delta x_k),\ k=\overline{0,n-1}$.

Результати. Очевидно, можливість знаходження [illegible] $V-$інтегралів, та їх зв'язок з інтегралами Рімана, в значній мірі залежить від функції $V(x)$, її поведінки і структурних властивостей. Все це відображено в наступній теоремі.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a,b]$ і функція $V(x)$ має обмежені ,одним і тим же числом, абсолютні величини всіх похідних, в околі нуля, та $V(0)=0$, то значення $V-$ інтегралу можна знайти за формулою:

$$\int\limits_a^b f(x)V(dx)=V'(0)\int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{3}$$

Сформульована теорема встановлює прямий зв'язок між $V-$ інтегралами та інтегралами Рімана.

Основні властивості $V-$ інтегралів аналогічні властивостям визначеного інтегралу. Припустивши, що функції f,g,V,W, виходячи зі свого сенсу, задовольняють умові сформульованої теореми, маємо:

$$1)\ \int_a^b k\cdot f(x)V(dx)=k\cdot\int_a^b f(x)V(dx);\quad 2)\ \int_a^b f(x)V(k\cdot dx)=k\cdot\int_a^b f(x)V(dx);$$

$$3)\ \int_a^b [f(x)+g(x)]V(dx)=\int_a^b f(x)V(dx)+\int_a^b g(x)V(dx);$$

$$4)\ \int_a^b f(x)[V(dx)+W(dx)]=\int_a^b f(x)V(dx)+\int_a^b f(x)W(dx);$$

і т.д.

Доведення вказаних властивостей, автори пропонують провести читачам самостійно, використовуючи техніку доведення властивостей визначеного інтегралу і рівність (3).

Висновки. Рівність (3) дозволяє розширити область застосування теорії інтегрального і диференціального числення, завдяки можливості обчислення інтегралів нових видів. Наприклад:

$$1.\ \int_a^b (dx)^2=0,\quad 2.\ \int_a^b \ln(1+2dx)=2(b-a),$$

$$3.\ \int_a^b \sqrt{dx}=\infty,\quad 4.\ \int_a^b \sqrt{1+2dx}=b-a.$$

Формула (3) знімає всі непорозуміння з розв'язання задачі про знаходження площі криволінійного сектора, оскільки

$$\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2(\varphi)\sin d\varphi=\frac{1}{2}(\sin x)'\Big|_{x=0}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2(\varphi)\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2(\varphi)\,d\varphi.$$

В даний момент автори ведуть роботу над доведенням властивостей $V-$ інтегралів, які не мають аналогів серед інтегралів Рімана; розглядають нові види диференціальних рівнянь і шукають способи їх інтегрування; шукають нові можливості по застосуванню $V-$ інтегралів.

Література

1. Бермант А.Ф. Краткий курс математического анализа для втузов. – М.: Печатный двор, 1964 г., 664 с.
2. Гаврильченко Ч.І., Полушкін С.П. та ін.. Вища математика: Зб. задач. Навч. посібник для студентів вищих технічних закладів. У 2 ч. Ч.1: Лінійна і векторна алгебра: Аналітична геометрія: Вступ до математичного аналізу: Диференціальне та інтегральне числення. 2-ге вид., стереотип. – К.: Техніка, 2004. – 279 с.
3. Письменный Д.Т., Конспект лекций по высшей математике 1 часть. – М.: Рольф, 2000. – 228,256 с.
4. Андре Анго Математика для электро- и радиоинженеров. М.:"Наука" Главная редакция физико-математической литературы, 1967. – 780 с.