

НЕКОТОРЫЕ ФУНКЦИИ МАТЕМАТИКИ
В СОПРОТИВЛЕНИИ МАТЕРИАЛОВ

Ф.Л. Шевченко,

Донецкий национальный технический университет

Приводяться використання в курсі опору матеріалів деяких відомих з математики функції та їх обмеження в питаннях міцності, жорсткості, стійкості та динаміки елементів конструкцій та споруд.

Заметим, что в начале XXI века наряду с бурным развитием компьютерных технологий уходят на второй план точные математические дисциплины, механика и другие фундаментальные учебные дисциплины, формирующие инженерное мышление, что тормозит технический прогресс во многих прикладных направлениях.

Сейчас бытует мнение, что в технических университетах математика в прежних объемах не нужна, так как в специальных учебных инженерных курсах она почти не используется, а сопротивление материалов потеряло свою прежнюю актуальность, так как в компьютере можно найти любые расчетные комплексы.

Такая гиперболизация вычислительной техники часто объясняется поверхностными знаниями математики, инженерной графики, теоретической механики, сопротивления материалов и некоторых других учебных дисциплин, которые в прежние годы были весьма привлекательными. Именно поверхностные знания инженерных дисциплин порождают такие порочные суждения.

Дело в том, что рядовой пользователь компьютерной техники часто не знает той математической и прикладной базы, на которой построены компьютерные комплексы, которыми ему приходится пользоваться. Даже в том случае, когда расчетчик использует лицензированную технику и может просмотреть базисные предпосылки, которые заложены в используемый компьютерный комплекс, он по причине слабой математической и инженерной подготовки не может в этом готовом комплексе разобраться, потому, что он даже не слышал о том математическом аппарате или преобразованиях, которые увидел в программном комплексе, он не знает основ метода конечных элементов, природы построения матриц равновесия, матриц жесткости, матриц совместности деформаций и других матриц, связывающих между собою конечные элементы, не понимает в инженерных расчетах законов распределения напряжений, не знает границ применимо-

сти заложенных в программе математических зависимостей и расчетных формул.

В курсе сопротивления материалов можно показать множество таких примеров, когда даже в объемном учебнике по сопротивлению материалов границам применимости расчетных формул или зависимостей не уделяется должного внимания.

Например, в кратком курсе сопротивления материалов или в прикладной механике, где на сопротивление материалов отводится всего восемь часов, в разделе растяжения-сжатия не приводится никакого различия между этими видами деформаций. У студента возникает такое суждение, что в канате при растяжении или сжатии возникает одинаковое напряжение в виде внутреннего усилия, приходящегося на единицу площади. Но ведь канат не может работать на сжатие и расчет его на компьютере окажется совершенно неправильным.

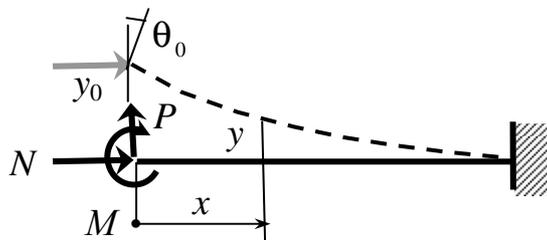


Рис. 1. Расчетная схема продольно-поперечного изгиба

В более полном курсе сопротивления материалов есть раздел продольно-поперечного изгиба, где студент видит, что продольные сжимающие усилия увеличивают напряжения и перемещения от поперечной нагрузки, а растягивающие – уменьшают, рис. 1. Но ведь в со-

ответствующих уравнениях изогнутой оси стержня при сжатии

$$y(x) = y_0 + \frac{\theta_0}{k} \sin kx + \frac{M_0}{N} (1 - \cos kx) + \frac{P_0}{kN} (kx - \sin kx). \quad (1)$$

или при растяжении ($k = \sqrt{\frac{N}{EJ}}$)

$$y(x) = y_0 + \frac{\theta_0}{k} \operatorname{sh} kx - \frac{M_0}{N} (1 - \operatorname{ch} kx) - \frac{P_0}{kN} (kx - \operatorname{sh} kx). \quad (2)$$

не указаны границы применимости этих уравнений.

И лишь изучив раздел устойчивости студент понимает, что короткие стержни, у которых гибкость $\lambda = \mu l / i$ меньше 40 не теряют устойчивости, а разрушаются от потери прочности.

Даже при простом изгибе указывается, что расчетная формула напряжений

$$\sigma = -\frac{M(x)}{J_z} y \quad (3)$$

применима лишь в стержнях с отношением длины к высоте балки больше четырех, но справа граница этой формулы не оговорена. Лишь в учебном пособии [1] показано, что при

$$\frac{l}{h} = 2,88 \sqrt{\frac{\sigma_i}{Eh}}$$

(E – модуль упругости, i – радиус инерции площади поперечного сечения) балка превращается в гибкую нить, когда изгибными напряжениями пренебрегают и считают, что в гибкой нити возникают только растягивающие напряжения.

При вычислении перемещений при изгибе пользуются приближенным дифференциальным уравнением изогнутой оси балки, пренебрегая углом поворота сечения y' в формуле кривизны (4),

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ_z} \cdot \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}. \quad (4)$$

мотивируя тем, что углами поворота при изгибе можно пренебрегать в виду их малости в инженерных конструкциях, где эти углы меньше одного - полутора градусов.

На самом деле, решением точного дифференциального уравнения (4) с использованием эллиптических интегралов Лежандра первого и второго рода

$$F(k, \varphi) = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad E(k, \varphi) = \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \cdot d\varphi.$$

(k, φ - аргументы интегралов) можно показать, что приближенным дифференциальным уравнением можно пользоваться в том случае, когда максимальный прогиб не превышает четверти пролета, $y_{\max} \leq l/4$ [1],

К примеру, в глубоководных добычных комплексах для подъема конкреций с глубин 6 км прогиб нижнего конца транспортного



Рис.2. Глубоководный добычной комплекс для подъема

трубопровода (рис. 2) от давления набегающего потока окружающей водной среды уходит от отвеса с палубы плавсредства на 300-500 м. Но при этом в расчетах возникают другие проблемы, о том, что уравнением (1) нельзя пользоваться, так как продольное усилие переменное.

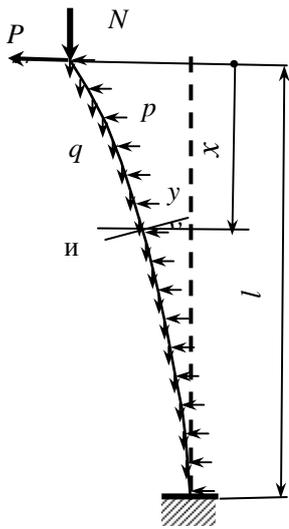


Рис.3. Расчетная схема сжато-изогнутого стержня

Таких решений в учебной и справочной литературе нет. Есть расчеты по учету собственного веса буровых труб, но без учета нормально направленной нагрузки [2], что сводится к однородному уравнению Бесселя. Такой расчет длинных стержней на продольно-поперечный изгиб имеется в учебных пособиях [1, 3]. Вывод дифференциального уравнения изогнутой оси стержня легко получить из уравнения поперечных сил

$$Q = EJ \frac{d^3 y}{dx^3} :$$

$$EJ \frac{d^3 y}{dx^3} + q \left(x + \frac{N}{q} \right) \frac{dy}{dx} = P + px. \quad (6),$$

что путем преобразования переменной x в безразмерную z (рис. 3)

$$z = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{q}{EJ}} \left(x + \frac{N}{q} \right)^{3/2}, \quad x = \sqrt{\frac{9 EJ}{4 q}} z^2 \quad (7)$$

приводит к неоднородному уравнению Бесселя

$$\frac{d^3 y}{dz^3} + \frac{1}{z} \cdot \frac{d^2 y}{dz^2} + \left(1 - \frac{1}{9z^2} \right) \frac{dy}{dz} = \frac{2}{3qz} R + \frac{p}{q} \sqrt{\frac{2EJ}{3qz}}. \quad (8)$$

Решение уравнения (8) в функциях Бесселя первого рода дробного порядка $k = \pm \frac{1}{3}$ известно в виде

$$y'(z) = C_1 J_{1/3}(z) + C_2 J_{-1/3}(z) = aC(z) + b\Phi(z), \quad (9)$$

где правая часть отражает влияние поперечной нагрузки: $a = \frac{6R}{q}$,

$$b = 9 \frac{p}{q} \sqrt{\frac{2 EJ}{3 q}}.$$

Используя формулы дифференцирования функций Бесселя

$$J_{1/3}(z) = \frac{\left(\frac{z}{2} \right)^{1/3}}{\Gamma\left(\frac{1}{3} \right)} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{n! \Gamma(3n+1)} \left(\frac{z}{2} \right)^{2n} \right], \quad (10)$$

и аналогичных рядов, полученных от правой части уравнения (8)

$$C(z) = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3z)^{2n}}{\Gamma[9(2n+1)^2 - 1]}, \quad (11)$$

находим уравнение изогнутой оси стержня

$$y(z) = C_1 A(z) + C_2 B(z) + aD(z) + bF(z) + C_3. \quad (12)$$

и уравнение изгибающих моментов $M(x) = EJy''(x)$

$$M(z) = EJ^3 \sqrt{\left(\frac{3qz}{2EJ}\right)^2} \left\{ C_1 J_{-2/3}(z) - C_2 J_{2/3}(z) + \frac{1}{3z} [aC(z) + b\Phi(z)] + aE(z) + bF(z) \right\}. \quad (13)$$

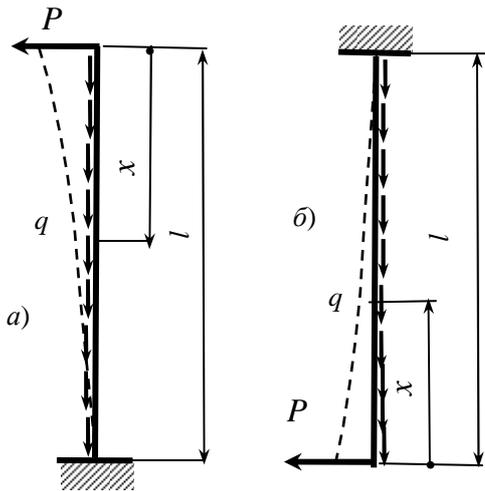


Рис. 4. Расчетная схема консоли с осредоточенной силой: при сжатии а) и растяжении б)

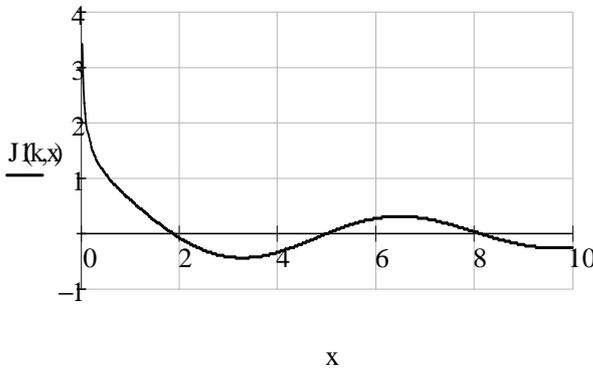


Рис. 5. График функции Бесселя $J_{-1/3}(z)$

видно, что ее аргумент (7) должен быть равен $z_0 = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{ql^3}{EJ}} = 1,866$.

Отсюда находим критическую длину

$$l_{кр} = \sqrt[3]{\frac{9 EJ}{4 q} z_0^2} = \sqrt[3]{\frac{9 \cdot 6,28 \cdot 10^6}{4 \cdot 490} \cdot 1,866^2} = 46,48 \text{ м.}$$

Расчет на устойчивость весьма актуальный при проектировании высотных сооружений, рис. 6.

Такое решение дает возможность определить увеличение или уменьшение прогибов стержня от сжимающего или растягивающего воздействия веса q , рис. 2, табл. 1

$$\frac{y_{\max}}{y_0} = \frac{8}{z_0^2} \left[\frac{C(z_0)B(z_0)}{J_{-1/3}(z_0)} - D(z_0) \right]. \quad (14)$$

Из расчета видим стремительное увеличение прогиба консольного стержня сжатого собственным весом при его длине стремящейся к некоторой величине равной 46,48 м.

Эту критическую длину стержня легко вычислить, приравняв знаменатель (14) нулю, что соответствует однородному уравнению Бесселя (при отсутствии поперечно направленной нагрузки). Это значит, что функция Бесселя $J_{-1/3}(z_0) = 0$, см., рис. 1.5.

Из графика функции Бесселя



Рис. 6. телевизионные вышки, радиотрансляционные вышки

Приведем примеры использования некоторых специальных функций при изгибе балок.

Основой вычисления перемещений в балках является приближенное дифференциальное уравнения изогнутой оси второго порядка

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ_z},$$

решение которого представим в начальных параметрах с использованием функций Хевисайда

$$e(x-a) = \begin{cases} 1 & \text{при } (x-a) \geq 0 \\ 0 & \text{при } (x-a) \leq 0 \end{cases}$$

$$y(x) = y_0 + \theta_0 x + \frac{M_0 x^2}{2EJ} + \frac{P_0 x^3}{6EJ} + \sum \frac{M(x-\mu)^2}{2EJ} e(x-\mu_i) + \sum \frac{P(x-\rho_i)^3}{6EJ} + \sum \frac{m}{2EJ} [(x-\xi_{ни})^2 e(x-\xi_{ни}) - (x-\xi_{ки})^2 e(x-\xi_{ки})] + \sum \frac{q}{6EJ} [(x-u_{ни})^3 e(x-u_{ни}) - (x-u_{ки})^3 e(x-u_{ки})] \quad (15)$$

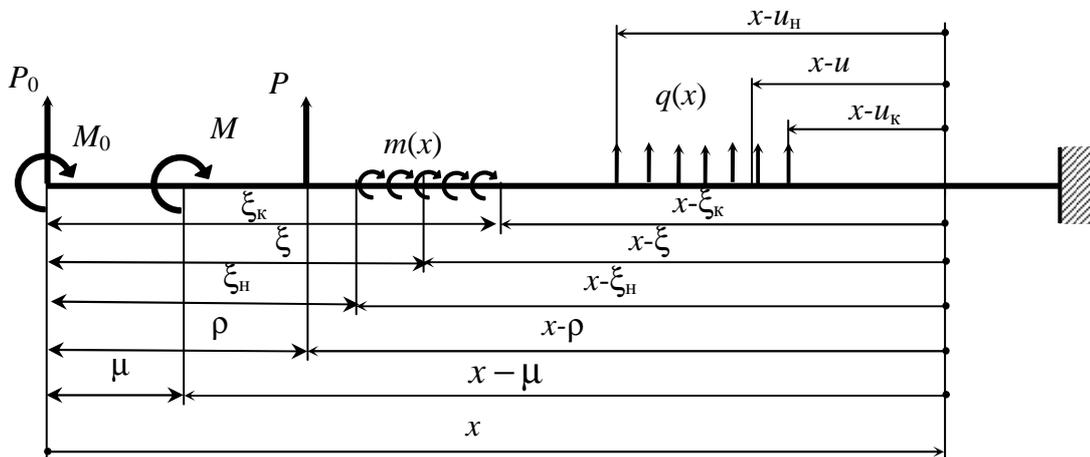


Рис. 7. К методу начальных параметров

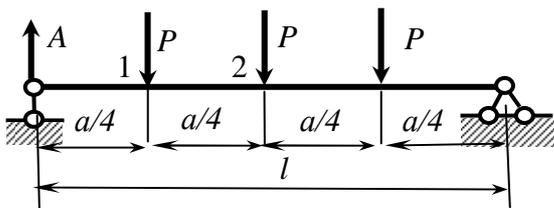


Рис. 9. Балка с сосредоточенными силами

Если на балку приложено несколько сосредоточенных сил (рис. 9), то нагрузку от сосредоточенных сил представим условно распределенной с функциями Дирака

$$P(x) = -P\delta(x - a/4) - P\delta(x - a/2) - P\delta(x - 3a/4) = -P \sum_{i=1}^3 \delta(x - x_i).$$

Расчетное уравнение изогнутой оси балки принимает вид

$$y(x) = -\frac{5Pl^2}{32EJ}x + \frac{Px^3}{4EJ} - \frac{P}{EJ} \sum_{i=1}^3 \frac{(x-x_i)^3}{6} e(x-x_i). \quad (18)$$

Наконец, рассмотрим колебания систем с распределенными параметрами, т.е. таких конструкций, когда масса стержня равномерно распределена вдоль оси стержня. Это могут быть вантовые стрелы перегружателей и роторных экскаваторов, пролетные строения мостов, крылья самолетов, валы прокатных станков и множество других длиномерных конструкций, рис. 10.

Поперечные колебания таких конструкций как систем с распределенными параметрами можно описать дифференциальным уравнением четвертого порядка в частных производных [3]

$$\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \frac{m}{EJ_z} \cdot \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad (19)$$

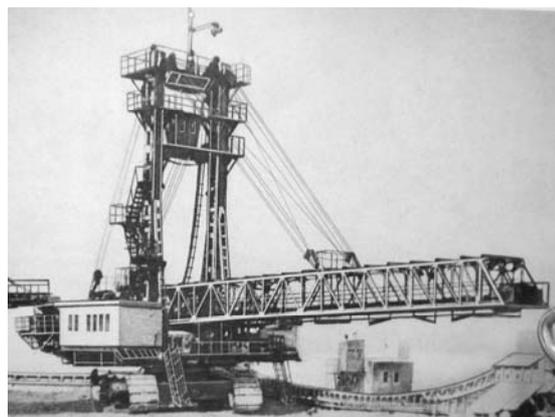


Рис. 10. Роторный экскаватор, перегружатель

решение которого можно представить в динамических функциях Крылова

$$y(x) = y_0 A_{kx} + \frac{y'_0}{k} B_{kx} + \frac{M_0}{k^2 EJ_z} C_{kx} + \frac{P_0}{k^3 EJ_z} D_{kx}. \quad (20)$$

аргумента, содержащего волновые числа k .

Зная волновые числа, можно найти спектр частот собственных колебаний

$$k = \sqrt[4]{\frac{m\omega^2}{EJ_z}}, \quad (21)$$

и найти уравнение движения сечений стержня при колебаниях.

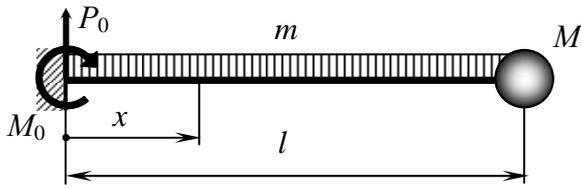


Рис.11. Расчетная схема консоли

Для примера вычислим спектр частот собственных колебаний весовой консоли с погонной массой m и сосредоточенной массой $M = \xi ml$, рис. 11.

Согласно (20) составляем уравнения изогнутой оси балки и её производных:

Из условий $M(l) = 0$, $Q(l) = -P_u$, т.е. при $kl = \lambda$ получим систему уравнений:

$$M_0 A_\lambda + \frac{P_0}{k} B_\lambda = 0, \quad M_0 k D_\lambda + P_0 A_\lambda = -M \frac{k^4 EJ_z}{m} y(l),$$

где сила инерции $P_u = -M\ddot{y}(l) = M\omega^2 y(l) = M \frac{k^4}{m} EJ_z y(l)$.

После подстановки $y(l)$, обозначив $\xi = \frac{M}{ml}$, получим систему однородных уравнений, определитель которой приравниваем нулю:

$$A_\lambda^2 - B_\lambda D_\lambda = \xi \lambda (B_\lambda C_\lambda - A_\lambda D_\lambda).$$

Собственные числа этого уравнения λ позволяют найти спектр частот по (21).

Например, при $\xi = 1$ получим $\lambda_1 = 1,24779$, $\lambda_2 = 4,03114$, $\lambda_3 = 7,13413$

и т. д., и собственные частоты: $\omega_1 = \frac{\lambda_1^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_z}{m}} = \frac{1,55729}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_z}{m}}$,

$$\omega_2 = \frac{16,25008}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_z}{m}} \text{ и т.д.}$$

По этим примерам можно судить, нужна ли математика в инженерных дисциплинах и в частности в сопротивлении материалов.

Библиографические ссылки

1. Шевченко Ф.Л. Механика упругих деформируемых систем, часть 1. Напряженно-деформированное состояние стержней: Учебное пособие с грифом МОН. Донецк, 2006, - 293 с.
2. Саркисов Г.М. Расчеты бурильных и обсадных колонн. –М.: Недра, 1971. -206 с.
3. Шевченко Ф.Л., Царенко С.Н. Задачи по сопротивлению материалов. // Учебное пособие. – Донецк, ДонНТУ. 2010 г. -343 с.

15.04.11