УДК 662.276.52.532.529

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВОДО-ВОЗДУШНОЙ СРЕДЫ В КОРОТКИХ ЭР ЛИФТАХ

Самуся В.И., докт. техн. наук, проф., Малеев А.В., инж
Национальный горный университет,
Холоша А.С., ассистент,
Донецкий национальный технический университет

Составленные дифференциальные уравнения вынужденных колебаний гидросмеси в шахтах коротких эрлифтах для водоотлива и очистки водосборных ёмкостей

Проблема и её связь с научными или практическими задачами. В последние годы в угольной промышленности внедрены в производство и успешно эксплуатируются эрлифтные подъёмные установки. При работе шахты (участка) в режиме добычи полезного ископаемого эрлифты используются для подъёма на поверхность пульпы, т.е. смеси "твёрдое-вода-воздух". При проведении профилактических работ или в случае аварии эрлифты откачивают из ствола шахты воду, работая на смеси "вода-воздух", применяются для очистки колодцев и зумпфов от твёрдого.

Проектирование, монтаж и доведение до проектной мощности эрлифтных установок сопровождались обширными теоретическими и экспериментальными исследованиями. Анализ результатов этих исследований показывает, что механические процессы при движении двух- и трёхфазной среды в эрлифте носят сложный характер, что создаёт значительные трудности в создании его математической модели и, следовательно, составлении дифференциальных уравнений движения. Вместе с тем, сравнительная конструктивная простота эрлифтов позволяет предположить, что в будущем их использование в народном хозяйстве будет расширяться. В связи с этим имеет смысл, наряду с существующим, искать новые способы описания гидродинамических процессов в подъёмной трубе эрлифта и на их основе разрабатывать методы повышения производительности, надёжности и долговечности эрлифтных установок.

Анализ исследований и публикаций. Профессором Н.Г. Логвиновым [1], [2] был проведён анализ движения двухфазной среды в эрлифте, основанный на энергетическом методе составления дифференциальных уравнений движения. Теоретически обнаружено и экспериментально подтверждено возникновение устойчивых самовозбуждающихся колебаний – автоколебаний, – параметров состояния газожидкостной среды при работе эрлифта на восходящей ветви его расходной характеристики (по оси абсцисс расходной характеристики откладывается $Q_{возд}$ – расход сжатого воздуха через смеситель, а по оси ординат откладывается $Q_{эрл}$ – производительность эрлифта). При этом в области точки расходной характеристики, соответствующей оптимальному, с точки зрения расхода энергии, режиму, т.е. максимальному к.п.д. эрлифта, колебания имеют почти синусоидальный характер. В области расходной характеристики, примыкающей к точке, где эрлифт развивает максимальную производительность, колебания практически отсутствуют.

Представляется целесообразным оценить влияние на эрлифт, как на автоколебательную систему, внешнего воздействия, периодически изменяющегося во времени. Физически такое воздействие можно осуществить, изменяя по регулируемому (в частности, гармоническому) закону давление подаваемого в подъёмную трубу эрлифта сжатого воздуха. В дальнейшем на основе результатов такого исследования предполагается дать теоретически обоснованный способ выбора параметров возмущающего воздействия (циклической частоты и амплитуды), при которых в движущейся среде будут генерироваться устойчивые вынужденные колебания заданной амплитуды. При этом ожидается увеличение производительности эрлифта за счёт выбора в воздухоотделитель дополнительных масс транспортируемой среды, обусловленных периодической составляющей и в подъёмную трубу не возвращающихся.

Постановка задачи. Получить дифференциальные уравнения, описывающие вынужденные колебания при непериодическом характере источника энергии.

Изложение материалов и результаты исследований. В данной работе принят предложенный Н.Г. Логвиновым так называемый энергетический метод описания двухфазной газожидкостной среды в эрлифте [2].

Водовоздушная среда, находящаяся в подъёмной трубе, хвостовике, приёмной ёмкости эрлифта, приближённо рассматривается как механическая система с одной степенью свободы. Дифференциальное уравнение её движения составляется в форме уравнения Лагранжа 2-го рода, преобразованного в обобщённое уравнение энергии [3]:

$$\frac{d}{dt}(T+\Pi)+2\Phi=W, \qquad (1)$$

где T – кинетическая энергия системы, выраженная через обобщённую координату q и обобщённую скорость $\dot{q}$; Π – потенциальная энергия системы, выраженная через обобщённую координату q; Φ – функция рассеяния энергии (функция Рэлея); W – мощность приложенных к системе возмущающих сил.

Последняя связана с обобщённой возмущающей силой $Q_в$ и обобщённой скоростью $\dot{q}$ формулой:

$$W=Q_в\dot{q}, \qquad (2)$$

Выбрав в качестве обобщённой координаты q системы положение z материальных частиц среды, отсчитываемое от смесителя вверх, при вычислении кинетической энергии T и потенциальной энергии Π учитываем только массу жидкой фазы; массой воздуха пренебрегаем, т.к. последняя исчисляется сотыми долями массы движущейся жидкости. С точки зрения термодинамики процесс считается изотермическим, что подтверждается наблюдениями за эрлифтами, находящимися в эксплуатации.

Пренебрегая кинетической энергией жидкости, находящейся в приёмных ёмкостях эрлифта, ввиду пренебрежимо малых скоростей её движения и, принимая распределение давления и средней по сечению скорости жидкости по высоте подъёмной трубы получим согласно [2], выражение для кинетической энергии в следующем виде:

$$T=\frac{a}{2}\dot{z}^2, \qquad (3)$$

В формуле зависимость коэффициента a, называемого коэффициентом инерции эрлифта, от параметров эрлифта определяется выражением:

$$a=\frac{q^*\gamma}{kg}\frac{F_{хв}^2 P_{св}}{F_{п.тр}}ln\frac{P_{атм}}{P_{д.п.ср.}}+l_{хв}F_{хв}\rho_n, \qquad (4)$$

где $F_{хв}$ – площадь поперечного сечения хвостовика; $F_{п.тр}$ – площадь поперечного сечения подъёмной трубы; $l_{хв}$ – длина хвостовика; $P_{атм}$ – атмосферное давление; $P_{св}$ – давление приведённого к свободному состоянию воздуха; $P_{д.п.ср.}$ – среднее давление динамического погружения эрлифта; ρ_n – плотность жидкости фазы;

$q^* = \dfrac{Q_{св.в}}{Q_{эрл}}$ – удельный расход воздуха; k – угловой коэффициент эпюры распределения давления по высоте подъёмной трубы.

Потенциальная энергия среды в отклонённом от равновесного состояния положения определяется, согласно [2], выражением:

$$П = \frac{C}{2} z^2 + const, \qquad (5)$$

Зависимость квазиупругого коэффициента С от параметров эрлифта определяется формулой:

$$C = \frac{\gamma F_{п.тр} P_{д.п.изб}}{q^* P_{св}} \left(\frac{5}{3} + \frac{P_{св}}{P_{д.п.изб}} \right), \qquad (6)$$

куда, по сравнению с формулой (4), входит ещё одна величина $P_{д.п.изб}$ – избыточное давление динамического погружения на уровне смесителя.

Как было показано в [2], самовозбуждающиеся колебания среды в эрлифте при неколебательном характере источника энергии – нагнетателя, объясняется наличием обобщённой силы “отрицательного сопротивления”, аналитическое выражение которой может быть представлено нечётным полиномом скорости:

$$Q_{сопр} = \alpha \dot{z} - \beta \dot{z}^3, \qquad (7)$$

где α и β – коэффициенты, зависящие от структуры потока в подъёмной трубе, определяемой, в свою очередь, режимом работы эрлифта.

Будем считать, что и при вынужденных колебаниях указанная в (7) структура обобщённой силы $Q_{сопр}$ будет иметь место; быть может несколько изменятся численные значения коэффициентов α и β.

При вычислении обобщённой возмущающей силы $Q_в$ полагаем для определённости, что давление в смесителе $P_{см}$ посредством внешнего управляющего воздействия изменяется по гармоническому закону $P_{см} = P \sin(\omega_1 t + \delta_1)$ постоянными амплитудой P (атм.), циклической частотой ω_1 (сек$^{-1}$) и начальной фазой δ_1 (рад). Очевидно, что период возмущающей силы τ_1 равен $\tau_1 = \dfrac{2\pi}{\omega_1}$.

Согласно основной рабочей гипотезе о линейном законе распределения давления по высоте подъёмной трубы эрлифта, для случая самовозбуждающихся колебаний было экспериментально установлено, что давление на высоте z является функцией координаты и времени, т.е.:

$$P(z,t) = P_{см}(t) - kz, \qquad (8)$$

где $k(t)$ – изменяющийся во времени угловой коэффициент эпюры давления.

Поскольку давление на выходе подъёмной трубы при отсутствии ударных явлений в транспортируемой среде равно атмосферному $P_{атм} = const$, то предположение о линейном распределении давления можно трактовать как пульсирующее "вращение" прямой вокруг неподвижно точки. Заметим, что сделанное предположение тем более реально, чем короче эрлифт. При большой длине подъёмной трубы начнёт сказываться ограниченность скорости распространения возмущения, подаваемого на уровне смесителя, т.е. давление на уровне z будет меняться с запаздыванием,

$$P(z,t) = P_{см}\left(t - \frac{z}{V_{зв}}\right) - kz,$$

где $V_{зв}$ – скорость звука в двухфазной среде.

Будем пренебрегать запаздыванием по двум причинам: во-первых, естественным желанием получить возможно простое дифференциальное уравнение движения, позволяющее хотя бы в грубом приближении теоретически оценить ещё не наблюдавшееся в практике эксплуатации эрлифтов механическое явление; во-вторых, существует возможность избежать решающего влияния запаздывания, предусмотрев конструктивно подвод возмущения выше смесителя.

Для определения переменного во времени коэффициента $k(t)$ используем упомянутое выше краевое условие, согласно которому давление на выходе подъёмной трубы в любой момент времени равно $P_{атм}$: $P(H + h_г, t) = P_{атм} = const$.

Подставляя это выражение в (5), получим; полагая для простоты $\delta_1 = 0$, $P_{атм} = P\sin\omega_1 t - k(t)(H + h_г)$,

откуда введя обозначение $H_1 = H + h_г$,

$$k(t) = \frac{1}{H_1}\left(P\sin\omega_1 t - P_{атм}\right) = \frac{P}{H_1}\sin\omega_1 t - \frac{P_{атм}}{H_1}.$$

С учётом этого формула (5) принимает вид:

$$P(z,t)=P\left(1-\frac{z}{H_1}\right)\sin\omega_1 t+\frac{P_{атм}}{H_1}z, \qquad (6)$$

Задав закон распределения давления формулой (6), вычислим обобщённую возмущающую силу $Q_в(t)$, которая, как известно, является коэффициентом при вариации δ_z обобщённой координаты в выражении для суммы элементарных работ возмущающих сил. В данном случае речь идёт о работе при изотермическом расширении элементарных объёмов сжатого воздуха, распределённых по высоте подъёмной трубы.

Элементарная работа условного "столбика" воздуха бесконечно малого объёма dv, расположенного на высоте z и находящегося под давлением $P(z,t)$, равна:

$$\delta A=P(z,t)\cdot\delta(dv), \qquad (7)$$

Представим элементарный объём dv в виде: $dv=F_{возд}\cdot dz$,

где $F_{возд}$ – часть площади поперечного сечения трубы, занятая газообразной фазой. В [2] было показано, что жидкая фаза занимает часть сечения на высоте z, обратно пропорциональную скорости в этом сечении.

Отсюда следует, что оставшаяся часть сечения заполнена сжатым воздухом и с учётом эпюры скоростей газожидкостной среды в подъёмной трубе может быть представлена в виде:

$$F_{возд}(z)=F_0+(F_{св.в}-F_0)\left(1-e^{-k_1 z}\right),$$

где F_0 – часть площади сечения трубы, занятая воздухом; $F_{св.в}$ – часть площади сечения трубы, соответствующая давлению воздуха на выходе из смесителя; k_1 – коэффициент, выбираемый так, чтобы, во-первых, при $z=H_1$ выполнялось равенство $F_{возд}(H_1)=F_{св.в}$; т.е. $e^{-k_1 H_1}\approx 0$, во-вторых, формы функции $F_{возд}(z)$ как можно точнее соответствовала эпюре распределения скоростей.

Принимая во внимание это уравнение, представляем вариацию элементарного объёма воздуха в виде:

$$\delta(dv)=\left[k_1(F_{св.в}-F_0)e^{-k_1 z}dz\right]\delta z$$

подстановка последнего выражения в формулу (7) даёт:

$$\delta A=\left[P(z,t\cdot)k_1(F_{св.в}-F_0)e^{-k_1 z}dz\right]\delta z.$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках представляет собой элементарную обобщённую силу, соответствующую энергии сжатого воздуха, заключённого в рассмотренном элементарном объёме. Полная обобщённая возмущающая сила, соответствующая газосодержанию во всей подъёмной трубе, выразится интегралом:

$$Q_в(t)=\int_0^{H_{возд}} P(z,t)k_1\left(F_{св.в}-F_0\right)e^{-k_1 z}dz=$$

$$=\int_0^{H_{возд}} k_1\left(F_{св.в}-F_0\right)\left[P\sin\omega_1 t+\frac{1}{H_1}\left(P_{атм}-P\sin\omega_1 t\right)z\right]e^{-k_1 z}dz=$$

$$=\left(F_{св.в}-F_0\right)\left\{P\left(1-e^{-k_1 H_{возд}}\right)\sin\omega_1 t+\frac{1}{k_1 H_1}\left(P_{атм}-P\sin\omega_1 t\right)\left[1-e^{-k_1 H_{возд}}\left(k_1 H_{возд}+1\right)\right]\right\}$$

,

что после преобразований приводит в выражению:

$$Q_в(t)=P_0+P_1\sin\omega_1 t, \tag{9}$$

В формуле введены следующие обозначения:

$$P_0=P_{атм}\frac{F_{св.в}-F_0}{k_1 H_1}\left[1-\left(1+k_1 H_{возд}\right)e^{-k_1 H_{возд}}\right],$$

$$P_1=P\left(F_{св.в}-F_0\right)\left[\left(1-e^{-k_1 H_{возд}}\right)\left(1-\frac{1}{k_1 H_1}\right)+\frac{H_{возд}}{H_1}e^{-k_1 H_{возд}}\right],$$

$H_{возд}$ – суммарная высота части подъёмной трубы эрлифта, заполненная газообразной средой.

Дифференцируем выражения (3) и (5) по времени:

$$\frac{dT}{dt}=a\dot z\ddot z,\quad \frac{d\Pi}{dt}=cz\dot z$$

Находим функцию рассеяния энергии, принимая во внимание (7):

$$\Phi=-\int_0^{\dot z} Q_{сопр}d\dot z=-\int_0^{\dot z}\left(\alpha\,\dot z-\beta\,\dot z^3\right)d\dot z=-\frac{\alpha}{2}\dot z^2+\frac{\beta}{2}\dot z^4$$

и мощность возмущающей обобщённой силы

$$W=Q_в(t)\dot z.$$

Подставляя полученные выражения с учётом (9) в (1), получаем дифференциальное уравнение вынужденных колебаний водовоздушной среды в подъёмной трубе эрлифта:

$$a\ddot z+cz\dot z-\alpha\,\dot z^2+\frac{\beta}{2}\dot z^4=\left(P_0+P_1\sin\omega_1 t\right)\dot z$$

или

$$\ddot{z} - \frac{\alpha}{a}\dot{z} + \frac{\beta}{2a}\dot{z}^3 + \frac{c}{a}z = \frac{P_0}{a} + \frac{P_1}{a}\sin\omega_1 t, \tag{10}$$

Преобразуем дифференциальное уравнение, введя новую переменную q, связанную с переменной z соотношением $z = q + \frac{P_0}{c}$, постоянную $A = \frac{P_1}{a\omega_0^2}$, где $\omega_0^2 = \frac{c}{a}$. Тогда очевидно, $\dot{z} = \dot{q}$, $\ddot{z} = \ddot{q}$ уравнение (10) принимает вид

$$\ddot{q} - \frac{\alpha}{a}\dot{q} + \frac{\beta}{2a}\dot{q}^3 + \omega_0^2 q = A\omega_0^2 \sin\omega_1 t, \tag{11}$$

Приближённый способ нахождения периодических решений уравнений известен как метод Ван дер Поля [4], [5]. Согласно этому методу, искомое решение представляется в виде:

$$q(t) = b_1(t)\sin\omega_1 t + b_2(t)\cos\omega_1 t, \tag{12}$$

где $b_1(t)$ и $b_2(t)$ – медленно изменяющиеся функции времени. После подстановки $q(t)$, $\dot{q}(t)$ и $\ddot{q}(t)$, вычисленных в силу соотношения (12), в уравнение (11), отбрасывания малых членов порядка выше первого и приравнивания коэффициентов при $\sin\omega_1 t$ и $\cos\omega_1 t$ в обеих частях уравнения, получится два дифференциальных уравнения:

$$\left.\begin{aligned} 2\dot{b}_1 + \frac{\omega_0^2 - \omega_1^2}{\omega_1}b_2 - \alpha b_1\left(1 - \frac{b^2}{a_0^2}\right) = 0, \\ 2\dot{b}_2 + \frac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{\omega_1}b_1 - \alpha b_2\left(1 - \frac{b^2}{a_0^2}\right) = -A\frac{\omega_0^2}{\omega_1^2} \end{aligned}\right\}, \tag{13}$$

Здесь a_0 характеризует с точностью до членов порядка α амплитуду свободных колебаний с частотой ω_0, а b – вынужденных колебаний с частотой ω_1. После введения в рассмотрение величины $\Delta = 2(\omega_0 - \omega_1)$, именуемой расстройкой, очевидное равенство:

$$\omega_0^2 - \omega_1^2 = (\omega_0 - \omega_1)(\omega_0 + \omega_1) = \omega_1\Delta$$

позволяет привести систему уравнений (13) к виду:

$$\left.\begin{aligned} 2\dot{b}_1 + b_2\Delta - \alpha b_1\left(1 - \frac{b^2}{a_0^2}\right) = 0, \\ 2\dot{b}_2 + b_1\Delta - \alpha b_2\left(1 - \frac{b^2}{a_0^2}\right) = -A\omega_0 \end{aligned}\right\}, \tag{14}$$

Для эрлифтных установок представляют интерес периодические решения уравнения (11) с частотой возмущающей функции ω_1, для чего достаточно потребовать постоянство величин $b_1 = b_1^*$ и $b_2 = b_2^*$. Это требование превращает (14) в систему двух алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{aligned} b_2^*\Delta - \alpha b_1^*\left(1 - \frac{b^{*2}}{a_0^2}\right) &= 0, \\ b_1^*\Delta - \alpha b_2^*\left(1 - \frac{b^{*2}}{a_0^2}\right) &= -A\omega_0 \end{aligned}\right\}$$

решение которых совместно с указанным выше равенством $b^{*2} = b_1^{*2} + b_2^{*2}$ позволяет определить зависимость амплитуды вынужденных колебаний от расстройки Δ и амплитуды возмущения Λ. При этом аналитическому методу отыскания решения ввиду его громоздкости можно предпочесть один из известных численных графических методов.

Выделение областей устойчивости периодических решений, т.е. устойчивых вынужденных колебаний, осуществляется методом А.А.Андронова [4]. Уравнение (14) при этом рассматривают в самом общем виде. Вводятся новые переменные величины и параметры:

$$\xi = \frac{b_1}{a_0}, \eta = \frac{b_2}{a_0}, R^2 = \xi^2 + \eta^2, \theta = \frac{\alpha}{2}t, \delta = \frac{\Delta}{\alpha}, G = -\frac{A\omega_0}{a_0\alpha}, \qquad (15)$$

Здесь R характеризует отношение амплитуд вынужденных и свободных колебаний, δ – величину расстройки, G является величиной, пропорциональной возмущению.

С учётом (15) уравнения (14) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\theta} &= -\delta\eta + \xi\left(1 - R^2\right), \\ \frac{d\eta}{d\theta} &= G + \delta\xi + \eta\left(1 - R^2\right), \end{aligned}\right\}, \qquad (16)$$

и могут быть заменены одним уравнением:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{G + \delta\xi + \eta\left(1 - R^2\right)}{-\delta\eta + \xi\left(1 - R^2\right)}, \qquad (17)$$

Приравнивая нулю правые части дифференциальных уравнений (16), можно определить амплитуду вынужденных колебаний среды в эрлифтной самовозбуждающейся системе:

$$\left.\begin{aligned} -\delta\eta_0 + \xi_0\left(1 - R_0^2\right) = 0 \\ G + \delta\xi_0 + \eta_0\left(1 - R_0^2\right) = 0 \end{aligned}\right\}, \qquad (18)$$

Таким образом, уравнение (18) определяют особую точку (ξ_0, η_0) дифференциального уравнения (17). Объединив их и введя обозначение $r = R_0^2 = \xi_0^2 + \eta_0^2$, получим:

$$r\left[\delta^2 + (1-r)^2\right] = G^2.$$

Последнее уравнение позволяет установить зависимость параметров вынужденных колебаний при различных режимах работы эрлифта от параметров, характеризующих свойство как транспортируемой водовоздушной смеси, так и возмущающего воздействия. Так, если G=0, т.е. периодическое возмущение отсутствует, то как и следовало ожидать, в системе могут происходить только свободные колебания. При r и δ могут принимать следующие значения: ($\delta = 0, r = 1$) или ($r = 0, \delta$ – произвольное). Если G – малая, но отличная от нуля величина, то r приближается либо к единице, либо к нулю; амплитудные кривые будут овалами, близкими к окружности $\delta^2 + (1-r)^2 = G^2$ с центром в точке ($\delta = 0, r = 1$). С ростом G овалы расширяют. Амплитудные кривые будут замкнутыми только для значений $G^2 \le \frac{4}{27}$; при $G^2 > \frac{4}{27}$ они разомкнуты. Каждая точка этих кривых определяет амплитуду вынужденных колебаний, отвечающую заданной частоте и амплитуде возмущения.

Устойчивость любого частного решения дифференциального уравнения (11), т.е. устойчивость вынужденных колебаний, определяется, согласно методу А.А. Андронова, типом соответствующей данному режиму работы эрлифта особой точки дифференциального уравнения (17).

Если $r^2 > \delta^2$ и $\delta^2 + (1-r)(1-3r) > 0$, то особая точка представляет собой устойчивый узел при значениях $r > 0{,}5$, и неустойчивый – при $r < 0{,}5$. Если $r^2 > \delta^2$ и $\delta^2 + (1-r)(1-3r) < 0$, то особая точка является седлом. Если $r^2 = \delta^2$, то особая точка – устойчивый узел при $r > 0{,}5$, и неустойчивый – при $r < 0{,}5$. Если $r^2 < \delta^2$, то особая точка есть устойчивый центр или фокус при $r > 0{,}5$, и неустойчивый центр или фокус при $r < 0{,}5$.

Применительно к движению сплошной среды в подъёмной трубе эрлифта сказанное выше означает, сто устойчивые вынужденные колебания будут иметь место, если их амплитуда будет не меньше половины амплитуды самовозбуждающихся колебаний. Последняя, как известно, [2], составляет 1/6–1/7 величины давления статического погружения эрлифта. Если при этом $r > 1$, т.е. амплитуда вынужденных больше амплитуды свободных колебаний, то устойчивость гарантирована при всех значениях δ, т.е. при любых значениях частоты возмущения. Если $1 > r > 0{,}5$, то частоты возмущения ω_1, для которых $\delta < 0{,}58$, приводят к седлу; точнее, режимные точки, находящиеся в плоскости координат (r, δ) и лежащие внутри эллипса с полуосями $(r = 0{,}33; \delta = 0{,}58)$ и центром в точке $(r = \frac{2}{3}; \delta = 0)$, представляют собой седло.

Выводы и рекомендации. Проведённый теоретический анализ вынужденных колебаний в коротком эрлифте позволяет предопределить амплитуду возмущающей функции в смесителе по давлению. Она должна быть больше половины свободных самовозбуждающихся колебаний.

В интервале 0,5 – 1,0 амплитуды самовозбуждающихся колебаний определены ограничения по частотам возмущающей функции.

Если амплитуда вынужденных колебаний превышает по своему значению амплитуду самовозбуждающихся колебаний, ограничения на частоту возмущающего воздействия не накладываются.

Увеличение производительности короткого эрлифта при работе на заданном режиме расхода воздуха с генерацией вынужденных колебаний предполагается получить за счёт выброса в воздухоотделитель дополнительных масс транспортируемой среды, обусловленных периодической составляющей движения и в подъёмную трубу на возвращающихся.

Список источников.

1. Логвинов Н.Г. Колебания в воздушных подъёмниках. – В сб.: “Разработка месторождений полезных ископаемых”. Вып. 24. Киев, “Техніка”, 1971.
2. Логвинов Н.Г. Самовозбуждающиеся колебания в воздушных подъёмниках. – В сб.: “Разработка месторождений полезных ископаемых”. Вып. 31. Киев, “Техніка”, 1973.
3. Обморшев А.Н. Введение в теорию колебаний. М., “Наука”, 1965.
4. Стокер Дж. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. М., ИЛ, 1953.
5. Каудерер Г. Нелинейная механика. М., ИЛ, 1961.