

УДК 624.4 (085.80)

Ф.Л. ШЕВЧЕНКО (д-р техн. наук, проф., зав. каф.)

Донецкий национальный технический университет, г. Донецк, Украина

О.А. РУСАНОВА (канд. техн. наук, доц.)

Донецкий национальный университет, г. Донецк, Украина

ЭПОРЫ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ СЕЧЕНИЙ НЕВЕСОМЫХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ

Рассматривается определение положения неподвижных сечений и эпюр перемещений невесомых стержней с сосредоточенными массами при статическом и динамическом нагружении.

невесомый стержень, сосредоточенные массы, неподвижное сечение, частоты колебаний, собственные колебания

Введение

В существующей литературе по механике упругих деформируемых систем при рассмотрении перемещений поперечных сечений при растяжении-сжатии свободных незакрепленных стержней вычисляются абсолютные деформации отдельных участков стержней, а затем последовательно суммируются деформации от принятого начала координат. При этом чаще всего за начальное неподвижное сечение принимают крайнее торцевое сечение стержня и от него строят эпюру перемещений [1, 2]. Однако это не соответствует истинным перемещениям сечений, так как положение неподвижного сечения не известно. В предложенной статье показано, как найти неподвижное сечение и какой вид будет иметь истинная эпюра перемещений.

Основное содержание работы

1. Статическое нагружение

Перемещение – это путь, который проходит сечение стержня при деформировании. Абсолютная деформация представляет разность перемещений двух сечений стержня. Сумма деформаций отдельных участков стержня дает перемещение крайнего сечения стержня по отношению к сечению, от которого производится отсчет.

Известно, что внутреннее усилие равно сумме внешних нагрузок, приложенных к стержню слева или справа от рассматриваемого сечения.

Таким же путем и при вычислении перемещений нужно учитывать сумму деформаций слева или справа от рассматриваемого сечения. При этом независимо от того, какую часть мы будем рассматривать, результат должен быть одинаковым.

Обычно для построения эпюры перемещений сечений свободного незакрепленного стержня вычисляют деформации отдельных участков, а при построении эпюры принимают условно неподвижное сечение в любом месте стержня и от него отсчитывают текущую координату x .

Так как свободный стержень под действием внешних сил находится в равновесии в безразличном состоянии, то такое допущение правомерно. Однако, более целесообразно за неподвижное сечение принимать такое сечение, слева и справа от которого абсолютные деформации участков окажутся одинаковыми.

Абсолютная деформация стержня при растяжении-сжатии определяется по закону Гука

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF} = \frac{\sigma l}{E} = \frac{\omega}{E}, \quad (1.1)$$

т.е. равна площади эпюры внутренних усилий, деленной на жесткость при растяжении-сжатии, или площади эпюры напряжений ω , деленной на модуль упругости E .

Следовательно, неподвижное сечение легко найти из условия равенства площадей эпюры напряжений слева и справа от искомого сечения.

Если однородный стержень загружен силами P по схеме рис. 1.1, то абсолютная деформация всего стержня $\Delta l = 2 \frac{Pl}{EF}$.

Из эпюры напряжений (рис. 1.1, а) следует, что неподвижное сечение находится посередине длины стержня. Принимая в этом сечении начало координат, строим эпюру перемещений сечений, рис. 1.1, б.

Если принять начало координат на правом торце стержня, то эпюра перемещений примет вид рис. 1.1, в. Из нее истинную эпюру

можно получить, если сместить ось эпюры на величину, равную половине перемещения левого торца (ее ось показана штриховой линией).

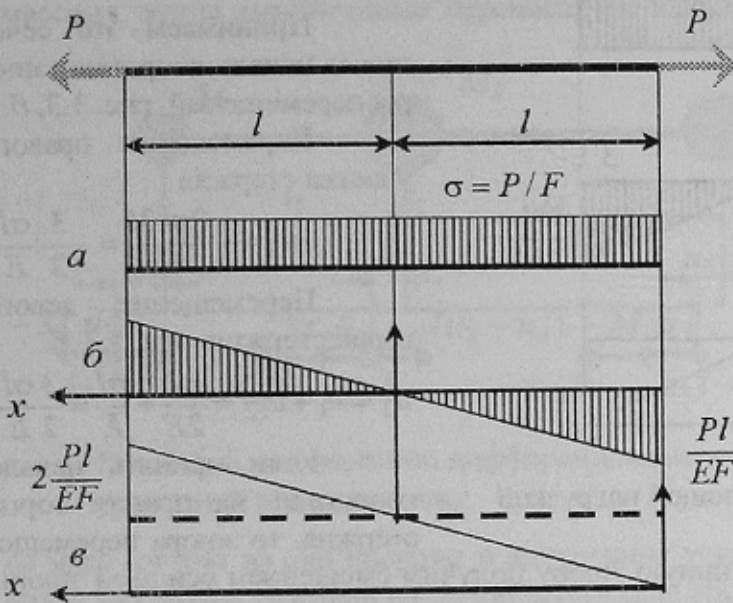


Рис. 1.1. Свободный стержень с одним участком

Пример 1.1. Однородный стержень загружен тремя силами по схеме, показанной на рис. 1.2.

Из эпюры напряжений (рис. 1.2, а) находим неподвижное сечение $\sigma x = \sigma(l-x) - \sigma l$, откуда $x=0$, т.е. неподвижное сечение находится на левом торце стержня.

Отсчитывая от этого сечения направление оси x , получаем эпюру перемещений, рис. 1.2, б.

На левом участке

$$\Delta(x) = -\frac{Px}{EF}, \quad \text{на правом участке}$$

$$\Delta(x) = -\frac{Pl}{EF} + \frac{2P(x-l)}{EF} \Big|_l$$

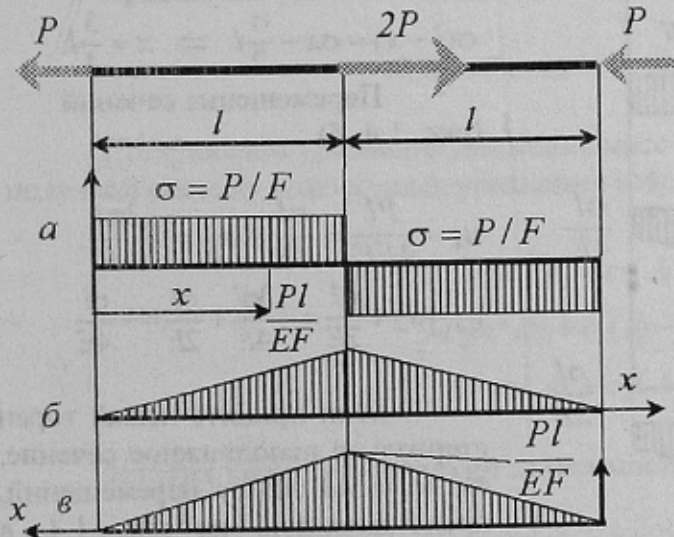
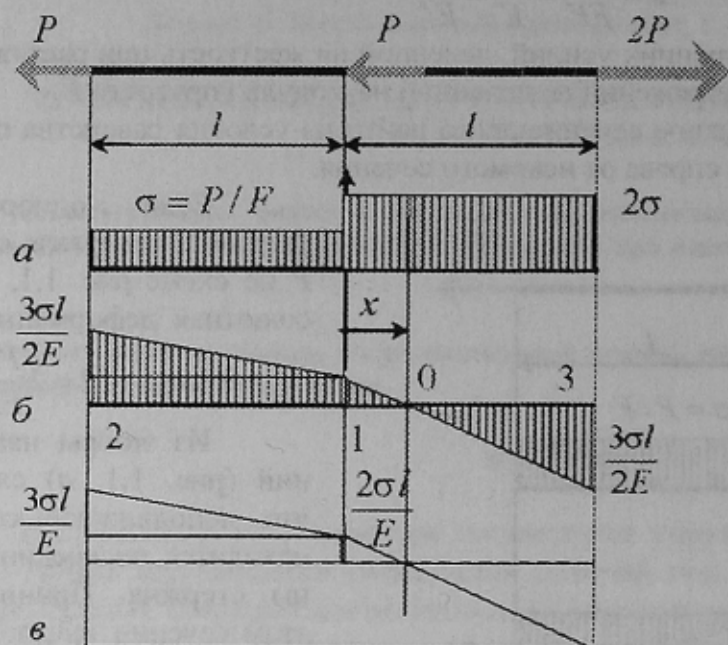


Рис. 1.2. Стержень с двумя участками при кососимметричном нагружении

Такая же эпюра будет, если принять правое сечение неподвижным.

Пример 1.2. Однородный стержень нагружен по схеме рис. 1.3.



По эпюре напряжений (рис. 1.3, а) находим неподвижное сечение

$$\sigma l + 2\sigma x = 2\sigma(l - x), \text{ т.е.}$$

$$x = \frac{l}{4}.$$

Принимаем это сечение за начало координат эпюры перемещений, рис. 1.3, б.

Перемещение правого участка стержня

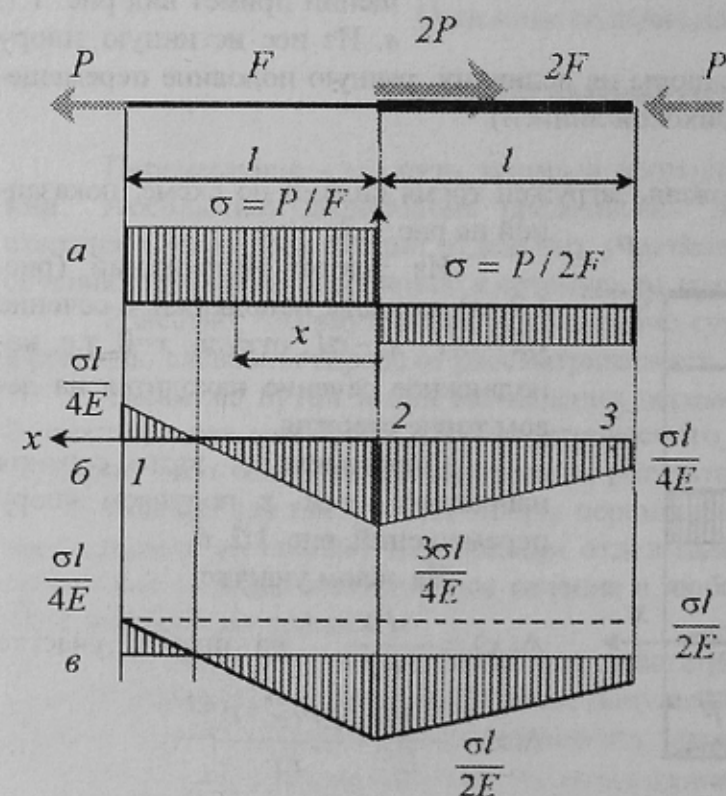
$$u_3 = -\frac{2\sigma \cdot 3l}{4E} = -\frac{3}{2} \frac{\sigma l}{E}.$$

Перемещение левого торца стержня, рис. 1.3, б.

$$u_2 = u_1 + u_{12} = \frac{\sigma l}{2E} + \frac{\sigma l}{E} = \frac{3}{2} \frac{\sigma l}{E}.$$

Если принять начало координат на правом торце стержня, то эпюра перемещений

Рис. 1.3. Стержень с растягивающей нагрузкой



Пример 1.3. Стержень ступенчато переменного сечения нагружен по схеме рис. 1.4.

По эпюре напряжений (рис. 1.4, а) находим положение неподвижного сечения

$$\sigma(l - x) = \sigma x - \frac{\sigma}{2}l \Rightarrow x = \frac{3}{4}l.$$

Перемещения сечений (рис. 1.4, б)

$$u_1 = \frac{Pl}{4EF} = \frac{\sigma l}{4E}, \quad u_2 = -\frac{3\sigma l}{4E},$$

$$u_3 = u_2 + \frac{\sigma l}{2E} = -\frac{3\sigma l}{4E} + \frac{\sigma l}{2E} = -\frac{\sigma l}{4E}.$$

Если принять левый торец стержня за неподвижное сечение, то получим эпюру перемещений, представленную на рис. 1.4, в жирной линии. Смещая ось этой

Рис. 1.4. Стержень с разнозначными напряжениями

эпюры на половинное значение перемещения правого торца стержня, получим истинную эпюру перемещений.

2. Динамическое нагружение

При динамическом нагружении амплитудные перемещения вычисляются непосредственно из уравнений движения сечений стержня, а положения неподвижных сечений зависят от частот собственных колебаний масс.

Рассмотрим продольные колебания невесомого стержня с сосредоточенными массами, когда амплитудные перемещения непосредственно вычисляются из уравнений движения масс.

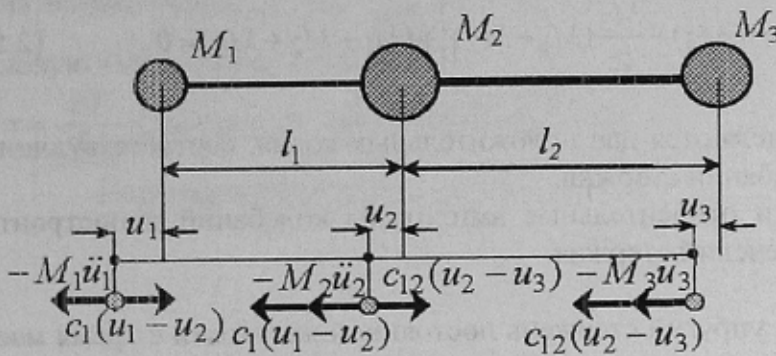


Рис. 1.5. К составлению дифференциальных уравнений движения масс

ся масс состоят из сил инерции и внутренних усилий, в виде произведений коэффициентов жесткости участков на соответствующие абсолютные деформации.

Трем массам соответствуют три уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} M_1 \ddot{u}_1 + c_1(u_1 - u_2) &= 0, \\ M_2 \ddot{u}_2 - c_1(u_1 - u_2) + c_2(u_2 - u_3) &= 0, \\ M_3 \ddot{u}_3 - c_2(u_2 - u_3) &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Принимаем уравнения движения масс в виде гармонических функций:

$$u_1 = A_1 \sin \omega t, \quad u_2 = A_2 \sin \omega t, \quad u_3 = A_3 \sin \omega t.$$

Подставляем уравнения движения масс в дифференциальные уравнения (2.1) и получаем систему однородных уравнений амплитудных перемещений:

$$\begin{aligned} M_1 \omega^2 A_1 - c_1(A_1 - A_2) &= 0, \\ M_2 \omega^2 A_2 + c_1(A_1 - A_2) - c_2(A_2 - A_3) &= 0, \\ M_3 \omega^2 A_3 + c_2(A_2 - A_3) &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Из этих уравнений следуют зависимости:

$$M_1 A_1 + M_2 A_2 + M_3 A_3 = 0, \quad (2.3)$$

Упругий однородный невесомый стержень с известными коэффициентами жесткости участков $c_1 = \frac{EF_1}{l_1}$

и $c_2 = \frac{EF_2}{l_2}$ и тремя массами M_1, M_2, M_3 , испытывает свободные колебания (рис. 1.5).

Уравнения динамического равновесия движущихся

$$A_1 = -\frac{c_1 A_2}{M_1 \omega^2 - c_1}, \quad A_3 = -\frac{c_2 A_2}{M_3 \omega^2 - c_2}. \quad (2.4)$$

Подставляем эти зависимости в уравнение (2.3):

$$-M_1 \frac{c_1}{M_1 \omega^2 - c_1} + M_2 - \frac{c_2}{M_3 \omega^2 - c_2} = 0.$$

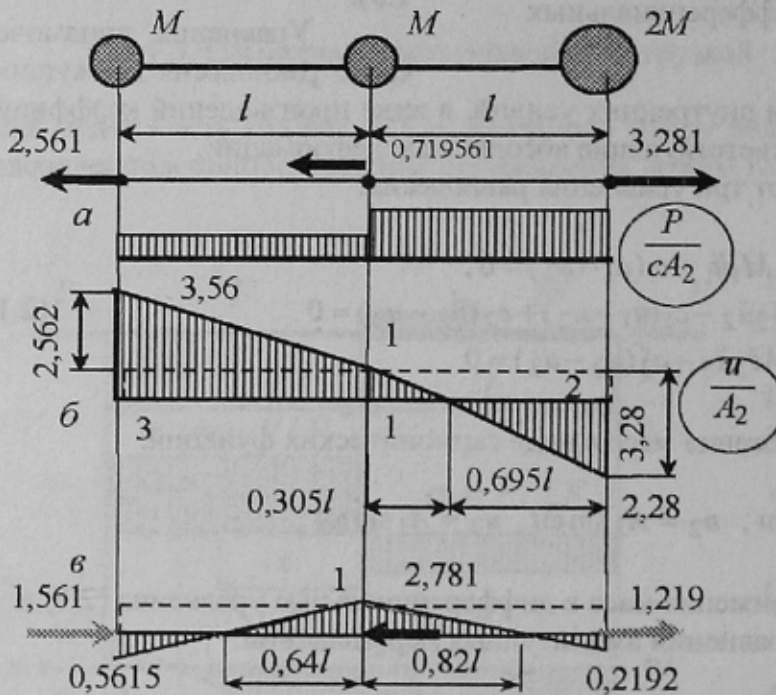
Отсюда получаем биквадратное частотное уравнение [3]

$$\omega^4 \frac{M_1 \cdot M_2 \cdot M_3}{c_1 c_2} - \omega^2 \left[\frac{M_1}{c_1} (M_2 + M_3) + \frac{M_3}{c_2} (M_1 + M_2) \right] + (M_1 + M_2 + M_3) = 0. \quad (2.5)$$

Из этого уравнения определяются два положительных корня, соответствующих двум частотам собственных колебаний стержня.

После этого можно найти относительные амплитуды колебаний и построить эпюру линейных перемещений сечений стержня.

Пример 1.4. Однородный упругий стержень постоянной жесткости с тремя массами испытывает собственные колебания, рис. 1.6.



Частотное уравнение (2.5) имеет вид:

$$2 \frac{M^3}{c^2} \omega^4 - 7 \frac{M^2}{c} \omega^2 + 4M = 0.$$

Отсюда находим корни уравнения, соответствующие частоте основного тона колебаний

$$\omega_1^2 = 0,7192 \frac{c}{M}, \text{ и второго}$$

тона колебаний

$$\omega_2^2 = 2,7807 \frac{c}{M}.$$

Согласно (2.4) найдем относительные амплитудные перемещения основного тона колебаний (на рис. 1.6, б показаны заштрихованным полем).

Рис. 1.6. К составлению динамических уравнений движения сосредоточенных масс

$$A_1 = -A_2 \frac{1}{0,7192 - 1} = 3,561 A_2, \quad A_3 = -A_2 \frac{1}{2 \cdot 0,7192 - 1} = -2,281 A_2.$$

Этим амплитудам соответствуют силы инерции колеблющихся масс (см. рис. 1.6, а).

$$P_2 = M\omega_1^2 A_2 = 0,719cA_2, \quad P_1 = M\omega_1^2 A_1 = 0,719 \cdot 3,561cA_2 = 2,561cA_2,$$

$$P_3 = 2M\omega_1^2 A_3 = 2 \cdot 0,719 \cdot 2,281cA_2 = -3,281cA_2.$$

Здесь знаки указывают на соответствие сил инерции их направлениям, в принятой системе координат – направление силы влево принято положительным.

Зная амплитуды колебаний масс, можно найти перемещения сечений. Для этого из эпюры амплитуд (рис. 1.6, б) находится неподвижное сечение $x = \frac{l}{3,28} = 0,305l$. Узловую точку также можно найти по частоте колебаний

$$x = \frac{EF}{\omega^2 M}. \quad \text{На правом участке } x = \frac{EF}{\omega^2 2M} = \frac{EF \cdot M}{2M \cdot 0,719 \cdot c} = \frac{EF \cdot l}{2 \cdot 0,719 \cdot EF} = 0,695 \cdot l.$$

Перемещение правого торца стержня:

$$u_3 = \frac{P_3 \cdot 0,695l}{EF} = 0,695 \cdot 3,281A_2 = 2,280A_2,$$

перемещение сечения приложения средней массы

$$u_2 = \frac{P_3 \cdot 0,305l}{EF} = 0,305 \cdot 3,281A_2 = A_2,$$

перемещение левого торца стержня

$$u_1 = u_2 + \frac{P_1 l}{EF} = A_2 + 2,561A_2 = 3,561A_2,$$

Эти перемещения соответствуют амплитудам колебаний масс.

Для второго тона колебаний находим амплитуды

$$A_1 = -0,5615A_2, \quad A_3 = -0,2192A_2$$

и силы инерции

$$P_2 = 2,7807c_2 A, \quad P_1 = -M_1 \omega_2^2 A_2 = -2,7807 \cdot 0,5615cA_2 = -1,5615cA_2,$$

$$P_3 = -M_3 \omega_2^2 A_3 = -2 \cdot 2,7807 \cdot 0,2192cA_2 = -1,21925cA_2.$$

Эпюра амплитудных перемещений показана на рис. 1.6, в.

Проверка частот колебаний по узловым точкам:

$$\omega_2^2 = \frac{1}{\delta_{11} M_1} = \frac{EF}{0,36l \cdot M} = 2,78 \frac{c}{M}, \quad \omega_2^2 = \frac{1}{\delta_{33} M_3} = \frac{EF}{0,18l \cdot 2M} = 2,78 \frac{c}{M}.$$

Пример 1.5. Однородный упругий стержень постоянной жесткости с тремя симметрично расположенными массами испытывает собственные колебания, рис. 1.7.

Частотное уравнение (1.5) имеет вид:

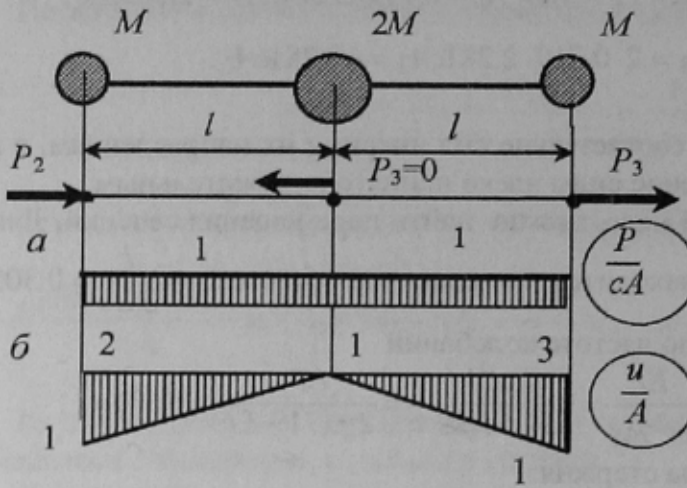


Рис. 1.7. Симметричные колебания масс

$$2\omega^4 - 6\frac{c}{M}\omega^2 + 4\frac{c^2}{M^2} = 0.$$

Отсюда находим две частоты колебаний:

$$\omega_1^2 = \frac{c}{M},$$

$$\omega_2^2 = 2\frac{c}{M}.$$

Первой частоте соответствует симметричная форма колебаний, когда средняя масса остается неподвижной, рис. 1.7.

В этом случае в формулах (1.4) знаменатель равен нулю и

$$A_2 = -A_1 \frac{M\omega^2 - c}{c} = 0,$$

а перемещение среднего сечения стержня примем равным

$$u_1 = A_1 = A \text{ (см. рис. 1.7, б).}$$

Второй частоте $\omega_2^2 = 2\frac{c}{M}$

соответствует кососимметричная форма колебаний. Из формул (2.4) получаем амплитудные перемещения масс:

$$A_1 = A_3 = -A_2. \text{ Этим амплитудам соответствуют силы инерции:}$$

$$P_1 = P_3 = M\omega^2 A_1 = -2cA_2 \text{ (см. рис. 1.8, а).}$$

По силам инерции находим перемещения торцов стержня:

$$u_1 = \frac{P_1}{c} = -2A_2 = u_3 \text{ (см. рис. 1.8, б).}$$

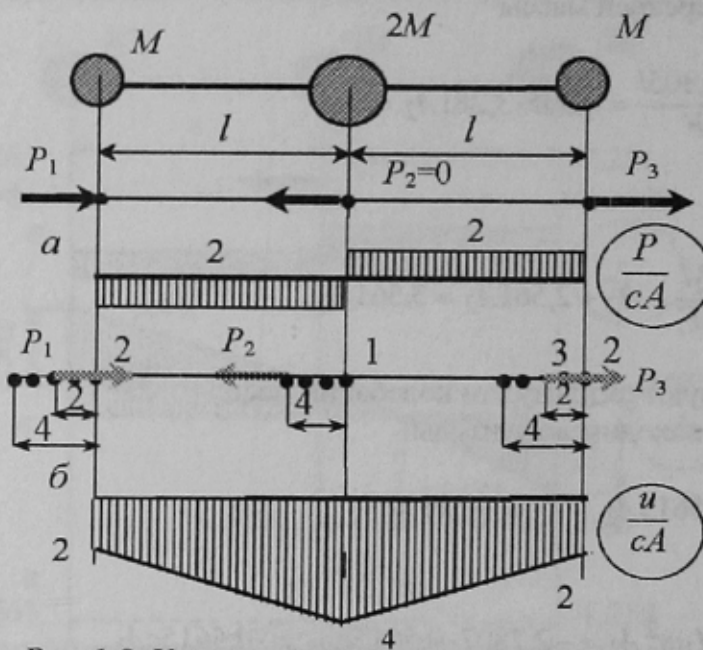


Рис. 1.8. Кососимметричные колебания масс

Пример 1.6. Однородный упругий стержень ступенчато-переменного сечения с заданными коэффициентами жесткости и тремя симметрично расположенными массами испытывает собственные колебания, рис. 1.9.

Частотное уравнение (2.5) принимает вид

$$\omega^4 \frac{2M^2}{2c^2} - \omega^2 \left(\frac{3M^2}{c} + \frac{3M^2}{2c} \right) + 4M = 0 \text{ или } \omega^4 - 4,5\omega^2 \frac{c}{M} + 4\frac{c^2}{M^2} = 0.$$

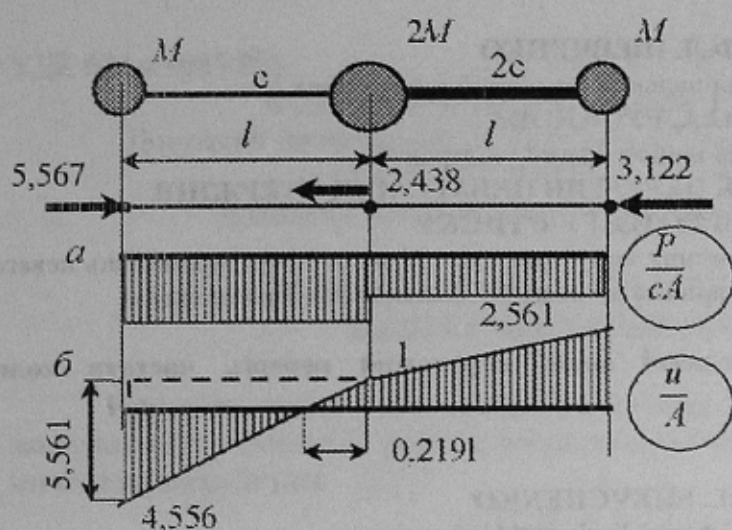


Рис. 1.9. Стержень ступенчато-переменного сечения

Отсюда находим первую частоту

$$\omega^2 = 1,219 \frac{c}{M}.$$

По этой частоте на основании (2.5) вычисляем амплитуды перемещений масс:

$$A_1 = -A_2 \frac{1}{1,219 - 1} = -4,566cA_2,$$

$$A_3 = -A_2 \frac{2}{1,219 - 2} = 2,566cA_2$$

По амплитудам вычисляем силы инерции колеблющихся масс:

$$P_2 = M_2 \omega^2 A_2 = 2M \cdot 1,219 \cdot c A_2 = 2,438cA_2,$$

$$P_1 = M_1 \omega^2 A_1 = -M \cdot 1,219 \cdot 4,566cA_2 = -5,567cA_2,$$

$$P_3 = M_3 \omega^2 A_3 = M \cdot 1,219 \cdot 2,566cA_2 = 3,122cA_2.$$

Перемещения сечений с приложенными массам:

$$u_2 = A_2, \quad u_1 = u_2 - \frac{P_2 l}{EF} = (1 - 5,567)A_2 = -4,567A_2,$$

$$u_3 = u_2 + \frac{P_3 l}{2EF} = \left(1 + \frac{3,122}{2}\right)A_2 = 2,561A_2.$$

Неподвижное сечение находится на левом участке стержня на расстоянии $x = l/5,561 = 0,18l$, см. рис. 1.9, б.

Итак, узловые точки в динамическом расчете определяются частотами колебаний.

Выводы

Истинная эпюра перемещений сечений при статическом нагружении стержня определяется из условия равновеликих площадей эпюры напряжений слева и справа от неподвижного сечения.

При динамическом нагружении стержня эпюра истинных перемещений определяется частотами колебаний сосредоточенных масс на невесомом стержне.

Список литературы

1. Тимошенко Г.С. Сопротивление материалов / Г.С. Тимошенко. — М.: Госиздат физ.-мат. литер., 1960. — 380 с.
2. Уманский А.А. Сборник задач по сопротивлению материалов / А.А. Уманский. — М.: ГИТТЛ, 1954. — 480 с.
3. Писаренко Г.С. Сопротивление материалов / Г.С. Писаренко. — К.: Вища школа, 1985. — 775 с.

Ф.Л. ШЕВЧЕНКО

Донецький національний технічний університет

О.А. РУСАНОВА

Донецький національний університет

**ЕПЮРИ ПЕРЕМІЩЕНЬ ПЕРЕРІЗІВ НЕВАГОМИХ СТЕРЖНІВ
В РАЗІ РОЗТЯГУ-СТИСКУ**

Розглядається визначення положення нерухомих перерізів та епюр переміщень невагомих стержнів з зосередженими масами при статичному та динамічному навантаженні

невагомий стержень, зосереджені маси, нерухомий переріз, частоти коливань, власні коливання

F.L. SHEVCHENKO

Donetsk National Technical University

O.A. RUSANOVA

Donetsk National University

**THE DIAGRAMS OF THE SECTION DISPLACEMENTS OF WEIGHTLESS PIVOTS
UNDER TENSION-COMPRESSION**

The determination of location of stationary position of section displacement of weightless pivots with concentrated mass under static and dynamic loads is considered.

weightless pivots, concentrated mass, displacements section, vibration frequencies, natural vibration

Рецензент: д.т.н., доц. Татяниченко О.Г.

Надійшла до редколегії 15.04.2010