

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПИТАЮЩЕЙ СЕТИ ГОРОДСКОГО ЭЛЕКТРОТРАНСПОРТА

**Криводубский О.А., Столяренко М.А.**

Донецкий национальный университет,  
кафедра прикладной математики и теории систем управления

**Abstract.**

*Krivodubsky O.A., Stolarenko M.A. The mathematical model of the feeding net of the electro-transport. The mathematical model of the current's forecast in the feeding net of the electro-transport for the non-stationary processes of the normal exploitation and the rate of the short circuit has been worked out in the given article. The under-models of the linear and current-temporal security have been listed. In the forecast the constant as well as variable current's compositions are taken into account. The model is suitable for the use in the systems of taking decisions for users of the energy services of the urban and railway electro-transport.*

В современных условиях износа оборудования питающих подстанций актуален прогноз токов короткого замыкания в зависимости от сезонных колебаний температуры. Существующие методики расчета учитывают только постоянную составляющую выпрямленного трехфазного переменного тока. Переменные пульсации компенсируются субъективно-эмпирическими поправками. В результате увеличивается погрешность расчетов, и как следствие возникают «мертвые зоны» или происходит ложное срабатывание защиты. С другой стороны, несрабатывание защиты часто приводит к выходу из строя оборудования подстанции. В данной работе приводится методика расчета защиты с учетом как постоянной, так и переменной составляющей выпрямленного тока.

Математическая модель фактически состоит из двух подмоделей: линейной и подмодели токовременной защиты.

Рассмотрим схему питания цепи городского электротранспорта. Она состоит из понижающего трехфазного трансформатора (1), выпрямителя (2), системы предохранителей (3) и цепи нагрузки (4).

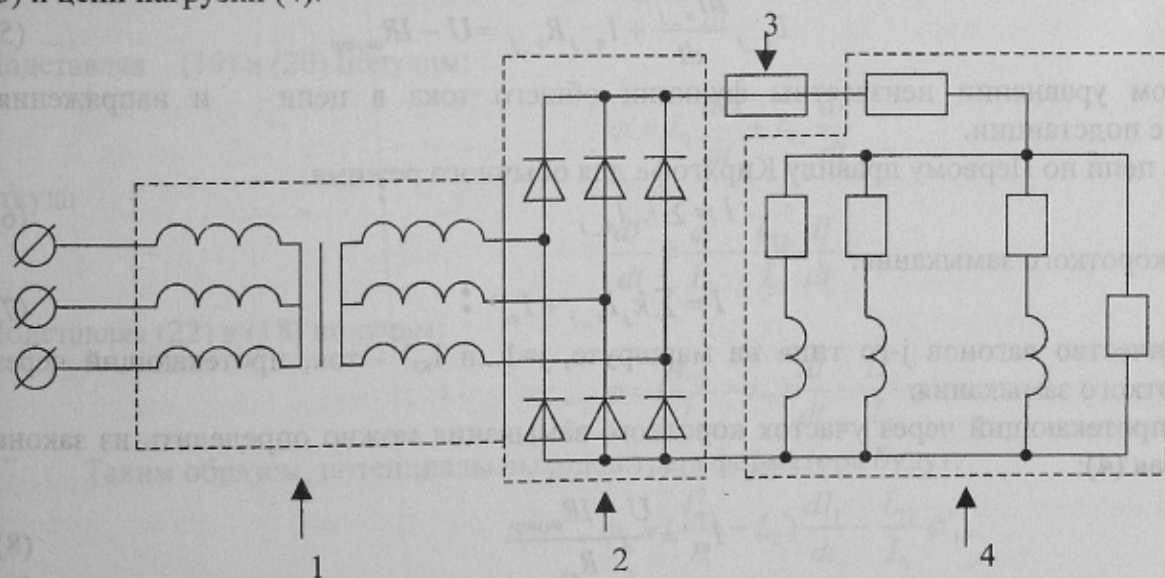


Рисунок 1. Схема питания цепи городского электротранспорта.

Цепь нагрузки включает в себя параллельно соединенные электродвигатели вагонов и последовательно включённые сопротивления троллей, подводящих проводов и внутреннее сопротивление подстанции. Параллельно двигателям вагонов может быть подключено сопротивление (в случае короткого замыкания в цепи).

Пусть  $\varphi_1', \varphi_2', \varphi_3'$ - потенциалы фаз, подаваемых на вход понижающего трансформатора подстанции,  $I_1', I_2', I_3'$ - токи соответствующих фаз;  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ - потенциалы фаз, снимаемых с питающего трансформатора,  $I_1, I_2, I_3$  – токи, снимаемые с соответствующих фаз,  $\varphi_A, \varphi_B$  – потенциалы фаз, снимаемых с положительного и отрицательного выходов выпрямителя,  $U$  – напряжение, отводимое от подстанции,  $U_B$  – напряжение на двигателе вагона,  $I$  – ток, протекающий через предохранители,  $I_{B_j}$  – ток двигателя вагона  $j$ -го типа,  $R_{внутр}$  – сумма внутреннего сопротивления подстанции, сопротивления подводящих проводов и троллей.

Так как в питающих сетях электротранспорта отсутствуют сглаживающие фильтры, то подаваемое в контактную сеть напряжение и ток имеют пульсирующий характер, что оказывает существенное влияние на возникновение токов самоиндукции при коротком замыкании. Исходя из этого, в предлагаемой модели сила тока и напряжение рассматриваются как нестационарные пульсирующие процессы.

Двигатель вагона  $j$ -го типа представляем как последовательно соединенные активное сопротивление  $R_{\sigma_j}$  и индуктивное  $R_{L_{\sigma_j}}$ .

По Второму правилу Кирхгофа напряжение на двигателе вагона:

$$U_{\sigma} = I_{\sigma_j} R_{\sigma_j} - \varepsilon_j \quad (1)$$

где  $\varepsilon_j$  - ЭДС самоиндукции двигателя  $j$  – го вида, которое определяется по правилу Ленца:

$$\varepsilon_j = -L_{\sigma_j} \frac{dI_{\sigma_j}}{dt} \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1) получаем:

$$U_{\sigma} = I_{\sigma_j} R_{\sigma_j} + L_{\sigma_j} \frac{dI_{\sigma_j}}{dt} \quad (3)$$

С другой стороны, из закона Ома, напряжение на двигателе вагона:

$$U_{\sigma} = U - IR_{внутр} \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3) получим дифференциальное уравнение для тока  $j$ -го вагона.

$$L_{\sigma_j} \frac{dI_{\sigma_j}}{dt} + I_{\sigma_j} R_{\sigma_j} = U - IR_{внутр} \quad (5)$$

В этом уравнении неизвестны функции общего тока в цепи и напряжения, снимаемого с подстанции.

Ток в цепи по Первому правилу Кирхгофа для обычного режима:

$$I = \sum k_j I_{\sigma_j} \quad (6)$$

для режима короткого замыкания:

$$I = \sum k_j I_{\sigma_j} + I_{кз}' \quad (7)$$

где  $k_j$  - количество вагонов  $j$ -го типа на маршруте,  $j=1...n$   $I_{кз}'$  - ток, протекающий через участок короткого замыкания.

Ток, протекающий через участок короткого замыкания можно определить из закона Ома, учитывая (4):

$$I_{кз}' = \frac{U - IR_{внутр}}{R_{кз}} \quad (8)$$

Подставляя (8) в (6), получаем алгебраическое уравнение для тока в цепи:

$$I = \sum k_j I_{a-j} + \frac{U - IR_{\text{внутр}}}{R_{\text{кз}}} \quad (9)$$

Решая его, находим ток короткого замыкания:

$$I_{\text{кз}} = \frac{R_{\text{кз}} \sum k_j I_{B-j} + U}{R_{\text{кз}} + R_{\text{внутр}}} \quad (10)$$

Подставляя (10) в (5) получим уравнение для тока вагона в обычном режиме:

$$L_{a-j} \frac{dI_{a-j}}{dt} + I_{a-j} R_{a-j} = U - R_{\text{внутр}} (\sum k_j I_{a-j}) \quad (11)$$

и в режиме короткого замыкания:

$$L_{a-j} \frac{dI_{a-j}}{dt} + I_{a-j} R_{a-j} = U - R_{\text{внутр}} \frac{R_{\text{кз}} \sum k_j I_{B-j} + U}{R_{\text{кз}} + R_{\text{внутр}}} \quad (12)$$

Напряжение, снимаемое с подстанции можно определить как разность потенциалов, снимаемых с выпрямителя:

$$U = \varphi_A - \varphi_B \quad (13)$$

Потенциалы выходов выпрямителя определяются из следующих соображений:

$$\varphi_A = \max\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\} \quad (14)$$

$$\varphi_B = \min\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\} \quad (15)$$

По закону электромагнитной индукции, потенциалы выходов трансформатора:

$$\varphi = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (16)$$

где  $\Phi$  – магнитный поток вторичных обмоток трансформатора, который вычисляется как:

$$\Phi = L_2 I + L_{21} I' \quad (17)$$

где  $I$  – ток вторичной обмотки,  $I'$  – ток первичной обмотки. Подставляя (17) в (16) получим:

$$\varphi = -L_2 \frac{dI}{dt} - L_{21} \frac{dI'}{dt} \quad (18)$$

Ток первичной обмотки можно определить из магнитного потока первичной обмотки:

$$\Phi' = L_1 I' + L_{12} I \quad (19)$$

По закону электромагнитной индукции потенциалы входов трансформатора:

$$\varphi' = \frac{d\Phi'}{dt} \quad (20)$$

Подставляя (19) в (20) получим:

$$\varphi' = L_1 \frac{dI'}{dt} + L_{12} \frac{dI}{dt} \quad (21)$$

откуда

$$\frac{dI'}{dt} = \frac{\varphi'}{L_1} - \frac{L_{12}}{L_1} \frac{dI}{dt} \quad (22)$$

Подставляя (22) в (18) получим:

$$\varphi = \left(\frac{L_{12}^2}{L_1} - L_2\right) \frac{dI}{dt} - \frac{L_{12}}{L_1} \varphi' \quad (23)$$

Таким образом, потенциалы выходов трансформатора будут:

$$\varphi_1 = \left(\frac{L_{12}^2}{L_1} - L_2\right) \frac{dI_1}{dt} - \frac{L_{12}}{L_1} \varphi'_1 \quad (24)$$

$$\varphi_2 = \left( \frac{L_{12}^2}{L_1} - L_2 \right) \frac{dI_2}{dt} - \frac{L_{12}}{L_1} \varphi'_2 \quad (25)$$

$$\varphi_3 = \left( \frac{L_{12}^2}{L_1} - L_2 \right) \frac{dI_3}{dt} - \frac{L_{12}}{L_1} \varphi'_3 \quad (26)$$

Выходные токи трансформатора составят:

$$I_1 = \begin{cases} I, \text{ если } \varphi_A = \varphi_1 \\ -I, \text{ если } \varphi_B = \varphi_1 \\ 0, \text{ иначе} \end{cases} \quad (27)$$

$$I_2 = \begin{cases} I, \text{ если } \varphi_A = \varphi_2 \\ -I, \text{ если } \varphi_B = \varphi_2 \\ 0, \text{ иначе} \end{cases} \quad (28)$$

$$I_3 = \begin{cases} I, \text{ если } \varphi_A = \varphi_3 \\ -I, \text{ если } \varphi_B = \varphi_3 \\ 0, \text{ иначе} \end{cases} \quad (29)$$

Решая полученные системы для нормального режима (10),(12)-(14),(24)-(29), для короткого замыкания (11)-(14),(24)-(29), находим законы изменения потребляемых токов в нормальном режиме и в режиме короткого замыкания.

Затем ищем максимум тока потребления в нормальном режиме ( $I_0$ ) и минимум тока короткого замыкания ( $I_k$ ). Если  $I_0 \leq I_k$ , то ток короткого замыкания превышает максимальный ток потребления, поэтому ток уставки линейного предохранителя

$$I_{уст} = I_k \quad (30)$$

и токовременной защиты не требуется. Если  $I_0 > I_k$ , то максимальный ток потребления превышает ток короткого замыкания, поэтому требуется токовременная защита. Из этого принимаем ток уставки:

$$I_{уст} = I_0 \quad (31)$$

а ток срабатывания токовременной защиты:

$$I_{твз} = I_k \quad (32)$$

При расчете времени уставки токовременной защиты необходимо проверить установившуюся температуру в нормальном режиме, и если она превышает предельную, то необходимо изменить условия расчета.

Подмодель токовременной защиты синтезируется из следующих соображений: пусть температура окружающей среды  $T_0$ , температура отключения  $T_k$ , ток потребления  $I_0$ , ток срабатывания  $I_{твз}$ . Тепловая энергия нагрева участка провода за время  $dt$  по закону Джоуля - Ленца:

$$dQ = I^2 \mu \frac{l}{S} dt \quad (33)$$

где  $\mu$  - удельное сопротивление материала, из которого сделан провод,  $S$  - сечение провода,  $l$  - длина провода. Эта энергия идет на нагрев провода и нагрев воздуха.

Энергия нагрева провода:

$$dQ_1 = cm dT \quad (34)$$

где  $c$  - теплоемкость провода,  $dT$  - изменение температуры провода,  $m$  - масса провода длины  $l$ :

$$m = \rho l S \quad (35)$$

где  $\rho$  - плотность материала провода.

Энергия, отдаваемая в окружающую среду за время  $dt$ :

$$dQ_2 = k(T - T_0)ldt \quad (36)$$

где  $k$  - коэффициент пропорциональности,  $T$  - температура провода.

По Первому началу термодинамики:

$$dQ = dQ_1 + dQ_2 \quad (37)$$

или:

$$I^2 \mu \frac{l}{S} dt = c\rho l S dT + k(T - T_0)ldt \quad (38)$$

Преобразуя его, получим линейное неоднородное дифференциальное уравнение:

$$c\rho S \frac{dT}{dt} + kT = I_0^2 \frac{\mu}{S} + kT_0 \quad T(0) = T_0 \quad (39)$$

Решая (39) находим температуру провода в произвольный момент времени:

$$T = T_0 + I_0^2 \frac{\mu}{kS} (1 - e^{-\frac{k}{c\rho S}t}) \quad (40)$$

Тогда температура провода в установившемся режиме:

$$t \rightarrow +\infty \quad T_{уст} = T(t)_{t \rightarrow +\infty} = I_0^2 \frac{\mu}{kS} + T_0 \quad (41)$$

Откуда максимальный ток нагрузки составит:

$$I_{\max} = \sqrt{(T_{\kappa} - T_0) \frac{kS}{\mu}} \quad (42)$$

Значит, максимальное количество вагонов на участке:

$$n_{\max} = \frac{I_{\max}}{I_{\text{эксн}}} \quad (43)$$

При возникновении короткого замыкания, имеем:

$$c\rho S \frac{dT}{dt} + kT = I_{\text{мез}}^2 \frac{\mu}{S} + kT_0 \quad T(0) = T_{уст} \quad (44)$$

Решая (44), получаем зависимость температуры от времени  $T(t)$ :

$$T(t) = \frac{T_{уст}}{k} - (I_{\text{мез}}^2 - I_0^2) \frac{\mu}{kS} e^{-\frac{k}{c\rho S}t} \quad (45)$$

Время выдержки токовременной защиты, при котором  $T(t) = T_{\kappa}$ :

$$t_{\text{выдержки}} = \frac{c\rho S}{k} \ln \frac{(I_{\text{мез}}^2 - I_0^2) \frac{\mu}{kS}}{\frac{T_{уст}}{k} - T_{\kappa}} \quad (46)$$

Таким образом, в данной работе представлена детальная математическая модель защиты питающей сети городского электротранспорта от коротких замыканий. Численные решения уравнений составляют основу алгоритма и программного комплекса расчёта токов короткого замыкания для инженеров служб электроснабжения городского электротранспорта.

Данная проблема актуальна не только для городского, но и для железнодорожного транспорта, причем в последнем токи потребления гораздо выше, а значит, необходимо максимально точно рассчитывать параметры защиты.