АВТОМАТИЧЕСКАЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПРИ ИХ ОПОЗНАВАНИИ В СИСТЕМАХ ТЕХНИЧЕСКОГО ЗРЕНИЯ РОБОТОВ

Мышко С.В., Шевцов Д.В.
Донецкий национальный университет, математический факультет,
кафедра прикладной математики и теории систем управления
E-mail: dmitri_s@rambler.ru

Abstract
Mishko S.V., Shevtsov D.V. Automatic decomposition of the images at their identification in systems of robots technical vision. *Designing the automatic systems images identification assumes the decision of a segmentation task. The variety of treatments of the term "segmentation" and absence of exact definition of the fragments of images which is necessary to allocate at segmentation has predetermined the introduction of the concept "local-global directions". Considering the images as black-and-white marks as sets of active atomic elements the problem of definition of the said "directions" in terms of properties of coincident representations is actual. The study of the subsets of atomic elements simulating "directions" and the set of criteria for their revealing in marks establishment will allow to carry out automatic decomposition of the images, that substantially will lower ambiguity of segmentation.*

Введение

Проектирование автоматических систем опознавания изображений предполагает решение задачи сегментации [1]. Многообразие трактовок термина «сегментация» и отсутствие точного определения фрагментов изображений, которые необходимо выделить при сегментации, предопределили введение понятия «локально-глобальное направление» [2]. Рассматривая в качестве изображений черно-белые знаки как множества активных атомарных элементов (АЭ) [3], актуальной является проблема определения указанных «направлений» в терминах свойств соответствующих представлений. Изучение подмножеств АЭ, моделирующих «направления», установление критериев их выявления в знаках позволит осуществлять автоматическую декомпозицию изображений, что в значительной степени снизит неопределённость проблемы сегментации.

1. Предварительные сведения

Как следует из [4,5], при моделировании изображений дискретным множеством атомарных элементов (АЭ) $A=\{\alpha_h\}$, где $\alpha_h=\alpha(i_h,j_h)$, $i_h\in[1,I]$, $j_h\in[1,J]$, $h\in[1,H]$, была введена метрика $\rho(\alpha_a,\alpha_b)=|i_a-i_b|+|j_a-j_b|$. Определение связных АЭ (АЭ α_a и α_b называются связными, если $\max\{|i_a-i_b|,|j_a-j_b|\}\le 1$) и детализация типов связок посредством функции

$$\eta(\alpha_a,\alpha_b)=\begin{cases} s_1, \text{ если } i_a=i_b,\ |j_a-j_b|=1; \\ s_2, \text{ если } j_a=j_b,\ |i_a-i_b|=1; \\ s_3, \text{ если } |i_a-i_b|=|j_a-j_b|=1,\ (i_a-i_b)(j_a-j_b)=1; \\ s_4, \text{ если } |i_a-i_b|=|j_a-j_b|=1,\ (i_a-i_b)(j_a-j_b)=-1; \end{cases}$$

(если $\eta(\alpha_a,\alpha_b)=s_m$, то будем говорить, что пара (α_a,α_b) является связкой: при m=1 – горизонтальной, при m=2 –

вертикальной, при m=3 – диагональной первого типа, при m=4 – диагональной второго типа) позволили ввести понятие пути.

Определение 1. Конечное вполне упорядоченное подмножество $L\subset A\times A$, $L=\{(\alpha_h,\alpha_{h+1})_{m_h}\}_{h=1}^{n}$, $m_h\in M$, будем называть путём из α_a в α_b (от α_a к α_b) и обозначать $L(\alpha_a,\alpha_b)$, если:

1) $\alpha_1=\alpha_a$, $\alpha_{n+1}=\alpha_b$;
2) $\forall r\in[2,n]$, α_r имеет ровно два связных АЭ из множества $\{\alpha_h\}_{h=1}^{n+1}\setminus\{\alpha_r\}$;
3) каждый из АЭ α_a, α_b имеет единственный связный АЭ из множества $\{\alpha_h\}_{h=1}^{n+1}\setminus\{\alpha_{n+1}\}$ и $\{\alpha_h\}_{h=1}^{n+1}\setminus\{\alpha_1\}$ соответственно;
4) $\forall h\in[1,n-1]$, $s_{m_h}^{h}=(\alpha_h,\alpha_{h+1})_{m_h}$ и $s_{m_{h+1}}^{h+1}=(\alpha_{h+1},\alpha_{h+2})_{m_{h+1}}$ связны; m_h, $m_{h+1}\in M$.

Заметим, что если $\eta(\alpha_a,\alpha_b)=s_m$, $m\in M=\{1,2,3,4\}$, то записи s_m и $(\alpha_a,\alpha_b)_m$, $m\in M$, будем отождествлять.

В качестве одной из характеристик пути в [4] была предложена мера μ_1.

Определение 2. Мерой μ_1 пути $L_k\in\Im(\alpha_a,\alpha_b)$, $k\in[1,K_0]$, где $\Im(\alpha_a,\alpha_b)$ – множество всевозможных путей из α_a в α_b, будем называть число $\mu_1(L_k)$: $\mu_1(L_k)=\sum_{h=1}^{n_k}\rho_h^k$, где $\rho_h^k=\rho^k(s_m^h)=$ $=\rho((\alpha_h^k,\alpha_{h+1}^k)_m)=\rho(\alpha_h^k,\alpha_{h+1}^k)$, $\alpha_h^k,\alpha_{h+1}^k$ – АЭ, образующие связку $s_m^h\in L_k$, то есть $\eta(\alpha_h^k,\alpha_{h+1}^k)=$ $=s_m^h$, $m\in M$.

Мера μ_1 характеризует «вес» пути, поскольку её численное значение равно сумме «весов» связок, образующих путь. Заметим, что $\mu_1(s_1)=\mu_1(s_2)=1$, $\mu_1(s_3)=\mu_1(s_4)=2$.

Введение меры μ_1 позволило из множества $\Im(\alpha_a,\alpha_b)$ выделить подмножество путей $\Im_1(\alpha_a,\alpha_b)=\{L_k\}$, $k\in K_1\subset[1,K_0]$: $\forall L_k\in\Im_1(\alpha_a,\alpha_b)$ $\mu_1(L_k)=\rho(\alpha_a,\alpha_b)$. Пути $L_k(\alpha_a,\alpha_b)\in\Im_1(\alpha_a,\alpha_b)$, $k\in K_1$, являются существенными для автоматической декомпозиции изображений, поскольку они моделируют локально-глобальные направления, что непосредственно следует из изучения их свойств.

2. Свойства путей из множества $\Im_1(\alpha_a,\alpha_b)$

Пути $L_k(\alpha_a,\alpha_b)\in\Im_1(\alpha_a,\alpha_b)$, $\forall k\in K_1$, обладают тем свойством, которое в пространстве E_2 присуще отрезкам прямых: при выборе произвольной точки отрезка «неравенство треугольника» вырождается в равенство. На множестве АЭ это свойство заключается в том, что для произвольных пути $L_k(\alpha_a,\alpha_b)\in\Im_1(\alpha_a,\alpha_b)$ и выбранного АЭ $\alpha_p\in\Lambda(L_k)$ сумма расстояний от α_a до α_p и от α_p до α_b равна расстоянию от α_a до α_b в выбранной метрике (здесь и далее $\Lambda(L)\subset A$ – множество АЭ, входящих в путь $L(\alpha_a,\alpha_b)$: $\Lambda(L)=\{\alpha_h\}_{h=1}^{n+1}$, $\alpha_1=\alpha_a$, $\alpha_{n+1}=\alpha_b$ и $\alpha_a=\alpha_1\prec\alpha_2\prec\ldots\prec\alpha_n\prec\alpha_{n+1}=\alpha_b$, где соотношение $\alpha_h\prec\alpha_p$ следует понимать как «АЭ α_p следует за α_h» [6]). Данный факт доказывает следующая теорема.

Теорема 1. Для любого $L_k(\alpha_a,\alpha_b)\in\Im_1(\alpha_a,\alpha_b)$, $k\in K_1$, и для любого АЭ $\alpha_p\in\Lambda(L_k)$ такого, что $\alpha_a\prec\alpha_p\prec\alpha_b$, верно

$$\rho(\alpha_a,\alpha_p)+\rho(\alpha_p,\alpha_b)=\rho(\alpha_a,\alpha_b). \tag{1}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный путь $L_k(\alpha_a,\alpha_b)\in\Im_1(\alpha_a,\alpha_b)$, $k\in K_1$, и АЭ $\alpha_p\in\Lambda(L_k)$: $\alpha_a\prec\alpha_p\prec\alpha_b$. Представим путь $L_k(\alpha_a,\alpha_b)$ в виде объединения двух путей [4]: $L_k=L(\alpha_a,\alpha_2)\dot{\cup}L(\alpha_2,\alpha_b)$, где $\alpha_2\in\Lambda(L_k)$, $L(\alpha_2,\alpha_b)$ – очевидно путь согласно определению. Тогда по третьему свойству меры имеем

$$\mu_1(L_k)=\mu_1(L(\alpha_a,\alpha_2))+\mu_1(L(\alpha_2,\alpha_b)). \tag{2}$$

Поскольку путь $L(\alpha_a,\alpha_2)$ состоит из единственной связки, то $\mu_1(L(\alpha_a,\alpha_2))=\rho(\alpha_a,\alpha_2)$, и (2) перепишем в виде

$$\mu_1(L_k)=\rho(\alpha_a,\alpha_2)+\mu_1(L(\alpha_2,\alpha_b)). \quad (3)$$

Пусть $L_k=L(\alpha_a,\alpha_2)\,\dot\cup\, L(\alpha_2,\alpha_3)\,\dot\cup\, L(\alpha_3,\alpha_b)$, $\alpha_3\in\Lambda(L_k)$. Аналогичным образом запишем:

$$\mu_1(L_k)=\mu_1(L(\alpha_a,\alpha_2))+\mu_1(L(\alpha_2,\alpha_3))+\mu_1(L(\alpha_3,\alpha_b))=$$
$$=\rho(\alpha_a,\alpha_2)+\rho(\alpha_2,\alpha_3)+\mu_1(L(\alpha_3,\alpha_b)). \quad (4)$$

Согласно третьему свойству метрики, (4) перепишем в виде

$$\mu_1(L_k)\geq\rho(\alpha_a,\alpha_3)+\mu_1(L(\alpha_3,\alpha_b)). \quad (5)$$

Перебирая все АЭ из $\Lambda(L_k)$, следующие за α_a, до α_p включительно и рассуждая аналогично, получим неравенство

$$\mu_1(L_k)\geq\rho(\alpha_a,\alpha_p)+\mu_1(L(\alpha_p,\alpha_b)). \quad (6)$$

Представим $L_k(\alpha_a,\alpha_b)$ в виде $L_k=L(\alpha_a,\alpha_n)\,\dot\cup\, L(\alpha_n,\alpha_b)$, где $\alpha_n\in\Lambda(L_k)$, $L(\alpha_a,\alpha_n)$ – очевидно путь в силу определения. По третьему свойству меры $\mu_1(L_k)=\mu_1(L(\alpha_a,\alpha_n))+\mu_1(L(\alpha_n,\alpha_b))$. Путь $L(\alpha_n,\alpha_b)$ состоит из единственной связки, поэтому $\mu_1(L(\alpha_a,\alpha_n))+\mu_1(L(\alpha_n,\alpha_b))=\mu_1(L(\alpha_a,\alpha_n))+$ $+\rho(\alpha_n,\alpha_b)$. Аналогично, представив $L_k=L(\alpha_a,\alpha_{n-1})\,\dot\cup\, L(\alpha_{n-1},\alpha_n)\,\dot\cup\, L(\alpha_n,\alpha_b)$, где $\alpha_{n-1}\in\Lambda(L_k)$, запишем

$$\mu_1(L_k)=\mu_1(L(\alpha_a,\alpha_{n-1}))+\mu_1(L(\alpha_{n-1},\alpha_n))+\mu_1(L(\alpha_n,\alpha_b))=$$
$$\mu_1(L(\alpha_a,\alpha_{n-1}))+\rho(\alpha_{n-1},\alpha_n)+\rho(\alpha_n,\alpha_b)\geq\mu_1(L(\alpha_a,\alpha_{n-1}))+\rho(\alpha_{n-1},\alpha_b), \quad (7)$$

откуда следует, что

$$\mu_1(L_k)\geq\mu_1(L(\alpha_a,\alpha_{n-1}))+\rho(\alpha_{n-1},\alpha_b). \quad (8)$$

Осуществив последовательный перебор всех АЭ из $\Lambda(L_k)$, предшествующих α_b, до α_p включительно, в силу приведенных выше рассуждений получим неравенство

$$\mu_1(L_k)\geq\mu_1(L(\alpha_a,\alpha_p))+\rho(\alpha_p,\alpha_b). \quad (9)$$

Сложив (6) и (9), запишем:

$$2\mu_1(L_k)\geq\mu_1(L(\alpha_a,\alpha_p))+\mu_1(L(\alpha_p,\alpha_b))+\rho(\alpha_a,\alpha_p)+\rho(\alpha_p,\alpha_b). \quad (10)$$

Согласно третьему свойству меры

$$\mu_1(L_k)=\mu_1(L(\alpha_a,\alpha_p))+\mu_1(L(\alpha_p,\alpha_b)), \quad (11)$$

поэтому (10) примет вид:

$$\mu_1(L_k)\geq\rho(\alpha_a,\alpha_p)+\rho(\alpha_p,\alpha_b). \quad (12)$$

Поскольку $L_k(\alpha_a,\alpha_b)\in\Im_1(\alpha_a,\alpha_b)$, для него выполнено $\mu_1(L_k)=\rho(\alpha_a,\alpha_b)$, тогда из (12) следует, что

$$\rho(\alpha_a,\alpha_b)\geq\rho(\alpha_a,\alpha_p)+\rho(\alpha_p,\alpha_b). \quad (13)$$

Однако, исходя из третьего свойства метрики, для АЭ α_a, α_p, α_b справедливо

$$\rho(\alpha_a,\alpha_b)\leq\rho(\alpha_a,\alpha_p)+\rho(\alpha_p,\alpha_b). \quad (14)$$

Из (13) и (14) получаем что $\forall L_k(\alpha_a,\alpha_b)\in\Im_1(\alpha_a,\alpha_b)$, $k\in K_1$, $\forall\alpha_p\in\Lambda(L_k)$: $\alpha_a\prec\alpha_p\prec\alpha_b$, выполнено $\rho(\alpha_a,\alpha_b)=\rho(\alpha_a,\alpha_p)+\rho(\alpha_p,\alpha_b)$. Теорема доказана.

Определённое теоремой 1 свойство путей из $\Im_1(\alpha_a,\alpha_b)$ предопределяет возможность их использования при моделировании знаков. В соответствии с этим для автоматической декомпозиции изображений актуальной является проблема определения их конструктивных свойств, решение которой представлено в следующем разделе.

3. Критерий принадлежности пути $L_k(\alpha_a,\alpha_b)$ множеству $\Im_1(\alpha_a,\alpha_b)$

Определим критерий, позволяющий установить следующий факт: принадлежит некоторый путь $L_k(\alpha_a,\alpha_b)\in\Im(\alpha_a,\alpha_b)$, $k\in[1,K_0]$ множеству $\Im_1(\alpha_a,\alpha_b)$ или нет. Предварительно установим некоторые свойства, необходимые для обоснования искомого критерия.

<u>**Лемма 1.**</u> Для любого $L_k(\alpha_a,\alpha_b)\in\Im_1(\alpha_a,\alpha_b)$, $k\in K_1$, и для любого АЭ $\alpha_p\in\Lambda(L_k)$ такого, что $\alpha_a\prec\alpha_p\prec\alpha_b$, верно

$$\mu_1(L(\alpha_a,\alpha_p))=\rho(\alpha_a,\alpha_p),\ \mu_1(L(\alpha_p,\alpha_b))=\rho(\alpha_p,\alpha_b). \quad (15)$$

Доказательство.

Рассмотрим произвольный путь $L_k(\alpha_a,\alpha_b)\in\Im_1(\alpha_a,\alpha_b)$, $k\in K_1$, и выберем АЭ $\alpha_p\in\Lambda(L_k)$: $\alpha_a\prec\alpha_p\prec\alpha_b$. Проводя для L_k и α_p рассуждения, аналогичные приведенным в доказательстве теоремы 1, получим равенства (6) и (9), которые перепишем в виде:

$$\rho(\alpha_a,\alpha_p)\le\mu_1(L_k)-\mu_1(L(\alpha_p,\alpha_b)) \quad (6')$$

$$\rho(\alpha_p,\alpha_b)\le\mu_1(L_k)-\mu_1(L(\alpha_a,\alpha_p)). \quad (9')$$

Согласно третьему свойству меры для L_k и $\alpha_p\in\Lambda(L_k)$ выполнено (11), что даёт возможность заменить правые части (6′) и (9′) на $\mu_1(L(\alpha_a,\alpha_p))$ и $\mu_1(L(\alpha_p,\alpha_b))$ соответственно. Перенеся правые части неравенств (6′) и (9′) в левые, получим:

$$\rho(\alpha_a,\alpha_p)-\mu_1(L(\alpha_a,\alpha_p))\le 0 \quad (6'')$$

$$\rho(\alpha_p,\alpha_b)-\mu_1(L(\alpha_p,\alpha_b))\le 0. \quad (9'')$$

Так как $L_k\in\Im_1(\alpha_a,\alpha_b)$, $\mu_1(L_k)=\rho(\alpha_a,\alpha_b)$, $\alpha_p\in\Lambda(L_k)$, по третьему свойству меры из (11) следует, что

$$\mu_1(L(\alpha_a,\alpha_p))+\mu_1(L(\alpha_p,\alpha_b))=\rho(\alpha_a,\alpha_b), \quad (16)$$

при этом по теореме 1 для $\forall\alpha_p\in\Lambda(L_k)$: $\alpha_a\prec\alpha_p\prec\alpha_b$ выполнено (1). Вычтя из (1) (16), получим:

$$(\rho(\alpha_a,\alpha_p)-\mu_1(L(\alpha_a,\alpha_p)))+(\rho(\alpha_p,\alpha_b)-\mu_1(L(\alpha_p,\alpha_b)))=0. \quad (17)$$

Выражение (17) состоит из двух слагаемых: $\rho(\alpha_a,\alpha_p)-\mu_1(L(\alpha_a,\alpha_p))$ и $\rho(\alpha_p,\alpha_b)-\mu_1(L(\alpha_p,\alpha_b))$, каждое из которых является неположительным в силу (6″) и (9″), поэтому их сумма равна нулю только в том случае, если оба слагаемые равны нулю, то есть если выполнено (15). Лемма доказана.

Леммой 1 показано, что если путь $L_k(\alpha_a,\alpha_b)\in\Im_1(\alpha_a,\alpha_b)$, $k\in K_1$, представлен в виде $L_k=L(\alpha_a,\alpha_p)\vec{\cup}L(\alpha_p,\alpha_b)$, то каждый из путей $L(\alpha_a,\alpha_p)$ и $L(\alpha_p,\alpha_b)$ обладает тем свойством, что его первая мера равна расстоянию между начальным и конечным пунктами пути, то есть $L(\alpha_a,\alpha_p)\in\Im_1(\alpha_a,\alpha_p)$, $L(\alpha_p,\alpha_b)\in\Im_1(\alpha_p,\alpha_b)$.

В качестве следствия из леммы 1 покажем, что если произвольный путь $L_k(\alpha_a,\alpha_b)\in\Im_1(\alpha_a,\alpha_b)$, $k\in K_1$, представлен в виде объединения конечного числа непересекающихся путей, $L_k=\vec{\bigcup}_{u=1}^{U}\tilde{L}_u$, $U>1$, то для каждого из путей $\tilde{L}_u$ его первая мера равна расстоянию между его начальным и конечным пунктами.

Следствие 1. Пусть $L_k(\alpha_a,\alpha_b)\in\Im_1(\alpha_a,\alpha_b)$, $k\in K_1$, представлен в виде $L_k=\vec{\bigcup}_{u=1}^{U}\tilde{L}_u$, $U>1$, где $\tilde{L}_u=\tilde{L}_u(\alpha_{h_u},\alpha_{h_{u+1}})$, $\alpha_{h_u},\alpha_{h_{u+1}}\in\Lambda(L_k)$, $\forall u\in[1,U]$: $\alpha_{h_1}=\alpha_a$, $\alpha_{h_{U+1}}=\alpha_b$ и $\alpha_a=\alpha_{h_1}\prec\alpha_{h_2}\prec\ldots\prec\alpha_{h_U}\prec\alpha_{h_{U+1}}=\alpha_b$; $\tilde{L}_u\cap\tilde{L}_v=\varnothing$, $\forall u\ne v$; $u,v\in[1,U]$ [1]. Тогда

$$\mu_1(\tilde{L}_u(\alpha_{h_u},\alpha_{h_{u+1}}))=\rho(\alpha_{h_u},\alpha_{h_{u+1}}),\ \forall u\in[1,U]. \quad (18)$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный путь $L_k(\alpha_a,\alpha_b)\in\Im_1(\alpha_a,\alpha_b)$, $k\in K_1$, и пусть $L_k=\vec{\bigcup}_{u=1}^{U}\tilde{L}_u$, $U>1$, где $\tilde{L}_u=\tilde{L}_u(\alpha_{h_u},\alpha_{h_{u+1}})$, $\alpha_{h_u},\alpha_{h_{u+1}}\in\Lambda(L_k)$, $\forall u\in[1,U]$: $\alpha_{h_1}=\alpha_a$, $\alpha_{h_{U+1}}=\alpha_b$ и $\alpha_a=\alpha_{h_1}\prec\alpha_{h_2}\prec\ldots\prec\alpha_{h_U}\prec\alpha_{h_{U+1}}=\alpha_b$; $\tilde{L}_u\cap\tilde{L}_v=\varnothing$, $\forall u\ne v$; $u,v\in[1,U]$.

Случай $U=2$ доказан в лемме 1. Положим $U>2$ и рассмотрим пару АЭ $\alpha_{h_u},\alpha_{h_{u+1}}\in\Lambda(L_k)$, $u\in[1,U]$. Представим $L_k(\alpha_a,\alpha_b)$ в виде $L_k=L(\alpha_a,\alpha_{h_{u+1}})\vec{\cup}L(\alpha_{h_{u+1}},\alpha_b)$, где $L(\alpha_a,\alpha_{h_{u+1}})=\vec{\bigcup}_{t=1}^{u}\tilde{L}_t(\alpha_{h_t},\alpha_{h_{t+1}})$, $L(\alpha_{h_{u+1}},\alpha_b)=\vec{\bigcup}_{t=u+1}^{U}\tilde{L}_t(\alpha_{h_t},\alpha_{h_{t+1}})$ (заметим, что при $u=U$ $\alpha_{h_{u+1}}=\alpha_b$,

$L(\alpha_{h_{u+1}},\alpha_b)=L(\alpha_b,\alpha_b)=\varnothing$ и $\mu_1(L(\alpha_{h_{u+1}},\alpha_b))=\rho(\alpha_{h_{u+1}},\alpha_b)=0$). Согласно лемме 1, для $L(\alpha_a,\alpha_{h_{u+1}})$ выполнено $\mu_1(L(\alpha_a,\alpha_{h_{u+1}}))=\rho(\alpha_a,\alpha_{h_{u+1}})$, то есть $L(\alpha_a,\alpha_{h_{u+1}})\in\mathfrak{I}_1(\alpha_a,\alpha_{h_{u+1}})$. Представим $L(\alpha_a,\alpha_{h_{u+1}})$ в виде $L(\alpha_a,\alpha_{h_{u+1}})=L(\alpha_a,\alpha_{h_u})\vec{\cup}L(\alpha_{h_u},\alpha_{h_{u+1}})$, где $L(\alpha_a,\alpha_{h_u})=\vec{\bigcup\limits_{t=1}^{u-1}}\tilde{L}_t(\alpha_{h_t},\alpha_{h_{t+1}})$. Тогда по лемме 1, поскольку $L(\alpha_a,\alpha_{h_{u+1}})\in\mathfrak{I}_1(\alpha_a,\alpha_{h_{u+1}})$ и $\alpha_{h_u}\in\Lambda(L(\alpha_a,\alpha_{h_{u+1}}))\subset\Lambda(L_k)$, имеем $\mu_1(L(\alpha_{h_u},\alpha_{h_{u+1}}))=\rho(\alpha_{h_u},\alpha_{h_{u+1}})$ $\forall u\in[1,U]$, что и требовалось показать.

Сформулируем критерий, позволяющий установить, принадлежит ли произвольный путь $L_k\in\mathfrak{I}(\alpha_a,\alpha_b)$ множеству $\mathfrak{I}_1(\alpha_a,\alpha_b)$ или нет.

При обосновании критерия важно будет знать, сколько связок каждого из типов s_m, $m\in M$, образуют путь $L_k\in\mathfrak{I}(\alpha_a,\alpha_b)$, $k\in[1,K_0]$. Определим на множестве $\mathfrak{I}$ отображение σ, которое всякому пути $L_k\in\mathfrak{I}(\alpha_a,\alpha_b)$, $k\in[1,K_0]$, ставит в соответствие четвёрку $\{d_1^k,d_2^k,d_3^k,d_4^k\}$, где d_m^k – количество связок s_m в пути L_k, $m\in M$:

$$\sigma{:}L_k\rightarrow\{d_1^k,d_2^k,d_3^k,d_4^k\}. \tag{19}$$

<u>Теорема 2.</u> Для того, чтобы путь $L_k\in\mathfrak{I}(\alpha_a,\alpha_b)$, $k\in[1,K_0]$: $\sigma(L_k)=\{d_1^k,d_2^k,d_3^k,d_4^k\}$, принадлежал множеству $\mathfrak{I}_1(\alpha_a,\alpha_b)$, необходимо и достаточно, чтобы $d_3^k\cdot d_4^k=0$, то есть чтобы он не содержал в себе диагональных связок двух типов одновременно.

Доказательство.

Необходимость. Пусть $L_k\in\mathfrak{I}_1(\alpha_a,\alpha_b)$, $k\in K_1$: $\sigma(L_k)=\{d_1^k,d_2^k,d_3^k,d_4^k\}$. Требуется показать, что $d_3^k\cdot d_4^k=0$.

Предположим противное: $d_3^k\neq0$, $d_4^k\neq0$. Представим путь $L_k(\alpha_a,\alpha_b)$ в виде $L_k=L(\alpha_a,\alpha_p)\vec{\cup}L(\alpha_p,\alpha_b)$, выбрав АЭ $\alpha_p\in\Lambda(L_k(\alpha_a,\alpha_b))$, $\alpha_a\prec\alpha_p\prec\alpha_b$, так, чтобы для пути $L(\alpha_a,\alpha_p)$ выполнялись условия:

а) $L(\alpha_a,\alpha_p)=L(\alpha_a,\alpha_{p-1})\vec{\cup}L(\alpha_{p-1},\alpha_p)$, $\alpha_{p-1}\in\Lambda(L(\alpha_a,\alpha_p))\subset\Lambda(L_k)$;

б) $L(\alpha_a,\alpha_{p-1})$ содержит диагональные связки только одного типа s_{m_1}, $m_1\in M$, то есть $\sigma(L(\alpha_a,\alpha_{p-1}))=\{\tilde{d}_1,\tilde{d}_2,\tilde{d}_3,\tilde{d}_4\}$, $\tilde{d}_3\cdot\tilde{d}_4=0$;

в) путь $L(\alpha_{p-1},\alpha_p)$ состоит из единственной диагональной связки, причём $\eta(\alpha_{p-1},\alpha_p)=$ $=s_{m_2}$, $m_2\neq m_1$.

Поскольку $d_3^k\neq0$, $d_4^k\neq0$, такой выбор АЭ $\alpha_p\in\Lambda(L_k)$ всегда возможен.

Согласно лемме 1 для путей $L(\alpha_a,\alpha_p)$, $L(\alpha_a,\alpha_{p-1})$ верно:

$$\mu_1(L(\alpha_a,\alpha_p))=\rho(\alpha_a,\alpha_p), \tag{20}$$

$$\mu_1(L(\alpha_a,\alpha_{p-1}))=\rho(\alpha_a,\alpha_{p-1}). \tag{21}$$

По определению меры μ_1, поскольку $L(\alpha_a,\alpha_{p-1})$ содержит диагональные связки только одного типа, $\mu_1(L(\alpha_a,\alpha_{p-1}))=\tilde{d}_1+\tilde{d}_2+2\tilde{d}_3$, или $\mu_1(L(\alpha_a,\alpha_{p-1}))=\tilde{d}_1+\tilde{d}_2+2\tilde{d}_4$, и её значение не зависит от типа диагональных связок в $L(\alpha_a,\alpha_{p-1})$, поэтому не ограничивая общности рассуждений рассмотрим случай, когда $\tilde{d}_3\neq0$, $\tilde{d}_4=0$, то есть $m_1=3$, тогда $m_2=4$.

Наличие по крайней мере одной связки типа s_3 в пути $L(\alpha_a,\alpha_{p-1})$ в силу её определения гарантирует либо одновременное увеличение обоих индексов АЭ α_a, либо их одновременное уменьшение, откуда следует либо: а) $i_a<i_{p-1}$, $j_a<j_{p-1}$; либо: б) $i_a>i_{p-1}$, $j_a>j_{p-1}$, где (i_a,j_a), (i_{p-1},j_{p-1}) – индексы АЭ α_a, α_{p-1} соответственно. Поскольку $\eta(\alpha_{p-1},\alpha_p)=s_4$, из определения связки s_4 следует, что либо $i_p=i_{p-1}-1$, $j_p=j_{p-1}+1$, либо $i_p=i_{p-1}+1$, $j_p=j_{p-1}-1$, причём, так как связка типа s_4 в пути $L(\alpha_a,\alpha_p)$ единственная, в случае а) возможны два варианта: $i_a<i_p$, $j_a\leq j_p$, или $i_a\leq i_p$, $j_a<j_p$; аналогично, в случае б): $i_a>i_p$, $j_a\geq j_p$, или $i_a\geq i_p$, $j_a>j_p$, где (i_a,j_a), (i_p,j_p) – индексы АЭ α_a, α_p соответственно.

Отсюда, в случае а): $\rho(\alpha_a,\alpha_{p-1})=i_{p-1}-i_a+j_{p-1}-j_a=(i_p+1)-i_a+(j_p-1)-j_a=i_p+1-i_a+j_p-1-j_a=i_p-i_a+j_p-j_a=$ $=\rho(\alpha_a,\alpha_p)$, либо $\rho(\alpha_a,\alpha_{p-1})=i_{p-1}-i_a+j_{p-1}-j_a=(i_p-1)-i_a+(j_p+1)-j_a=i_p-1-i_a+j_p+1-j_a=i_p-i_a+j_p-j_a=\rho(\alpha_a,\alpha_p)$. В случае б): $\rho(\alpha_a,\alpha_{p-1})=i_a-i_{p-1}+j_a-j_{p-1}=i_a-(i_p+1)+j_a-(j_p-1)=i_a-i_p-1+j_a-j_p+1=i_a-i_p+j_a-j_p=\rho(\alpha_a,\alpha_p)$, либо $\rho(\alpha_a,\alpha_{p-1})=i_a-i_{p-1}+j_a-j_{p-1}=i_a-(i_p-1)+j_a-(j_p+1)=i_a-i_p+1+j_a-j_p-1=i_a-i_p+j_a-j_p=\rho(\alpha_a,\alpha_p)$. Таким образом, запишем:

$$\rho(\alpha_a,\alpha_{p-1})=\rho(\alpha_a,\alpha_p). \tag{22}$$

Согласно третьему свойству меры

$$\mu_1(L(\alpha_a,\alpha_p))=\mu_1(L(\alpha_a,\alpha_{p-1}))+\mu_1(L(\alpha_{p-1},\alpha_p))=\mu_1(L(\alpha_a,\alpha_{p-1}))+2. \tag{23}$$

С учётом (21) формула (23) примет вид $\mu_1(L(\alpha_a,\alpha_p))=\rho(\alpha_a,\alpha_{p-1})+2$, откуда, согласно (22), $\mu_1(L(\alpha_a,\alpha_p))=\rho(\alpha_a,\alpha_p)+2$, что противоречит (20).

Полученное противоречие свидетельствует о том, что сделанное предположение неверно, следовательно, если путь $L_k\in\Im_1(\alpha_a,\alpha_b)$, $k\in K_1$, он содержит диагональные связки только одного типа.

Для $m_1=4$, $m_2=3$ доказательство проводится аналогично.

Достаточность. Пусть для пути $L_k(\alpha_a,\alpha_b)\in\Im(\alpha_a,\alpha_b)$, $k\in[1,K_0]$: $\sigma(L_k)=\{d_1^k,d_2^k,d_3^k,d_4^k\}$ выполнено $d_3^k\cdot d_4^k=0$. Требуется показать, что $L_k\in\Im_1(\alpha_a,\alpha_b)$.

Если $d_3^k=d_4^k=0$, доказательство очевидно, поскольку такой путь состоит из недиагональных связок только одного типа (s_1 либо s_2), так как в противном случае для него нарушается второе или третье условие из определения пути. При связках типа s_1 мера μ_1 пути $L_k(\alpha_a,\alpha_b)$ равна сумме мер μ_1 всех горизонтальных связок в нём: $\mu_1(L_k(\alpha_a,\alpha_b))=|j_a-j_b|=$ $=\rho(\alpha_a,\alpha_b)$. Аналогично, при связках типа s_2 мера равна сумме мер всех вертикальных связок: $\mu_1(L_k(\alpha_a,\alpha_b))=|i_a-i_b|=\rho(\alpha_a,\alpha_b)$.

Пусть $d_3^k\cdot d_4^k=0$, $d_3^k\neq d_4^k$.

При $d_1^k=0$ и $d_2^k=0$ путь $L_k(\alpha_a,\alpha_b)$ состоит только из диагональных связок, поэтому $|i_a-i_b|=|j_a-j_b|=d_3^k+d_4^k$ (здесь либо $d_3^k=0$, либо $d_4^k=0$). Отсюда, с учётом определения меры μ_1 и диагональных связок $\mu_1(L_k)=2(d_3^k+d_4^k)=|i_a-i_b|+|j_a-j_b|=\rho(\alpha_a,\alpha_b)$.

Рассмотрим случай, когда для пути $L_k(\alpha_a,\alpha_b)$ выполнено $d_3^k\cdot d_4^k=0$, $d_3^k\neq d_4^k$, $d_3^k+d_4^k=1$, то есть он содержит всего одну диагональную связку.

Если путь L_k содержит недиагональные связки только одного типа (s_1 либо s_2), в случае связок s_1 сумма мер μ_1 всех горизонтальных связок равна $|j_a-j_b|-1$. Пусть диагональную связку в L_k образуют АЭ $\alpha(i_a,j_h),\alpha(i_b,j_{h+1})\in\Lambda(L_k)$, тогда её мера μ_1 равна $|i_a-i_b|+|j_h-j_{h+1}|$, при этом $|i_a-i_b|=|j_h-j_{h+1}|=1$. Мера μ_1 пути L_k равна сумме мер всех связок, его составляющих, следовательно, $\mu_1(L_k)=|j_a-j_b|-1+|i_a-i_b|+|j_h-j_{h+1}|=|j_a-j_b|-1+|i_a-i_b|+1=|i_a-i_b|+|j_a-j_b|=\rho(\alpha_a,\alpha_b)$. В случае связок типа s_2 доказательство проводится аналогично.

Если в пути L_k содержатся недиагональные связки обоих типов и единственная диагональная связка, мера μ_1 всех горизонтальных связок в нём равна $|j_a-j_b|-1$, всех вертикальных – $|i_a-i_b|-1$, мера μ_1 диагональной связки равна 2. Отсюда $\mu_1(L_k)=|i_a-i_b|-1+|j_a-j_b|-1+$ $+2=|i_a-i_b|+|j_a-j_b|=\rho(\alpha_a,\alpha_b)$.

Рассмотрим теперь случай, когда для $L_k(\alpha_a,\alpha_b)$ $d_3^k\cdot d_4^k=0$, $d_3^k\neq d_4^k$, $d_3^k+d_4^k>1$, то есть $L_k(\alpha_a,\alpha_b)$ содержит более одной диагональной связки. Представим L_k в виде $L_k=L(\alpha_a,\alpha_p)\,\dot{\cup}\,L(\alpha_p,\alpha_b)$, выбрав АЭ $\alpha_p\in\Lambda(L_k)$, $\alpha_a\prec\alpha_p\prec\alpha_b$, так, чтобы путь $L(\alpha_a,\alpha_p)$ содержал единственную диагональную связку типа s_{m_1}, $m_1\in M$, при наибольшем количестве связок, входящих в него. Как следует из приведенных выше рассуждений, $\mu_1(L(\alpha_a,\alpha_p))=\rho(\alpha_a,\alpha_p)$.

АЭ α_p выбран таким образом, что $\eta(\alpha_p,\alpha_{p+1})=s_{m_1}$, где $\alpha_{p+1}\in\Lambda(L_k)$, то есть связка (α_p,α_{p+1}) является диагональной того же типа, что и диагональная связка в $L(\alpha_a,\alpha_p)$.

Рассмотрим путь $L(\alpha_a,\alpha_{p+1})=L(\alpha_a,\alpha_p)\cup L(\alpha_p,\alpha_{p+1})$. По третьему свойству меры $\mu_1(L(\alpha_a,\alpha_{p+1}))=\mu_1(L(\alpha_a,\alpha_p))+\mu_1(L(\alpha_p,\alpha_{p+1}))=\mu_1(L(\alpha_a,\alpha_p))+2$. При этом $\rho(\alpha_a,\alpha_{p+1})=\rho(\alpha_a,\alpha_p)+2$, так как при сохранении типа диагональной связки осуществляется «переход» из α_p в α_{p+1} с изменением индексов, присущим диагональным связкам одного типа. Отсюда $\mu_1(L(\alpha_a,\alpha_{p+1}))=\rho(\alpha_a,\alpha_{p+1})$.

Если $\alpha_{p+1}=\alpha_b$, теорема доказана. В противном случае рассмотрим путь $L(\alpha_a,\alpha_{p+2})=L(\alpha_a,\alpha_{p+1})\cup L(\alpha_{p+1},\alpha_{p+2})$, $\alpha_{p+2}\in\Lambda(L_k)$. Связка $(\alpha_{p+1},\alpha_{p+2})$ является либо недиагональной, либо диагональной типа s_{m_1}, из чего следует, что $\mu_1(L(\alpha_a,\alpha_{p+2}))=\rho(\alpha_a,\alpha_{p+2})$, поскольку $\mu_1(L(\alpha_a,\alpha_{p+2}))=\mu_1(L(\alpha_a,\alpha_{p+1}))+1$, $\rho(\alpha_a,\alpha_{p+2})=\rho(\alpha_a,\alpha_{p+1})+1$, если $(\alpha_{p+1},\alpha_{p+2})$ является горизонтальной или вертикальной, или $\mu_1(L(\alpha_a,\alpha_{p+2}))=\mu_1(L(\alpha_a,\alpha_{p+1}))+2$, $\rho(\alpha_a,\alpha_{p+2})=\rho(\alpha_a,\alpha_{p+1})+$ $+2$, если $(\alpha_{p+1},\alpha_{p+2})$ является диагональной. В случае $\alpha_{p+2}=\alpha_b$, теорема доказана.

Если $\alpha_{p+2}\neq\alpha_b$, перебирая все АЭ $\alpha_{p+t}\in\Lambda(L_k)$, t=3,4,…, следующие за α_p, до α_b включительно, и рассуждая аналогичным образом, получим $\mu_1(L(\alpha_a,\alpha_b))=\rho(\alpha_a,\alpha_b)$, то есть $L_k\in\mathfrak{I}_1(\alpha_a,\alpha_b)$.

Теорема доказана.

Как следует из доказанной теоремы, относительно любого выявленного на знаке пути, проверив исключительно связки, его составляющие, возможно заключить, принадлежит ли он множеству $\mathfrak{I}_1$ или нет. Более того, в пути не из $\mathfrak{I}_1$ возможно выявить с помощью установленного критерия пути из $\mathfrak{I}_1$, а, следовательно, и локально-глобальные направления движения.

4. Заключение

Представленные результаты позволили разработать систему автоматической декомпозиции изображений (САДИ) на пути из $\mathfrak{I}_1$, которые моделируют локально-глобальные направления движения, осуществляемые при начертании знаков. Практическое использование САДИ позволило снять неопределённость сегментации изображений и моделировать знаки без априорного назначения множества примитивов.

Литература

1. Хорн Б.К.П. Зрение роботов. – М.: Наука, 1989.
2. Григорьев С.В., Мышко С.В., Шевцов Д.В., Шевчук Е.В. Метод формирования концепта знака. //Праці наукової конференції Донецького національного університету за підсумками науково-дослідної роботи за період 1999-2000 рр. (секція фізичних і комп’ютерних наук). – Донецьк, ДонНУ, 2001. С. 99-103.
3. Мышко С.В., Шевцов Д.В., Шевчук Е.В. Моделирование знаков элементарными стратегиями. //«Вычислительная техника в информационных и управляющих системах». Сборник докладов международной научно-практической конференции. – Мариуполь, ПГТУ, 2000. С. 79-80.
4. Мышко С.В., Шевцов Д.В. Конструктивное определение прямой в терминах свойств множеств атомарных элементов. //Праці наукової конференції Донецького національного університету за підсумками науково-дослідної роботи за період 1999-2000 рр. (секція фізичних і комп’ютерних наук). – Донецьк, ДонНУ, 2001. С. 99-103.
5. Мышко С.В., Шевцов Д.В. Определение прямой на множестве атомарных элементов. //«Оптоэлектронные информационно-энергетические технологии». Сборник тезисов докладов международной научно-технической конференции. – Винница: ВГТУ, 2001. С. 49.
6. Кириллов А.А. Элементы теории представлений. – М.: Наука, 1979.