

3. Получены соотношения для определения оценок погрешностей измерения границ динамического диапазона измерительного канала системы высокочастотной вибродиагностики.

Список источников

1. International standard ISO 5347-3(E):1993. Methods for calibration of vibration and shock pick – ups. – Part 3: Secondary vibration calibration. – 7p
2. Серридж М., Лихт Т.Р. Справочник по пьезоэлектрическим акселерометрам и преусилителям. Изд – во «Ларсен и сын», Глоstrup, Дания. 1987, 187 с.
3. Лихт Т.Р., Андерсен Х. Тенденции в градуировке акселерометров. (Пер. с англ.) Технический обзор №2, 1987. Брюль и Кьер. Нерум. Дания. - С. 23 – 42.
4. Воронцов А.Г. Исследование влияния нелинейности фильтра основной селекции на уровень помех в измерительном канале системы вибродиагностики. // Вестник Восточнoукраинского национального университета. – 2002. - № 1, С 260 – 267.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ШАРНИРНЫХ УГЛОВ ПОВОРОТА ЗВЕНЬЕВ НОГИ ШАГАЮЩЕГО АППАРАТА НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Рафиков Г.Ш., Хорхордин А.В., Анимица Н.

Донецкий национальный технический университет, каф. АТ

В работе рассматривается обратная задача кинематики ноги шагающего аппарата с тремя степенями свободы. Команды управления ногой аппарата, оснащенной микро ЭВМ обычно формируются в пространстве шарнирных углов, а координаты перемещения аппарата задаются в некоторой абсолютной системе координат. Управление положением и ориентацией ступни ноги аппарата следует осуществлять таким образом, чтобы производить необходимые операции по управлению ногой в соответствии с заданной походкой. Для этого необходимо решать обратную задачу кинематики. Другими словами, необходимо по заданным координатам положения ноги аппарата и известным параметрам ее звеньев определять шарнирные углы - α_1 α_2 α_3 , обеспечивающие заданное положение ступни.

Существуют различные методы решения обратной задачи кинематики ноги шагающего аппарата

В работе [1] получено решение обратной задачи кинематики для произвольного 3-х звенника. Недостатком этого подхода является то, что из него не следует, каким образом выбрать из нескольких суще-

ствуючих рішень одно, соответствующее данной конфигурации ноги. В этом вопросе исследователю приходится полагаться на собственную интуицию. Авторами работы [2] предложен метод итеративной процедуры решения обратной задачи кинематики большинства промышленных и мобильных роботов. Такой подход требует больших вычислительных затрат и не гарантирует сходимости результатов, особенно для вырожденного случая. Кроме того, как и метод обратных преобразований, метод итераций не дает способа выбора из нескольких существующих решений одного, соответствующего данной конфигурации ноги.

В данной работе рассмотрим решение обратной кинематической задачи методом обратных преобразований на основании использования тригонометрических формул и формул приведения. Для решения этой задачи обратимся к вектору $\bar{P}^{T(i)}$ положения ступни i -ой ноги, определяемому выражением:

$$\bar{P}^{T(i)} = (x_1 \ x_2 \ x_3) = (0.2 \ 0.3 \ 0.12), \quad (1)$$

где “т” – символ транспонирования;

x_1 – компонента вектора $\bar{P}^{T(i)}$ по оси абсцисс;

x_2 – компонента вектора $\bar{P}^{T(i)}$ по оси ординат;

x_3 – компонента вектора $\bar{P}^{T(i)}$ по оси аппликат;

Причем указанные оси образуют прямоугольную декартову систему координат ноги шагающего аппарата (рис. 1).

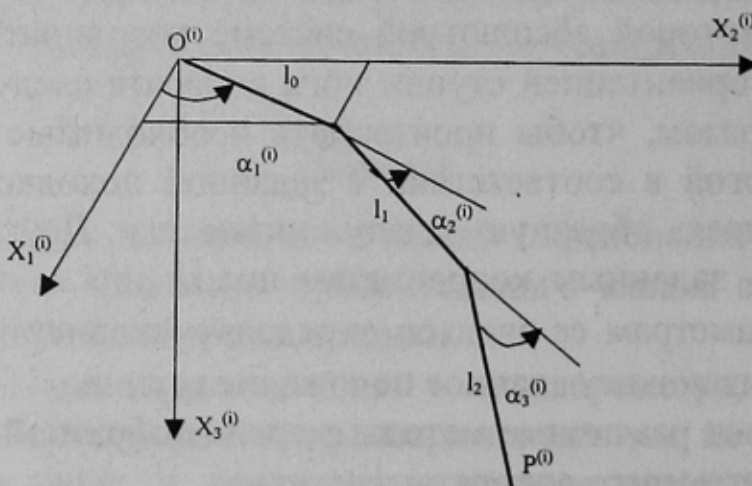


Рисунок 1 - Система декартовых координат ноги шагающего аппарата

Компоненты вектора $\bar{P}^{T(i)}$ определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned}x_1 &= [l_0 + l_1 \cos(\alpha_2) + l_2 \cos(\alpha_2 + \alpha_3)] \cos(\alpha_1); \\x_2 &= [l_0 + l_1 \cos(\alpha_2) + l_2 \cos(\alpha_2 + \alpha_3)] \sin(\alpha_1); \\x_3 &= l_1 \sin(\alpha_2) + l_2 \sin(\alpha_2 + \alpha_3),\end{aligned}\quad (2)$$

где $l_0 = 7,5\text{см}$; $l_1 = 13\text{см}$; $l_2 = 20\text{см}$.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – углы поворота кинематических звеньев ноги;

l_0, l_1, l_2 – длины соответствующих звеньев ноги.

Вначале определим угол α_1 . Для этого разделим второе уравнение системы (2) на первое, в результате получим:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{\sin(\alpha_1)}{\cos(\alpha_1)} = \text{tg}(\alpha_1); \quad \alpha_1 = \text{arctg}\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = \text{arctg}\left(\frac{0.3}{0.2}\right) = 56.31^\circ. \quad (3)$$

Далее вычислим угол α_3 . С этой целью выполним ряд алгебраических и тригонометрических преобразований [3, 4] в первых двух уравнениях системы (2). Разделим обе части первого уравнения на $\cos \alpha_1$ а второго – на $\sin \alpha_1$. Тогда эти уравнения можно представить в следующем виде:

$$\frac{x_1}{\cos \alpha_1} = l_0 + l_1 \cos \alpha_2 + l_2 \cos(\alpha_2 + \alpha_3), \quad (4)$$

$$\frac{x_2}{\sin \alpha_1} = l_0 + l_1 \cos \alpha_2 + l_2 \cos(\alpha_2 + \alpha_3).$$

В полученных уравнениях системы (4) перенесем постоянный параметр l_0 в левую часть, в результате этого уравнения указанной системы примут вид:

$$\frac{x_1}{\cos \alpha_1} - l_0 = l_1 \cos \alpha_2 + l_2 \cos(\alpha_2 + \alpha_3), \quad (5)$$

$$\frac{x_2}{\sin \alpha_1} - l_0 = l_1 \cos \alpha_2 + l_2 \cos(\alpha_2 + \alpha_3). \quad (6)$$

К полученным уравнениям (5) и (6) добавим третье уравнение системы (2)

$$x_3 = l_1 \sin \alpha_2 + l_2 \sin(\alpha_2 + \alpha_3). \quad (7)$$

Для упрощения последующих выкладок введем обозначения:

$$P_x = \frac{x_1}{\cos \alpha_1} - l_0 = \frac{0.2}{\cos(56.31)} - 0.075 = 0.2856; \quad (8)$$

$$P_y = \frac{x_2}{\sin \alpha_1} - l_0 = \frac{0.3}{\sin(56.31)} - 0.075 = 0.2856; \quad P_z = x_3 = 0.12.$$

С учетом введенных обозначений (8) уравнения (5), (6) и (7) запишутся в виде:

$$P_x = l_1 \cos \alpha_2 + l_2 \cos(\alpha_2 + \alpha_3), \quad (9)$$

$$P_y = l_1 \cos \alpha_2 + l_2 \cos(\alpha_2 + \alpha_3), \quad (10)$$

$$P_z = l_1 \sin \alpha_2 + l_2 \sin(\alpha_2 + \alpha_3). \quad (11)$$

После возведения в квадрат левых и правых частей уравнений (9) и (11) получим:

$$P_x^2 = l_1^2 \cos^2 \alpha_2 + l_2^2 \cos^2(\alpha_2 + \alpha_3) + 2l_1 l_2 \cos \alpha_2 \cdot \cos(\alpha_2 + \alpha_3), \quad (12)$$

$$P_z^2 = l_1^2 \sin^2 \alpha_2 + l_2^2 \sin^2(\alpha_2 + \alpha_3) + 2l_1 l_2 \sin \alpha_2 \cdot \sin(\alpha_2 + \alpha_3). \quad (13)$$

Выполняя операцию сложения левых и правых частей уравнений (12) и (13), получим следующее выражение

$$P_x^2 + P_z^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cdot [\cos(\alpha_2 + \alpha_3) \cdot \cos \alpha_2 + \sin(\alpha_2 + \alpha_3) \cdot \sin \alpha_2] \quad (14)$$

В результате выполнения несложных тригонометрических преобразований с использованием тригонометрической формулы [5] $\cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B = \cos(A - B)$

получим

$$P_x^2 + P_z^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos \alpha_3. \quad (15)$$

Перенесем квадраты известных параметров l_1, l_2 в левую часть уравнения (15), после чего разделим левую и правую часть этого уравнения на $2l_1 l_2$, в результате будем иметь

$$\frac{P_x^2 + P_z^2 - (l_1^2 + l_2^2)}{2l_1 l_2} = \cos \alpha_3. \quad (16)$$

Анализируя полученное уравнение, нетрудно видеть, что в левой части этого уравнения содержатся известные величины:

$$P_x = \frac{x_1}{\cos \alpha_1} - l_3 = 0.2856; \quad P_z = x_3 = 0.12; \quad l_1 = 0.13, \quad l_2 = 0.2;$$

а в правой части имеем неизвестную величину $\cos\alpha_3$, которую определим через известные величины. Из уравнения (16) находим α_3 :

$$\alpha_3 = \arccos \left[\frac{P_x^2 + P_z^2 - (l_1^2 + l_2^2)}{2l_1l_2} \right]. \quad (17)$$

Решение с помощью функции $\arccos(\cdot)$ (арккосинуса) в данном случае приемлемо, т. к. легко показать, что аргумент $\arccos(\cdot)$ в выражении (17) не превосходит ± 1 . А вообще говоря, решения с использованием функции $\arctg(\cdot)$ (арктангенса) предпочтительнее [3, 4], так как в этом случае аргумент охватывает всю область от $-\infty$ до $+\infty$. Поэтому выразим угол α_3 через функцию $\arctg(\cdot)$. Для этого запишем выражение для $\sin\alpha_3$, используя тригонометрическую формулу

$$\sin\alpha_3 = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha_3}, \quad (18)$$

$$\sin\alpha_3 = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{P_x^2 + P_z^2 - (l_1^2 + l_2^2)}{2l_1l_2} \right)^2}. \quad (19)$$

После выполнения операции деления левых и правых частей уравнения (19) на уравнение (16) получим

$$\operatorname{tg}\alpha_3 = \frac{\pm\sqrt{4l_1^2l_2^2 - [P_x^2 + P_z^2 - (l_1^2 + l_2^2)]^2}}{P_x^2 + P_z^2 - l_1^2 - l_2^2}, \quad (20)$$

откуда выразим угол α_3 через функцию арктангенса:

$$\alpha_3 = \operatorname{arctg} \left[\frac{\pm\sqrt{4l_1^2l_2^2 - [P_x^2 + P_z^2 - (l_1^2 + l_2^2)]^2}}{P_x^2 + P_z^2 - (l_1^2 + l_2^2)} \right]. \quad (21)$$

Проанализируем область определения функции $\operatorname{arctg}(\cdot)$. Во-первых потребуем, чтобы детерминант подкоренного выражения был положительным, т.е., чтобы выполнялось соотношение

$$4l_1^2l_2^2 > [P_x^2 + P_z^2 - (l_1^2 + l_2^2)]^2. \quad (22)$$

Для упрощения анализа выражения (21) введем обозначения:

$$\begin{aligned}
 Y^* &= \pm \sqrt{4l_1^2 l_2^2 - [P_x^2 + P_z^2 - (l_1^2 + l_2^2)]^2} = \\
 &= \sqrt{4 \cdot 0.13^2 \cdot 0.2^2 - [0.2856^2 + 0.12^2 - (0.13^2 + 0.2^2)]^2} = 0.0343 \\
 X^* &= P_x^2 + P_z^2 - (l_1^2 + l_2^2) = 0.2856^2 + 0.12^2 - (0.13^2 + 0.2^2) = 0.039,
 \end{aligned}$$

тогда

$$\alpha_3 = \arctg\left(\frac{Y^*}{X^*}\right) = \arctg\left(\frac{0.0343}{0.039}\right) = 41.34^0. \quad (23)$$

Область определения этой функции запишется в следующем виде:

$$\alpha_3 = \arctg\left(\frac{Y^*}{X^*}\right) \begin{cases} 0^0 \leq \alpha_3 \leq 90^0, \text{ если } X^* > 0, Y^* > 0; \\ -90^0 \leq \alpha_3 \leq 0^0, \text{ если } X^* > 0, Y^* < 0. \end{cases} \quad (24)$$

Переходим к вычислению угла α_2 .

Для вычисления этого угла воспользуемся уравнениями (9) и (11). Умножим левую и правую часть уравнения (9) на $\cos \alpha_2$, а уравнения (11) – на $\sin \alpha_2$, в результате такого умножения получим следующие уравнения:

$$P_x \cdot \cos \alpha_2 = l_1 \cos^2 \alpha_2 + l_2 \cos(\alpha_2 + \alpha_3) \cdot \cos \alpha_2; \quad (25)$$

$$P_z \cdot \sin \alpha_2 = l_1 \sin^2 \alpha_2 + l_2 \sin(\alpha_2 + \alpha_3) \cdot \sin \alpha_2. \quad (26)$$

Выполним операцию сложения левых и правых частей выражений (25) и (26), в результате получим

$$\begin{aligned}
 &P_x \cdot \cos \alpha_2 + P_z \cdot \sin \alpha_2 = \\
 &= l_1 + l_2 [\cos(\alpha_2 + \alpha_3) \cdot \cos \alpha_2 + \sin(\alpha_2 + \alpha_3) \cdot \sin \alpha_2] \quad (27)
 \end{aligned}$$

Применив к правой части выражения (27) простое тригонометрическое преобразование вида

$$\cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B = \cos(A - B),$$

придем к уравнению

$$P_x \cos \alpha_2 + P_z \sin \alpha_2 = l_1 + l_2 \cos \alpha_3. \quad (28)$$

В полученном уравнении величины в правой части известны (l_1 , l_2 , $\cos \alpha_3$), а в левой части величины $\cos \alpha_2$ и $\sin \alpha_2$ – неизвестны. По-

этому для вычисления угла α_2 применим к левой части уравнения (28) формулы тригонометрических преобразований [4]:

$$1) p \cdot \cos A + q \sin A = r \sin(A + \Theta), \quad (29)$$

$$\text{где } r = \sqrt{p^2 + q^2}; \sin \Theta = \frac{p}{r}; \cos \Theta = \frac{q}{r}. \quad (30)$$

или

$$2) p \cdot \cos A + q \sin A = r \cos(A - \varphi), \quad (31)$$

$$\text{где } r = \sqrt{p^2 + q^2}; \cos \varphi = \frac{p}{r}; \sin \varphi = \frac{q}{r}. \quad (32)$$

Вначале воспользуемся первым случаем тригонометрических преобразований в виде формул (29), (30). Применительно к левой части уравнения (28) запишем:

$$P_x \cos \alpha_2 + P_z \sin \alpha_2 = r \sin(\alpha_2 + \Theta). \quad (33)$$

Тогда уравнение (28) можно представить в виде:

$$l_1 + l_2 \cdot \cos \alpha_3 = r \cdot \sin(\alpha_2 + \Theta), \quad (34)$$

$$\text{где } r = \sqrt{P_x^2 + P_z^2}; \sin \Theta = \frac{P_x}{r}; \cos \Theta = \frac{P_z}{r}. \quad (35)$$

Для второго случая уравнение (28) можно представить в виде:

$$P_x \cdot \cos \alpha_2 + P_z \cdot \sin \alpha_2 = r \cdot \cos(\alpha_2 - \varphi), \quad (36)$$

$$\text{где } r = \sqrt{P_x^2 + P_z^2}; \cos \varphi = \frac{P_x}{r}; \sin \varphi = \frac{P_z}{r}. \quad (37)$$

Из уравнения (34) выразим $\sin(\alpha_2 + \Theta)$:

$$\sin(\alpha_2 + \Theta) = \frac{l_1 + l_2 \cos \alpha_3}{r} = \frac{l_1 + l_2 \cos \alpha_3}{\sqrt{P_x^2 + P_z^2}}. \quad (38)$$

Используя тригонометрическую формулу:

$$\cos A = \pm \sqrt{1 - \sin^2 A}, \quad (39)$$

получим

$$\cos(\alpha_2 + \Theta) = \pm \sqrt{1 - \frac{(l_1 + l_2 \cdot \cos \alpha_3)^2}{P_x^2 + P_z^2}}. \quad (40)$$

После выполнения операции деления уравнения (38) на уравнение (40) получим

$$\operatorname{tg}(\alpha_2 + \Theta) = \frac{l_1 + l_2 \cos \alpha_3}{\pm \sqrt{P_x^2 + P_z^2 - (l_1 + l_2 \cos \alpha_3)^2}}, \quad (41)$$

откуда выразим через функцию $\operatorname{arctg}(\cdot)$ сумму углов $\alpha + \Theta$:

$$\alpha_2 + \Theta = \operatorname{arctg} \left[\frac{l_1 + l_2 \cos \alpha_3}{\pm \sqrt{P_x^2 + P_z^2 - (l_1 + l_2 \cos \alpha_3)^2}} \right]. \quad (42)$$

Для получения α_2 используем формулы выражения (35)

$$\sin \Theta = \frac{P_x}{\sqrt{P_x^2 + P_z^2}}, \quad \cos \Theta = \frac{P_z}{\sqrt{P_x^2 + P_z^2}}.$$

На основании приведенных формул запишем выражения для функции $\operatorname{tg} \Theta$:

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{\sin \Theta}{\cos \Theta} = \frac{P_x}{P_z}, \quad \text{откуда получим } \Theta \quad (43)$$

$$\Theta = \operatorname{arctg} \left(\frac{P_x}{P_z} \right). \quad (44)$$

Получив выражение для вспомогательного угла Θ , нетрудно определить угол α_2 :

$$\alpha_2 = \operatorname{arctg} \left[\frac{l_1 + l_2 \cdot \cos \alpha_3}{\pm \sqrt{P_x^2 + P_z^2 - (l_1 + l_2 \cos \alpha_3)^2}} \right] - \operatorname{arctg} \left(\frac{P_x}{P_z} \right). \quad (45)$$

Если использовать тригонометрические формулы (36) и (37), то можно получить выражение для α_2 в следующем виде:

$$\alpha_2 = \operatorname{arctg} \left[\frac{\pm \sqrt{P_x^2 + P_z^2 - (l_1 + l_2 \cos \alpha_3)^2}}{l_1 + l_2 \cdot \cos \alpha_3} \right] + \operatorname{arctg} \left(\frac{P_z}{P_x} \right). \quad (46)$$

Исследуем область определения обратных тригонометрических функций:

$$\operatorname{arctg} \left[\frac{l_1 + l_2 \cdot \cos \alpha_3}{\pm \sqrt{P_x^2 + P_z^2 - (l_1 + l_2 \cos \alpha_3)^2}} \right]; \operatorname{arctg} \left(\frac{P_z}{P_x} \right); \operatorname{arctg} \left(\frac{P_x}{P_z} \right). \quad (47)$$

Для упрощения анализа области определения выражения (45) введем обозначения:

$$A = \left[\frac{l_1 + l_2 \cdot \cos \alpha_3}{\pm \sqrt{P_x^2 + P_z^2 - (l_1 + l_2 \cos \alpha_3)^2}} \right] =$$

$$= \frac{0.13 + 0.2 \cos(41.34)}{\sqrt{0.2856^2 + 0.12^2 - (0.13 + 0.2 \cos(41.34))}} = 2.12; \quad (48)$$

$$B = \left(\frac{P_x}{P_z} \right) = \frac{0.2856}{0.12} = 2.38; C = \left(\frac{P_z}{P_x} \right) = \frac{0.12}{0.2856} = 0.42.$$

С учетом введенных обозначений (48) выражение (45) можно представить в виде [5]:

$$\alpha_2 = \arctg A - \arctg B = \arctg \left(\frac{A - B}{1 + AB} \right) \text{ при } A \cdot B > -1; \quad (49)$$

$$\alpha_2 = \arctg \left(\frac{2.12 - 2.38}{1 + 2.12 \cdot 2.38} \right) = -2.45^\circ;$$

$$\alpha_2 = \arctg A - \arctg B = \pi + \arctg \left(\frac{A - B}{1 + AB} \right) \text{ при } A > B, A \cdot B < -1; \quad (50)$$

$$\alpha_2 = \arctg A - \arctg B = -\pi + \arctg \left(\frac{A - B}{1 + AB} \right) \text{ при } A < B, \quad (51)$$

$$A \cdot B < -1.$$

Далее проанализируем область определения $\arctg(\cdot)$ для выражения (49), (50), (51):

$$\alpha_2 = \arctg \left(\frac{A - B}{1 + A \cdot B} \right) \begin{cases} -90^\circ \leq \alpha_2 \leq 90^\circ, \text{ если } (1 + AB) > 0; \\ 90^\circ \leq \alpha_2 \leq 180^\circ, \text{ если } (1 + AB) < 0, (A - B) > 0; \\ -180^\circ \leq \alpha_2 \leq -90^\circ, \text{ если } (1 + AB) < 0, (A - B) < 0. \end{cases} \quad (52)$$

Таким образом, вычислены все углы поворота звеньев в сочленениях ноги шагающего аппарата на основе решения обратной кинематической задачи с применением элементарных алгебраических и тригонометрических преобразований. То есть на основе известных декартовых координат положения ступни i -ой ноги x_1, x_2, x_3 вектора $\vec{p}^i = [x_1, x_2, x_3]^T$ получены компоненты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ вектора углового положения $\vec{\alpha}^{(i)}$ звеньев i -ой ноги шагающего аппарата, где

$\bar{\alpha}^{(i)} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^T = [56.31^0 \quad -2.45^0 \quad 41.34^0]^T$. Однак ми в подальшому будемо користуватися іншими кутами, які також однозначно визначають положення ступні ноги. Ці кути легко знаходяться виходячи з наступних співвідношень:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1 = 56.31^\circ; \\ \beta &= 90^\circ + \alpha_2 = 90^\circ - 2.45^\circ = 87.55^\circ; \\ \gamma &= 180^\circ + \alpha_3 = 180^\circ + 41.34^\circ = 221.34^\circ. \end{aligned} \quad (53)$$

Вектор кутового положення $\bar{\alpha}^{(i)}$ зв'язків ніг запишеться таким чином

$$\bar{\alpha}^{(i)} = [\alpha, \beta, \gamma]^T = [33.69^0 \quad 87.55^0 \quad 221.34^0]^T.$$

На основі отриманих формул для кутів α, β, γ можна програмними засобами розробити модуль перетворення декартових координат в кутові (рис.2).

На вхід такого модуля повинні надходити вектори положення $\bar{p}^{(i)}$ ступень ніг і довжини зв'язків цих ніг, а на виході модуля повинні вироблятися кутові координати в вигляді векторів кутового положення $\bar{\alpha}^{(i)}$ зв'язків ніг ходячого апарату.

Отже, можна зробити висновок про те, що за заданими декартовими координатами ступні ноги ходячого апарату можна достатньо легко і просто отримати кутові координати.

Список источников

1. Pieper D.L., The Kinematics of Manipulators under Computer Control, Artificial Intelligence Project Memo No. 72, Computer Science Department, Stanford University, Palo Alto, Calif., 1968.
2. Milencovic V., Huang B. Kinematics of major Robot Linkages, Proc. 13 th Intl. Symp. Industrial Robots, Chicago, p. 16 – 31 , 1983.
3. Фу К., Гонсалес Р., Ли К. Робототехника: пер. с англ. -М.: Мир, 1989. - 624 с.
4. Шахинпур М. Курс робототехники: пер с англ. - М.: Мир, 1990. - 527 с.
5. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1966.- 228 с.
6. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1980.- 976 с.