РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ МЕТОДАМИ ПАРАМЕТРИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Сергеєв О.П. Інститут підприємництва та бізнесу ТАНГ

Широке коло задач економічного аналізу та прийняття управлінських рішень описується моделями багатокритеріального математичного програмування. Ефективність виробничо-фінансової діяльності промислових підприємств та об'єднань оцінюється за допомогою системи економічних показників (валова і товарна продукція, прибуток, рентабельність, собівартість і т. і.), тому виникає необхідність в багатокритеріальному підході до побудови оптимальних планів, які дадуть змогу одержати єдиний компромісний план з позицій різних критеріїв оптимальності.

В даний час розроблено багато різноманітних процедур і методів для рішення задач багатокритеріального математичного програмування, серед яких особливу увагу заслуговують методи В. Садовського, І. Никовського, І. Саскі, Х. Юттлера та інших.

Один із підходів до розв'язання багатокритеріальних задач, який буде розглянуто в даній роботі, оснований на використанні поняття рівноваги і дозволяє застосувати методи параметричного програмування.

Задачі такого класу відносяться, як відомо, до задач векторної оптимізації. Будемо виходити з лінійної системи обмежень, які визначають не порожню множину значень змінних, що задовольняють ці обмеження. Задано декілька цільових функцій, причому задача максимізації кожної з них в області, що розглядається, має кінцевий розв'язок. Для постановки задачі в точних термінах необхідно ввести спочатку поняття функціонально ефективного вектора.

Означення 1. Нехай X – деяка підмножина n-вимірного евклідового простору, $z_1(x), \ldots, z_k(x)$ – функції векторного аргументу $x \in E_n$. Вектор $x' \in X$ називається функціонально ефективним відносно області X і системи функцій $z_1(x), \ldots, z_k(x)$, якщо не існує вектора $x'' \in X$, що володіє наступними властивостями:

а) $z_k(x'') \geq z_k(x'), \qquad k = 1, \ldots, K;$

б) $z_k(x') \neq z_k(x'')$.

Таким чином, перехід від функціонально ефективного вектора x'' до будь-якого іншого вектора $x \in X$ не може дати збільшення значення всіх функцій $z_1(x)$, ..., $z_k(x)$. В економічних теоріях поняттю функціонально ефективного вектору відповідає поняття рівноваги по Парето, а в теорії ігор, яка вивчає різні форми конфліктних ситуацій, – поняття ситуації рівноваги [1].

Для пояснення поняття рівноваги на прикладі припустимо, що підприємство, яке виробляє продукцію різних типів, зацікавлене не тільки в максимізації прибутку від випуску продукції, але і в максимальному використанні наявних в його розпорядженні технічних нововведень (технологій, обладнання). Освоєння нових способів випуску продукції в початковому періоді може призвести до зменшення прибутку, але в майбутньому безперечно дасть ефект. Задача полягає в тому, щоб знайти оптимальне узгодження показника величини прибутку і показника, який характеризує освоєння нової техніки. Зауважимо, що в цьому випадку мова не йде про максимізацію будь-якої нової цільової функції, яка одержана із двох даних, – такої функції може не існувати. Знаходження функціонально ефективного вектора або декількох таких векторів означає визначення таких планів випуску продукції, що явно не можна вказати інший план, який покращує обидва критеріальних показники одразу. Іншими словами під оптимальним станом системи в даному випадку розуміють стан, коли рішення не можна покращити ні по одному із прийнятих в задачі критеріїв, не погіршив його по будь-якому іншому критерію.

Наведемо для прикладу наступну спрощену багатокритеріальну модель виробничої програми підприємства. Нехай задано систему цільових лінійних функцій (прибутку і завантаження обладнання), що максимізуються:

$$\begin{cases} Z_1(x_1, x_2) = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \\ Z_2(x_1, x_2) = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij} x_j \end{cases} \qquad (1)$$

і систему обмежень задачі:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le A_i \\ x_1, x_2 \ge 0, \end{cases} \tag{2}$$

де x_j – вектор невідомих змінних j-х видів готової продукції; c_j – вектор цін j-видів продукції; p_{ij} –матриця нормо-годин і-виду обладнання на одиницю j-виду продукції; a_{ij} – матриця норм витрат і-го ресурсу на виготовлення j-го виду продукції; A_i – вектор наявних або очікуваних обсягів j-го ресурсу.

Необхідно знайти множину функціонально ефективних векторів відносно множини розв'язків системи функцій (1) і системи обмежень (2).

З допомогою звичайних методів лінійного програмування легко знайти окремий розв'язок кожної з двох задач, якщо при системі обмежень (2) розглядати функції z_1 і z_2 як цільові:

$$X^{(1)} = (x_1', x_2');\ Z_1 = Z_1\left(X^{(1)}\right);\ X^{(2)} = (x_1'', x_2'');\ Z_2 = Z_2\left(X^{(2)}\right), \tag{3}$$

де $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, $Z_1(X^{(1)})$, $Z_2(X^{(2)})$ – вектори оптимальних планів і значень цільових функцій відповідно першої і другої задачі.

Значення цільових функцій кожної з задач в оптимальній точці іншої задачі будуть відповідно $Z_1(X^{(2)})$ та $Z_2(X^{(1)})$. Тобто ці значення досягаються першою або другою функцією тоді, коли інша функція приймає максимально допустиме значення в області, яка розглядається. Тому справедлива наступна система нерівностей:

$$Z_1\left(X^{(2)}\right) \le Z_1 \le Z_1\left(X^{(1)}\right); \quad Z_2\left(X^{(1)}\right) \le Z_2 \le Z_2\left(X^{(2)}\right) \tag{4}$$

(більш точно: кожна з функцій може набути нижнього граничного значення, в той час як друга досягає максимуму).

При такій постановці задачі для визначення ефективних векторів можуть бути використані методи параметричного програмування. Дійсно, розглянемо задачу максимізації однієї із цільових функцій при умові, що друга функція повинна приймати деяке не фіксоване точно значення в якомусь із відрізків, які фігурують в системі (4). В такому вигляді ця задача виявляється задачею параметричного програмування, в якій координати вектора обмежень залежать від одного параметра.

Тоді задача формулюється так:

$$Z_1 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \tag{5}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le A_i, \quad i = 1, 2, ..., m; \quad j = 1, 2, ..., n \\ \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij} x_j \le Z_2\left(X^{(1)}\right) + \lambda \\ x_1, x_2 \ge 0 \\ \lambda \in \left\{\lambda \,\middle|\, 0 \le \lambda \le Z_2\left(X^{(2)}\right) - Z_2\left(X^{(1)}\right)\right\}. \end{cases} \tag{6}$$

Традиційний метод розв'язування задач параметричного програмування полягає в наступному: значення параметра λ приймається рівним деякому числу $\lambda_0=0$ із проміжка його зміни, знаходиться оптимальний план отриманої задачі лінійного програмування, або встановлюється, що вона розв'язку не має. Знаходяться значення параметра λ, для яких задача має той самий розв'язок або нерозв'язна. Ці значення λ виключаються із розгляду. Знову вибирається значення параметра λ із остатньої частини проміжка $[0; Z_2(X^{(2)}-Z_2(X^{(1)})]$. Обчислення проводяться до тих пір, поки не будуть випробувані усі значення параметра λ.

Обмеженість методу полягає в тому, що при розв'язанні задачі перебираються усі можливі значення параметра λ із проміжка його зміни і кожного разу отримана задача лінійного програмування розв'язується симплекс-методом, що пов'язано з великою кількістю обчислень.

Доцільно використовувати такі методи і алгоритми оптимізації, які дозволяють покращити вже знайдене рішення значно простіше і швидше. Новий універсальний підхід до розв'язання задач параметричного програмування з використанням λ-матриць та систем лінійних рівнянь з λ-матрицями дозволяє значно оптимізувати процес рішення задач такого класу.

Узагальненням постановки таких задач є задача параметричного програмування, в якій від параметра λ лінійно залежать коефіцієнти при невідомих в цільовій функції, коефіцієнти при невідомих в системі обмежень та вільні члени системи обмежень:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} \left(c'_j + \lambda c''_j\right) x_j \to \max, \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(a'_{ij} + \lambda a''_{ij}\right) x_j = b'_i + \lambda b''_i, \quad \left(i = \overline{1, m}\right), \tag{8}$$

$$x_j \ge 0, \quad \left(j = \overline{1, n}\right), \tag{9}$$

де c'_j, c''_j, a'_{ij}, a''_{ij}, b'_i, b''_i – задані постійні числа, а λ приймає значення з проміжка $[\alpha;\beta]$.

Розглянемо загальну схему розв'язування системи лінійних рівнянь:

$$A(\lambda)X(\lambda) = B(\lambda) \tag{10}$$

$$X(\lambda) \ge 0. \tag{11}$$

Система обмежень (10) є прямокутною системою лінійних алгебраїчних рівнянь з λ-матрицями. А саме, $A(\lambda)$ - регулярна матриця розміру m x n, елементи якої є лінійні многочлени.

Подамо матрицю $A(\lambda)$ і вектор $B(\lambda)$ у вигляді матричних многочленів. В задачі (7)-(9) вони мають вигляд:

$A(\lambda) = A_0\lambda + A_1$,

$B(\lambda) = B_0\lambda + B_1$.

Формально будемо шукати розв'язок системи (10) у вигляді відношення двох поліномів з невідомими коефіцієнтами:

$$X(\lambda) = \frac{Q(\lambda)}{P(\lambda)} = \frac{\sum_{j=0}^{m} \lambda^{m-j} У_j}{\sum_{j=0}^{m} \lambda^{m-j} z_i}. \tag{12}$$

Тут $У_0$, $У_1$, ..., $У_m$ - вектори розмірності n, а z_0, z_1, ..., z_m - скалярні величини.

Тоді систему (10) можна записати наступним чином:

$A(\lambda)X(\lambda) = [\lambda A_0 + A_1] \times [\lambda^m У_0 + \lambda^{m-1} У_1 + \lambda^{m-2} У_2 + \ldots + \lambda^2 У_{m-2} + \lambda У_{m-1} + У_m] = [\lambda B_0 + B_1] \times [\lambda^m z_0 + \lambda^{m-1} z_1 + \lambda^{m-2} z_2 + \ldots + \lambda^2 z_{m-2} + \lambda z_{m-1} + z_m]$.

Згрупувавши члени в лівій і правій частинах рівності при однакових степенях λ і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях λ, одержимо наступну чисельну систему n(m + 2) рівнянь з n(m + 1) невідомими y_{ij} і з (m + 1) невідомими z_j :

$$\begin{cases} A_0У_0 - B_0z_0 = 0 \\ \\ A_0У_1 + A_1У_0 - \left[B_0z_1 + B_1z_0\right] = 0 \\ A_0У_2 + A_1У_1 - \left[B_0z_2 + B_1z_1\right] = 0 \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ A_0У_s + A_1У_{s-1} - \left[B_0z_s + B_1z_{s-1}\right] = 0 \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ A_0У_m + A_1У_{m-1} - \left[B_0z_m + B_1z_{m-1}\right] = 0 \\ A_1У_m - B_1z_m = 0 \end{cases} \qquad (13)$$

Даний підхід до розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь з λ-матрицями дозволяє конструювати ефективні чисельні алгоритми розв'язування прямокутних систем, а також проводити апріорний аналіз їх розв'язків. Для розв'язання одержаних систем чисельних рівнянь (13) можна застосовувати кілька обчислювальних алгоритмів: стрічкову схему розв'язання, схему діагоналізації, швидку версію схеми розрізання [2, 3, 4].

Крім системи обмежень (13) отриманий вектор $X(\lambda)$ повинен задовільняти умову невід'ємності (12). Тобто серед можливих значень параметра λ треба вибрати ті, для яких

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{m} \lambda^{m-j} У_j}{\sum\limits_{j=1}^{m} \lambda^{m-j} z_j} \geq 0 . \qquad (14)$$

Тоді алгоритм пошуку розв'язку задачі параметричного програмування (7)- (9) може бути записаний так:

1. Знаходять множину розв'язків системи обмежень (10), як прямокутної системи лінійних алгебраїчних рівнянь з λ-матрицями.

2. Визачають множину значень параметра λ, для яких $X(\lambda) \geq 0$.

3. На кожному інтервалі зміни параметра λ досліджують цільову функцію $Z(\lambda)$ на екстремум і знаходять її найбільше значення [2].

Практична цінність такого підходу визначається тим, що в рамках розробленої математичної постановки можна розв'язувати конкретні багатокритеріальні прикладні задачі і знаходити компромісні плани з позицій різних критеріїв оптимальності. Програмна реалізація алгоритму рішення систем лінійних алгебраїчних рівнянь з λ-матрицями для розв'язання задач параметричного програмування з допомогою сучасних ЕОМ дозволяє ефективно впоратися з великою розмірністю поставлених задач і може бути представлена у вигляді функціонального програмного модуля системи підтримки прийняття управлінських рішень [5].

Список источников

1.Вильямс Н.Н. Параметрическое программирование в экономике. – М.: Статистика, 1976. – 96 с.

2.Недашковский Н.А. О решении систем алгебраических уравнений с λ-матрицами. // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1988, – т.28 – №3. С. 439 – 443.

3.Недашковский Н.А. Методы решения систем алгебраических уравнений с λ-матрицами // Тезисы докладов всесоюзной конференции "Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики". – Тернополь. – 1989. – С. 303 – 304.

4.Недашковський М.О. Швидка схема розв'язання для систем лінійних алгебраїчних рівнянь з λ - матрицями // Доп. НАН України, Серія А, Київ, – 1995. – № 4. – С. 23 – 29.

5.Сергеєв О.П. Економіко-математичне моделювання оптимізації виробничої програми підприємства // Вісник ТАНГ. – 2000. – № 11. – С. 33 –39.