

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ДВИЖЕНИЯ ШЕСТИНОГО ШАГАЮЩЕГО АППАРАТА

Рафиков Г.Ш., Иванова О.Ю.

Донецкий национальный технический университет, г. Донецк  
кафедра автоматике и телекоммуникаций

E-mail: [olgivanova@ukr.net](mailto:olgivanova@ukr.net)

### Abstract

*Rafikov G. Sh., Ivanova O. Y. Mathematical modelling dynamic motion 6-feet walking device. The method is developed, by which becomes possible to expect dynamic descriptions of motion of shestinogogo stepping vehicle and engines in the hinges of feet, proper to the set descriptions of motion of vehicle.*

**Общая постановка проблемы.** Развитие робототехники было связано с необходимостью исследования территории с "агрессивной" средой. Необходимость создания наземных транспортных средств с высокой проходимостью заставила обратиться к созданию машин, перемещающихся с помощью конечностей. Предполагается, что такие положительные качества шагающего аппарата, как высокая адаптация к неровностям опорной поверхности, принципиально более высокая маневренность, допускающая перемещение машины в произвольном направлении и повороты на месте, опорная проходимость по грунтам с низкой несущей способностью, возможность комфортабельного движения позволяет занять одно из ведущих мест в робототехнике. Однако, данные аппараты имеют довольно сложную систему управления движением. Исследование динамики движения шестиногого аппарата составляет большую долю в построении системы управления движением.

**Постановка задач исследования.** Для построения системы управления движением необходимо решить следующие основные задачи:

- разработка математической модели движения шестиногого шагающего аппарата;
- написание программного обеспечения для моделирования движения аппарата.

**Решение поставленных задач и результаты исследования.** В статье разработана методика, с помощью которого становится возможным рассчитывать динамические характеристик движения шестиногого шагающего аппарата и двигателей в шарнирах ног, соответствующие заданным характеристикам движения аппарата.

Математическая модель динамики движения

Рассмотрим уравнение движения:

Пусть  $\bar{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$  координаты фиксированной точки О корпуса (начала системы координат, связанной с корпусом),  $\psi, \theta, \gamma$  - угловые координаты корпуса,

$\bar{\varphi} = (\varphi_{11}, \varphi_{21}, \varphi_{31}, \dots, \varphi_{16}, \varphi_{26}, \varphi_{36})$  - углы в шарнирах ног. Механическое уравнение движения аппарата (без учета динамики двигателей в шарнирах ног) можно записать в виде [1]

$$\bar{f}_{\xi}(\bar{\xi}, \bar{\psi}, \bar{\varphi}, \dot{\bar{\xi}}, \dot{\bar{\psi}}, \dot{\bar{\varphi}}, \ddot{\bar{\xi}}, \ddot{\bar{\psi}}, \ddot{\bar{\varphi}}) = \bar{N}, \quad (1)$$

$$\bar{f}_{\psi}(\bar{\xi}, \bar{\psi}, \bar{\varphi}, \dot{\bar{\xi}}, \dot{\bar{\psi}}, \dot{\bar{\varphi}}, \ddot{\bar{\xi}}, \ddot{\bar{\psi}}, \ddot{\bar{\varphi}}) = \bar{M}, \quad (2)$$

$$\bar{f}_{\varphi}(\bar{\xi}, \bar{\psi}, \bar{\varphi}, \dot{\bar{\xi}}, \dot{\bar{\psi}}, \dot{\bar{\varphi}}, \ddot{\bar{\xi}}, \ddot{\bar{\psi}}, \ddot{\bar{\varphi}}) = Q_{\mu}, \quad (3)$$

где  $j = 1, 2, 3$  - номер шарнира,  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  - номер ноги,

$\bar{N}$  - сумма сил реакции опорной поверхности в точках опоры ног,

$\bar{M}$  - суммарный момент сил реакции опорной поверхности,

$Q_{ji}$  - обобщенная сила в  $j$ -том шарнире  $i$ -той ноги.

Обозначим  $M_{ji}$  - момент в  $j$ -том шарнире  $i$ -той ноги,  $I_o$  - множество индексов опорных ног,  $I_n$  - множество индексов переносимых ног. Тогда имеем для переносимых ног:

$$Q_{ji} = M_{ji}, \text{ при } i \in I_n, \quad (4)$$

для опорных ног:

$$Q_{ji} = M_{ji} + (\bar{m}_{ji}, \bar{N}_i), \text{ при } i \in I_o, \quad (5)$$

где  $\bar{N}_i$  - реакция опорной поверхности в точке опоры  $i$ -той ноги,  $\bar{m}_{ji}$  - трехмерные векторы, элементы которых зависят только от значений углов в шарнирах ног.

Следует сказать, что изменение углов в шарнирах ног осуществляется с помощью двигателей постоянного тока, которые соединены с соответствующими звеньями конечностей через редукторы. Обозначим угол поворота якоря двигателя в  $j$ -том шарнире  $i$ -той ноги  $\alpha_{ji}$

$$\alpha_{ji} = K_{ji} \varphi_{ji} \quad (6)$$

где  $K_{ji}$  - коэффициенты редукции в  $j$ -том шарнире  $i$ -той ноги и равны:

$$K_{11} = K_{12} = K_{14} = K_{15} = K_{16} = 500,$$

$$K_{21} = K_{22} = K_{24} = K_{25} = K_{26} = 3500,$$

$$K_{31} = K_{32} = K_{34} = K_{35} = K_{36} = 900.$$

Таким образом, механическое уравнение электродвигателя постоянного тока в  $j$ -том шарнире  $i$ -той ноги имеет вид [2]

$$J_{ji} \ddot{\alpha}_{ji} = M_{ji} - M_{ji}^H - M_{ji}^{CP} \text{sign}(\dot{\alpha}_{ji}), \quad (7)$$

где

$$M_{ji}^H = M_{ji}^* + M_{ji}^{CP} \text{sign}(\dot{\alpha}_{ji}),$$

$J_{ji}$  - момент инерции якоря двигателя, который имеет значения:

$$J_{1i} = J_{2i} = 0,000028 \text{ кг м}^2,$$

$$J_{3i} = 0,000014 \text{ кг м}^2,$$

$M_{ji}$  - электромагнитный момент двигателя,

$M_{ji}^d$  - момент нагрузки на валу двигателя,

$M_{ji}^{сд}$  - постоянный по величине момент сухого трения на валу двигателя, который равен 0,01 Нм,

$M_{ji}^{ср}$  - постоянный по величине момент потерь в редукторе, который равен 0,01 Нм,

$M_{ji}^*$  - определяется через момент в шарнире ноги  $M_{ji}$  с учетом потерь в редукторе  $M_{ji}^n$ , зависящего от момента нагрузки. Момент потерь  $M_{ji}^n$  будем учитывать через коэффициент потерь в редукторе [3,4]. Момент потерь может как противодействовать, так и способствовать заданному движению в шарнире ноги. В первом случае

$$M_{ji}^* = \frac{M_{ji}}{K_{ji}\eta_{ji}^{n.к.}}, \quad (8)$$

где  $0 < \eta_{ji}^{n.к.} < 1$  - коэффициент потерь в редукторе, когда ведущим является вал двигателя.

Во втором случае

$$M_{ji}^* = \frac{M_{ji}}{K_{ji}} \eta_{ji}^{o.к.}, \quad (9)$$

где  $\eta_{ji}^{o.к.}$  - коэффициент потерь в редукторе, когда ведущим является соответствующее звено ноги.

В нашем случае используется обратимый редуктор для которого  $0 < \eta_{ji}^{o.к.} < 1$  и равен 0,8.

Подставляя (8) – (9) в (7) запишем механическое уравнение двигателя в  $j$  - ом шарнире  $i$  - ой ноги в виде

$$M_{ji} = J_{ji}\ddot{\alpha}_{ji} + M_{ji}^c + \frac{M_{ji}}{K_{ji}} \eta_{o.к.}, \quad (7^*)$$

где

$$M_{ji}^c = M_{ji}^{ср} + M_{ji}^{сд} = 0,01 \text{ Нм} + 0,01 \text{ Нм} = 0,02 \text{ Нм},$$

Электромеханическое уравнения движения электродвигателей постоянного тока в шарнирах ног в предположении безиндуктивности двигателей имеет вид:

$$U_{ji} = I_{ji}R_{ji} + c_{ji}^e \dot{\alpha}_{ji}, \quad (10)$$

$$M_{ji} = c_{ji}^m I_{ji}, \quad (11)$$

где  $U_{ji}, I_{ji}, R_{ji}$  - напряжение, ток сопротивление в цепи якоря,

$$R_{1i}, R_{2i} = 0,24 \text{ Ом}, R_{3i} = 0,45 \text{ Ом},$$



$c_{ji}^e = 0,039$  В сек - электрическая постоянная электродвигателя,

$c_{ji}^m = 0,039$  Нм/А – магнитная постоянная электродвигателя.

Уравнения (6), (7\*), (10), (11) позволяют вычислить динамические характеристики движения двигателей в шарнирах ног, по значениям координат, скоростей, ускорений аппарата и значениям моментов в шарнирах ног.

Потребляемая двигателем в  $j$  - ом шарнире  $i$  - ой ноги электрическая мощность  $W_{ji}$  равна

$$W_{ji} = U_{ji} I_{ji}. \quad (12)$$

Заметим, что формула действительна для двигателей с постоянными магнитами. Из (10) – (12) следует

$$I_{ji} = \frac{M_{ji}}{c_{ji}^m}, \quad (13)$$

$$U_{ji} = I_{ji} R_{ji} + c_{ji}^e \dot{\alpha}_{ji}, \quad (14)$$

$$W_{ji} = \frac{R_{ji}}{(c_{ji}^m)^2} M_{ji}^2 + \frac{c_{ji}^e}{c_{ji}^m} M_{ji} \dot{\alpha}_{ji}. \quad (15)$$

### Разработка программного обеспечения

Программное обеспечение было написано с помощью объектно-ориентированного языка высокого уровня Delphi 5.0, который позволяет создать удобный интерфейс пользователя, с возможностью подключения баз данных и графической визуализацией результатов. Результат программного обеспечения приведен на рисунке 1.

Динамические характеристики движения и энергозатраты						
Угол поворота звеньев ног		Характеристики и энергозатраты				
	Поворот звена	Поворот двиг.	М электро-магн	Ток	Напряжение	Мощность
1	30	15 000 (град)	0,0630 (Нм)	1,615 (А)	24,892 (В)	40,193 (Вт)
2	30	105 000 (град)	0,0261 (Нм)	0,670 (А)	24,665 (В)	16,531 (Вт)
3	30	27 000 (град)	0,0319 (Нм)	0,819 (А)	24,873 (В)	20,368 (Вт)

Старт

Рисунок 1 – Результат программной реализации

Кoeffициенты редукции принимаем равными:

$k = (500, 3500, 900)$ .

Номинальные скорости двигателей:

$n = (6000, 6000, 6000)$ .

Кoeffициенты потерь в редукторах:

$\eta_i = (0,8, 0,8, 0,8)$ .

Номинальные моменты на валу двигателей:

$M_m = (0,3, 0,3, 0,15)$ .

Сопротивление якорей двигателя:

$R = (0,24, 0,24, 0,45)$ .

Моменты инерции якоря:

$M_j = (0.000028, 0.000028, 0.000014)$ .

Постоянный по величине момент потерь в редукторе:

$M_{cp} = 0.01$ .

Постоянный по величине момент сухого трения на валу двигателя:

$M_{cd} = 0.01$ .

Магнитная постоянная электродвигателя:

$C_m = 0.039$ .

Электрическая постоянная электродвигателя:

$C_e = 0.039$ .

В программе введены такие переменные:

угол поворота в шарнирах –  $f_i$ ;

угол поворота якоря двигателя в шарнире;

время, за которое осуществляется поворот  $t$ ;

электромагнитный момент двигателя  $M_e$ ;

ток в цепи якоря  $I$ ;

напряжение в цепи якоря  $U$ ;

мощность потребляемая двигателем  $W$ .

Опираясь на полученные данные, теперь можно записывать функции.

Запись введенных данных в память написана в процедуре:

```
function TForm1.col_vec(sg:TStringGrid;i:integer):arr;
```

```
begin
```

```
  for j:=1 to 3 do
```

```
    Result[j] := StrToFloat(sg.Cells[1,j]);
```

```
end;
```

Вывод полученных значений на экран осуществляется с помощью:

```
procedure TForm1.col_sg(sg:TStringGrid;i:integer;a:arr;s:string);
```

```
begin
```

```
  for j:=1 to 3 do
```

```
    sg.Cells[i,j]:=Format('%'+s, [(a[j])]);
```

```
end;
```

Массиву  $f_i$  присваиваем введенные с клавиатуры на экран значения углов поворота звеньев конечностей

```
f_i_arr:=col_vec(sgS,1).
```

В цикле вычисляем углы поворота двигателей; электромагнитные моменты двигателей, мощность двигателя; ток с напряжением в цепи якоря двигателей:

```
for i:=1 to 3 do
```

```
begin
```

```
  a[i]:=f_i_arr[i]*k[i]*Pi/180;
```

```
  t[i]:=(a[i])/(n[i]*2*Pi/60);
```

```
  Me[i]:=Mj[i]*(a[i]/sqr(t[i]))+Mcd+Mcp+Mm[i]/(k[i]*nu[i]);
```

```
  _I[i]:=Me[i]/Cm;
```

```
  _U[i]:=_I[i]*R[i]+Ce*a[i]/t[i];
```

```
  _W[i]:=_U[i]*_I[i];
```

```
end.
```

Выводим на экран с помощью разработанной процедуры поворота двигателей выраженные в градусах, электромагнитные моменты, ток, напряжение и мощность в цепи якоря двигателей:

```
col_sg(sgE,1,a,'7.0n (град)');
```

```
col_sg(sgE,2,Me,'8.4n (Нм)');
```



col\_sg(sgE,3,\_I,'8.3n (A)');  
 col\_sg(sgE,4,\_U,'8.3n (B)');  
 col\_sg(sgE,5,\_W,'8.3n (Вт)').

**Анализ полученных результатов**

Результат программного обеспечения приведен на рисунке 1.

Начальными параметрами, которые необходимо ввести с клавиатуры, являются углы поворота в суставах конечностей шестиногого шагающего аппарата, по ним рассчитываются:

- углы поворота якоря двигателя, приведенные в градусах;
- электромагнитный момент двигателей;
- сила тока в цепи якоря двигателей;
- напряжение в цепи якоря двигателей;
- мощность, потребляемая двигателем.

Для анализа различных ситуаций приведены следующие рисунки 2-4.

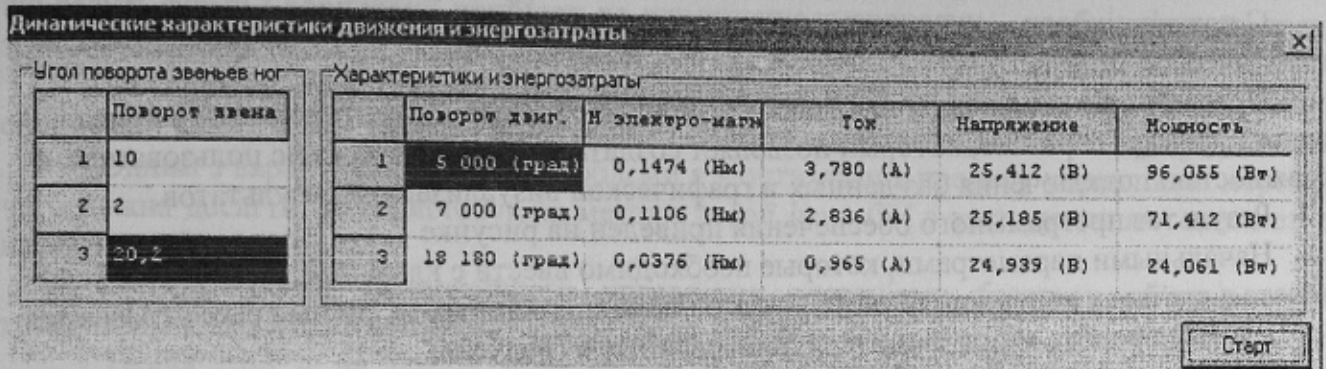


Рисунок 2 – Результат программного обеспечения для случая 1

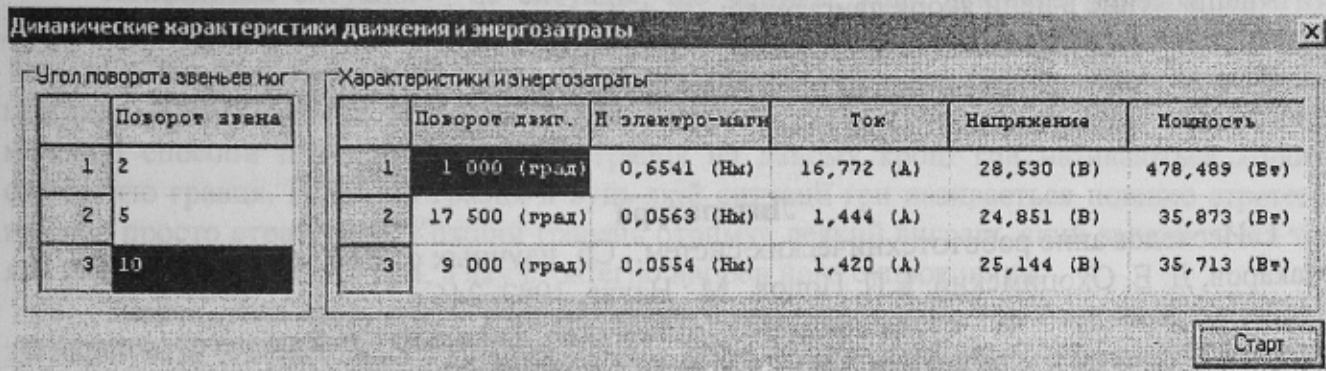


Рисунок 3 – Результат программного обеспечения для случая 2

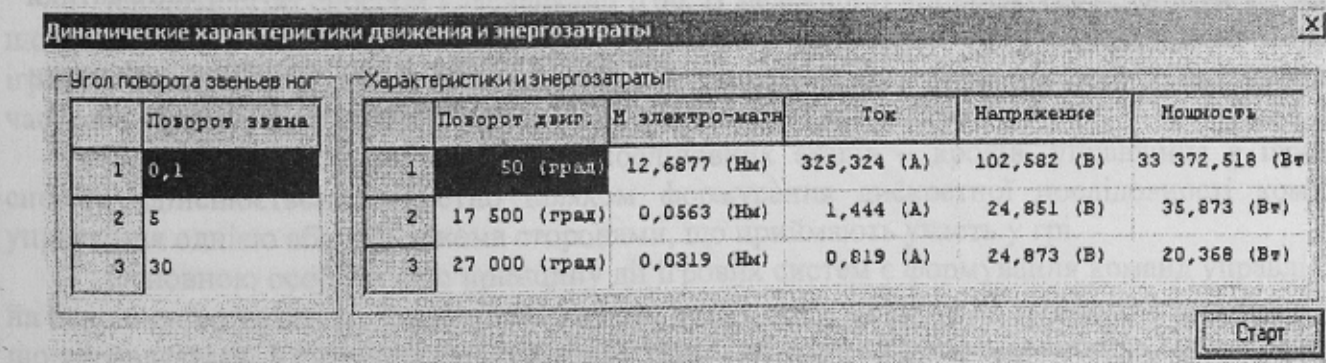


Рисунок 4 – Результат программного обеспечения для случая 3

Учитывая полученные результаты, стало очевидно, что чем меньше угол поворота звена конечности, тем больший электромагнитный момент двигателя. Объясняет такое поведение инерционность двигателя. Исходя из формулы (5.7\*) следует, что угловое ускорение при малых углах имеет большое значение, тем самым нам сложнее повернуть якорь двигателя для малых значений углов сустава. То же самое можно сказать и про мощность потребляемую двигателем.

Однако, следует отметить, что программа выдает расчетные данные, и не судит о их достоверности. Результат должен анализировать пользователь и делать выводы о возможности угла поворота сустава.

### Выводы

Разработана методика, с помощью которой рассчитаны динамические характеристики движения шестиногого шагающего аппарата, получены мощности потребляемые двигателями.

С помощью программного обеспечения стало возможным реализация разработанной математической модели.

Программная реализация написана с помощью объектно-ориентированного языка высокого уровня Delphi 5.0, который позволяет создать удобный интерфейс пользователя, с возможностью подключения баз данных и графической визуализацией результатов.

Результат программного обеспечения приведен на рисунке 1.

Начальными параметрами, которые необходимо ввести с клавиатуры, являются углы поворота в суставах конечностей шестиногого шагающего аппарата, по ним рассчитываются:

- углы поворота якоря двигателя, приведенные в градусах;
- электромагнитный момент двигателей;
- сила тока в цепи якоря двигателей;
- напряжение в цепи якоря двигателей;
- мощность, потребляемая двигателем.

Рассчитанные данные помогут пользователю программы оценить полученное решение и дать оценку их достоверности.

### Литература

1. Исследования робототехнических систем. Сб. научных статей. Отв. редакторы: И. М. Макаров, Д. Е. Охоцимский, Е.П. Попов. М.: Наука, 1982. 246 с.
2. Голубев Ю. Ф. Моделирование динамики движения шагающего аппарата: Препринт Ин-та прикл. математики АН СССР № 96. М., 1979. 27 с.
3. Охоцимский Д. Е., Платонов А. К., Кугушев Е. И., Ярошевский В. С. Система построения движения шагающего аппарата. Модель ТЗ: Препринт Ин-та прикл. математики АН СССР № 7. М., 1977. 62 с.
4. Охоцимский Д. Е., Платонов А. К., Математическое моделирование динамики движения шагающего аппарата.: Препринт Ин-та прикл. математики АН СССР № 96. М., 1984. 28 с