

УСТОЙЧИВОСТЬ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Фельдман Л. П.

Кафедра ПМИИ ДонНТУ

Feldman@r5.dgtu.donetsk.ua

Abstract

Feldman L.P. Stability of Parallel Methods for Numerical Simulation of Dynamic Systems with Concentrated Parameters. The article is prolongation of papers [2,3,4], dedicated convergence and error estimation of parallel methods of a numerical solution of a Cauchy problem for the system of the ordinary differential equations. The stability of parallel methods of rigid systems solution is considered

Введение

Одним из главных вопросов, возникающих при проведении численного моделирования систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, является проблема устойчивости. Дополнительные трудности обеспечения устойчивости появляются при численном решении жестких систем. Они связаны с тем, что необходимо использовать специальные численные методы, позволяющие выбирать шаг интегрирования, исходя лишь из требований точности, а не устойчивости или из-за требования сходимости итерационного процесса решения неявных уравнений. Основные результаты по теории устойчивости многошаговых методов были получены Дальквистом [1]. Для интегрирования жестких систем широко используются чисто неявные методы, предложенные и обоснованные Гиром [1]. К настоящему времени предложен и практически используется целый ряд методов, использующих последовательные алгоритмы решения жестких уравнений. В то же время проблема разработки и обоснования параллельных методов и алгоритмов, ориентированных на эффективное использование в многопроцессорных системах все еще остается открытой.

Настоящая статья является продолжением работ [2,3,4], посвященных сходимости и оценки погрешности параллельных методов численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В ней рассматривается устойчивость параллельных методов решения жестких систем.

1. Устойчивость одношагового двухточечного блочного метода

Для задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1)$$

уравнения одношагового разностного метода для блока n , содержащего k точек, можно записать в виде [2]

$$\frac{u_{n,i} - u_{n,0}}{\tau} = b_i F_{n,0} + \sum_{j=1}^k a_{i,j} F_{n,j}, \quad i = \overline{1, k}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

где $F_{n,i} = f(t_{n,i}, u_{n,i})$, i - номер точки в блоке.

Условие устойчивости Дальквиста [1] для разностных уравнений (2) выполняется, так как для каждого i характеристическое уравнение разностного метода (2) имеет вид

$$\lambda^i = 1, i = \overline{1, k}, \tag{3}$$

все i простых корней которого лежат на окружности единичного радиуса и наивысший порядок аппроксимации уравнений (2) равен $p = k+1$ [2]. Таким образом, выполнены условия сходимости решения разностной задачи при $\tau \rightarrow 0$ к решению исходной задачи (1) на конечном отрезке $0 \leq n\tau \leq T$ [3].

Условия устойчивости Дальквиста являются очень общими и означают лишь то, что все решения однородного разностного уравнения, соответствующего (2), остаются ограниченными при $n \rightarrow \infty$. Однако выполнение условий устойчивости разностных уравнений по Дальквисту, является недостаточным при выполнении практических расчетов на больших интервалах t , так как не гарантирует абсолютную устойчивость разностного метода [5]. Исследование устойчивости одношаговых блочных методов в настоящей статье проводилось, как это принято, на модельном одномерном уравнении

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x, t > 0, \tag{4}$$

где λ - комплексное число.

Рассмотрим решение модельной задачи (4) одношаговым двухточечным методом

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \tau(5F_n + 8F_{n+1} - F_{n+2})/12, \\ u_{n+2} &= u_n + \tau(F_n + 4F_{n+1} + F_{n+2})/3. \end{aligned} \tag{5}$$

Используем (5) для решения тестовой задачи (4), получим

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \tau(5u_n + 8u_{n+1} - u_{n+2})/12, \\ u_{n+2} &= u_n + \tau(u_n + 4u_{n+1} + u_{n+2})/3, \end{aligned}$$

где $\mu = \lambda \tau$. Найдем из полученных уравнений u_{n+1} и u_{n+2} .

$$u_{n+1} = \frac{6 - \mu^2}{2(3 - 3\mu + \mu^2)} u_n, u_{n+2} = \frac{3 + 3\mu + \mu^2}{3 - 3\mu + \mu^2} u_n$$

Метод (5) устойчив, если выполнены оба условия

$$|q_1| = \left| \frac{6 - \mu^2}{2(3 - 3\mu + \mu^2)} \right| \leq 1 \text{ и } |q_2| = \left| \frac{3 + 3\mu + \mu^2}{3 - 3\mu + \mu^2} \right| \leq 1 \tag{6}$$

Найдем области устойчивости при действительных значениях μ , построив для этого графики соответствующих функций

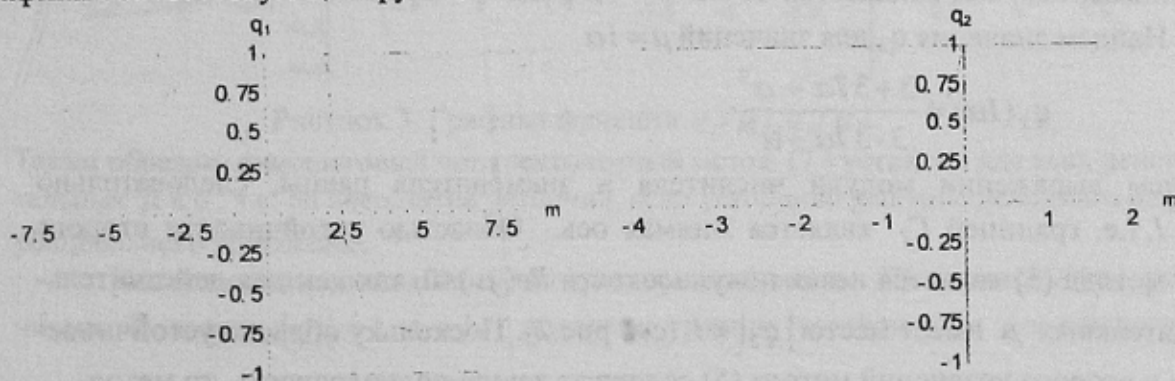


Рисунок 1. Область устойчивости разностных уравнений метода (5).

Таким образом, метод (5) устойчив для $\mu < 0$, т.е. он абсолютно устойчив, если устойчиво решение исходного дифференциального уравнения.

Покажем, что метод (5) является *A*-устойчивым [1]. Для этого определим множество G точек комплексной плоскости $\mu = Re \mu + i Im \mu$, для которых $|q_1| \leq 1$ и $|q_2| \leq 1$, т.е. выполняется (6). Найдем множество G_1 таких точек μ , для которых выполняется первое условие из (6), т.е. $|q_1| \leq 1$. Границей Γ_1 области G_1 является множество таких точек, для которых $|q_1| = 1$. Положив $q_1 = e^{i\varphi}$, получим тогда уравнение для Γ_1

$$\frac{6 - \mu^2}{2(3 - 3\mu + \mu^2)} = E^{i\varphi}$$

и выразим из него параметр μ . При изменении аргумента φ от 0 до 2π точка $\mu(\varphi)$ опишет кривую Γ_1 , приведенную на рис. 2.

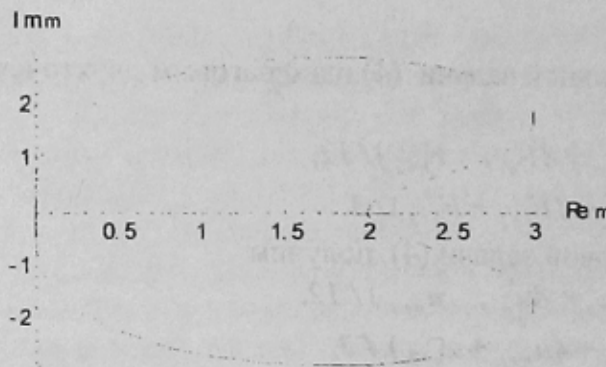


Рисунок 2. Граница устойчивости первого уравнения метода (5)

Для точек, расположенных внутри этой кривой, выполнено условие $|q_1| \leq 1$, поскольку для точек $0 < \mu < 2$ действительной оси значение q_1 действительно и $q_1 > 1$ (см. рис. 1). Следовательно для точек, расположенных снаружи от этой кривой, выполнено условие $|q_1| \leq 1$, поэтому область устойчивости первого уравнения метода (5) представляет собой внешность кривой Γ_1 .

Определим область устойчивости второго уравнения метода (5). Границей Γ_2 области G_2 является множество таких точек, для которых $|q_2| \leq 1$. Покажем, что границей Γ_2 является мнимая ось, т.е. множество точек $\mu = i\alpha$, где α - произвольное действительное число. Найдем значения q_2 для значений $\mu = i\alpha$

$$q_2(i\alpha) = \frac{3 + 3i\alpha - \alpha^2}{3 - 3i\alpha - \alpha^2}$$

В последнем выражении модули числителя и знаменателя равны, следовательно $|q_2(i\alpha)| = 1$, т.е. границей Γ_2 является мнимая ось. Областью устойчивости второго уравнения метода (5) является левая полуплоскость $Re(\mu) < 0$, так как для действительных отрицательных μ имеет место $|q_2| < 1$ (см. рис.2). Поскольку области устойчивости первого и второго уравнений метода (5) содержат левую полуплоскость, то метод

(5) является A - устойчивым.

2. Устойчивость одношагового четырехточечного метода

Рассмотрим решение тестовой задачи (1) четырехточечным блочным методом, для которого в [2] были получены следующие формулы:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \tau(25F_n + 646F_{n+1} - 264F_{n+2} + 106F_{n+3} - 19F_{n+4})/720, \\ u_{n+2} &= u_n + \tau(29F_n + 124F_{n+1} + 24F_{n+2} + 4F_{n+3} - F_{n+4})/90, \\ u_{n+3} &= u_n + 3\tau(9F_n + 34F_{n+1} + 24F_{n+2} + 14F_{n+3} - F_{n+4})/80, \\ u_{n+4} &= u_n + 2\tau(7F_n + 32F_{n+1} + 12F_{n+2} + 32F_{n+3} + 7F_{n+4})/45. \end{aligned} \tag{7}$$

Заменим $F_n = \lambda u_n$ и обозначим $\mu = \lambda \tau$, получим тогда для тестовой задачи уравнения:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \mu(25u_n + 646u_{n+1} - 264u_{n+2} + 106u_{n+3} - 19u_{n+4})/720, \\ u_{n+2} &= u_n + \mu(29u_n + 124u_{n+1} + 24u_{n+2} + 4u_{n+3} - u_{n+4})/90, \\ u_{n+3} &= u_n + 3\mu(9u_n + 34u_{n+1} + 24u_{n+2} + 14u_{n+3} - u_{n+4})/80, \\ u_{n+4} &= u_n + 2\mu(7u_n + 32u_{n+1} + 12u_{n+2} + 32u_{n+3} + 7u_{n+4})/45. \end{aligned}$$

Также как в предыдущем случае найдем из полученных уравнений u_{n+i} и операторы перехода $q_i, i = 1, 2, 3, 4$. В результате получим, что метод (7) устойчив, если выполнены все следующие условия

$$\begin{aligned} |q_1| &= \left| \frac{60 - 60\mu + 15\mu^2 + 5\mu^3 - 3\mu^4}{60 - 120\mu + 105\mu^2 - 50\mu^3 + 12\mu^4} \right| \leq 1, \quad |q_2| = \left| \frac{60 - 15\mu^2 + 2\mu^4}{60 - 120\mu + 105\mu^2 - 50\mu^3 + 12\mu^4} \right| \leq 1 \\ |q_3| &= \left| \frac{60 + 60\mu + 15\mu^2 - 5\mu^3 - 3\mu^4}{60 - 120\mu + 105\mu^2 - 50\mu^3 + 12\mu^4} \right| \leq 1, \quad |q_4| = \left| \frac{60 + 120\mu + 105\mu^2 + 50\mu^3 + 12\mu^4}{60 - 120\mu + 105\mu^2 - 50\mu^3 + 12\mu^4} \right| \leq 1 \end{aligned}$$

Найдем области устойчивости каждого из уравнений (7) для действительных значений μ и приведем на рис.3 и 4 графики соответствующих им q_i :

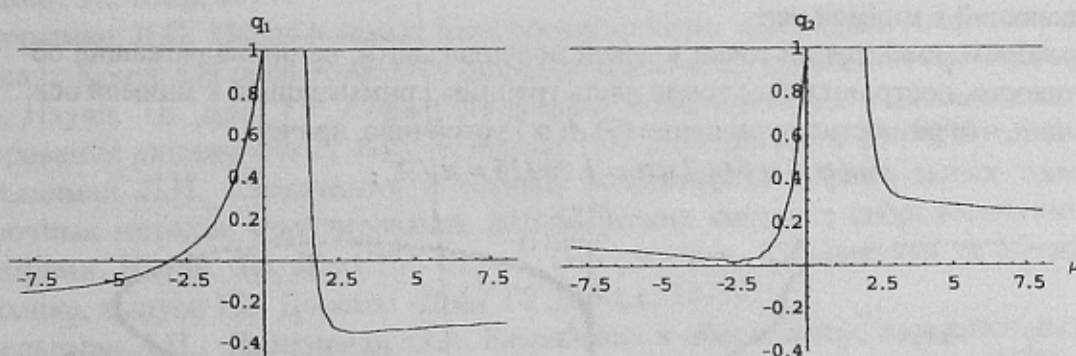


Рисунок 3. Графики функции $q_1(\mu), q_2(\mu)$.

Таким образом, одношаговый четырехточечный метод (7) устойчив для всех действительных $\mu < 0$, т.е. он абсолютно устойчив, если устойчиво решение исходного дифференциального уравнения.

Покажем, что одношаговый четырехточечный метод (7) является $A(\alpha)$ - устойчивым. Положив, $|q_k| = 1, k = \overline{1,4}$, построим границу устойчивости для каждого из

разностных уравнений (7). Для этого был использован пакет Mathematica, в котором было выполнено численное решение уравнения

$$q_k(\mu) = e^{i\varphi}, k = \overline{1,4}.$$

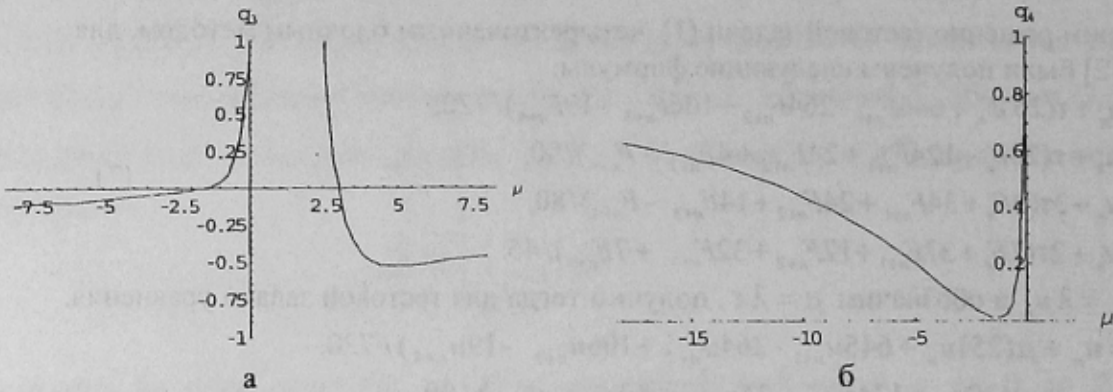


Рисунок 4. Графики функции а- $q_3(\mu)$, б- $q_4(\mu)$.

относительно μ для каждого значения $\varphi \in [0, 2\pi]$. Граница области устойчивости для первого уравнений (7) приведена на рис.5, а для второго и третьего уравнений (7) - на рис. 6.

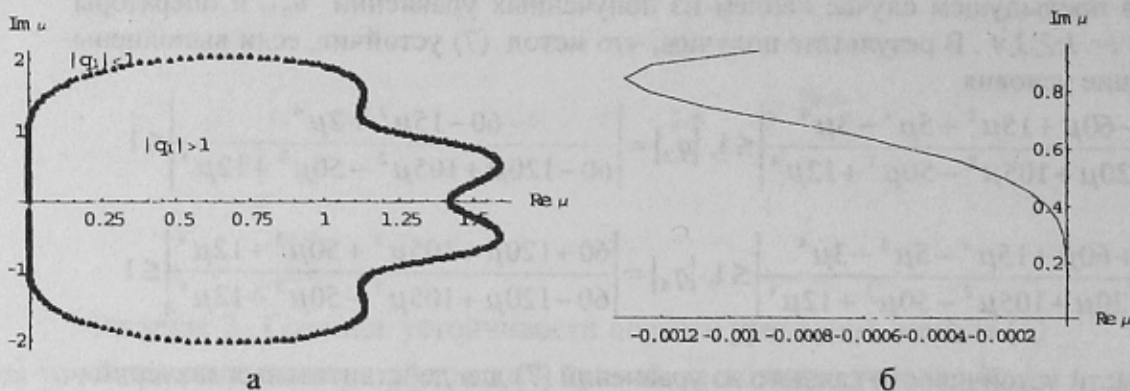


Рисунок 5. Граница области устойчивости первого уравнения (7) а- полная, б- фрагмент, примыкающий к мнимой оси.

Чтобы проверить, имеются ли точки в левой полуплоскости, не принадлежащие области устойчивости, построим более точно часть границы, примыкающей к мнимой оси. Из рис 5а видно, что разностное уравнение (7) $A(\alpha)$ устойчиво, причем

$$\tan(\alpha_1) = 644.7 \text{ и } \alpha_1 = 1.56925 \approx \pi / 2.$$

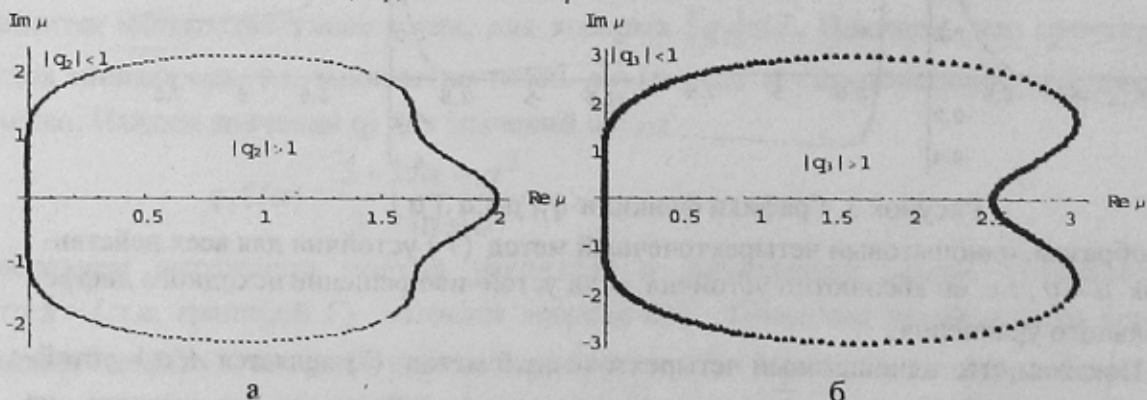


Рисунок 6. Граница области устойчивости а- второго и б-третьего уравнений (7).

Из рис .6 видно, что и второе и третье разностные уравнения (7) являются $A(\alpha)$ устойчивыми, причем α имеют следующие значения:

$$\tan(\alpha_2) = 7381u\alpha_2 = 1.57066 \approx \pi/2. \text{ и } \tan(\alpha_3) = 1931u\alpha_3 = 1.57028 \approx \pi/2.$$

Положив $|q_4| = 1$, найдем границу устойчивости четвертого разностного уравнения (7) аналогично тому, как это было сделано для второго уравнения метода (5).

Покажем, что границей Γ_4 является мнимая ось, т.е. множество точек $\mu = i\alpha$, где α – произвольное действительное число. Найдем

$$q_4(i\alpha) = \frac{60 + 120i\alpha - 105\alpha^2 - 50i\alpha^3 + 12\alpha^4}{60 - 120i\alpha - 105\alpha^2 + 50i\alpha^3 + 12\alpha^4}$$

В последнем выражении числитель и знаменатель являются комплексно сопряженными числами при любом действительном α , следовательно $|q_4(i\alpha)| = 1$, т.е. областью устойчивости четвертого уравнения (7) является левая полуплоскость $Re(\mu) \leq 0$.

Заключение

На основе проведенного анализа параллельных разностных методов можно сделать вывод, что одношаговый двухточечный разностный (5) метод является A -устойчивым, а четырехточечный метод (7)- $A(\alpha)$ -устойчив. Таким образом, оба метода могут использоваться при численном решении жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Предложенная методика может быть использована при исследовании устойчивости параллельных одношаговых методов с любым числом точек в блоке. Проведенные численные решения одношаговыми блочными методами тестовых жестких систем практически подтвердили их надежность и эффективность.

Литература

1. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1979.
2. Фельдман Л.П. Параллельные интерполяционные алгоритмы численного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений на SIMD компьютере. Научн. Тр. ДонГТУ. Серия: Проблемы моделирования и автоматизации проектирования динамических систем, выпуск 10:- Донецк: ДонГТУ, 1999, с. 20-25.
3. Фельдман Л.П. Сходимость и оценка погрешности параллельных одношаговых блочных методов моделирования динамических систем с сосредоточенными параметрами. Научн. Тр. ДонГТУ. Серия: Информатика, Кібернетика та обчислювальна техніка, выпуск 15:- Донецк: -ДонГТУ, 2000, с. 34-39.
4. Фельдман Л.П., Дмитриева .О.А. Разработка и обоснование параллельных блочных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений на SIMD- структурах. Научн. Тр. ДонГТУ. Серия: Проблемы моделирования и автоматизации проектирования динамических систем, выпуск 29:- Донецк:ДонГТУ, 2001, с. 70-79.
5. Самарский А.А. Гулин А.В. Численные методы. -М.: Наука. 1989.

Поступила в редакційну колегію 1.10.2001 р.